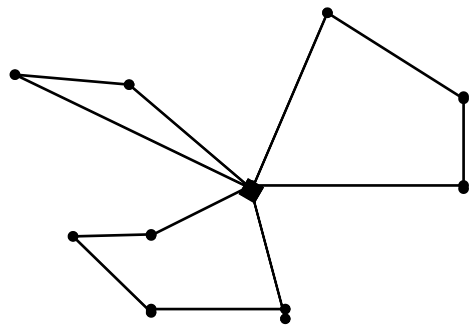
Problem rutiranja vozila - Vehicle Routing Problem (VRP)

Teoretska istraživanja i praktične aplikacije na polju rutiranja vozila počela su 1959. godine sa problemom otpremanja kamiona (Truck Dispatching Problem - TDP) koga su prvi put postavili Dantzig i Ramser. Kod ovog problema data je flota vozila koja se nalaze u jednom ili više skladišta. Zadat je i skup lokacija (korisnika) koje vozila treba da posete radi dostavljanja robe korisnicima na tim lokacijama. Potrebno je vozilom posetiti sve lokacije tačno jednom tako da je pređeno rastojanje najmanje (često se u problemima rutiranja zahteva i minimizacija broja vozila). Svako vozilo se na kraju svoje rute mora vratiti u skladište iz kog je krenulo. Iz postavke problema rutiranja vozila može se videti da se zapravo radi o uopštenju problema trgovačkog putnika na zadatak sa m trgovačkih putnika. Pritom se postavljaju dodatna ograničenja kao što su: potrebno je da svaki trgovački putnik obiđe tačan broj gradova, broj putnika je ograničen, ograničen je broj gradova koje trgovački putnik može da obiđe, itd. Problem rutiranja vozila VRP (Vehicle Routing Problem) čini posebnu grupu problema trgovačkog putnika koju karakteriše zahtev da svi trgovački putnici krenu iz istog grada i vrate se u njega, a da pri tome svaki od njih obiđe ograničen broj gradova, t.j. iz jednog (centralnog) skladišta (depoa) potrebno je transportovati robu do potrošačkih centara koristeći više vozila ili jedno vozilo više puta.



Slika 1

Na slici 1 centralno skladište je obeleženo kvadratom, a mesta isporuke kružićima, dok linije predstavljaju putanje vozila kojim se roba razvozi.

Problem rutiranja vozila sa ograničenim kapacitetom – Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)

Ukoliko se problemu VRP-a dodatno postavi ograničenje kapaciteta vozila tada se radi o problemu rutiranja vozila sa ograničenim kapacitetom (Capacitated Vehicle Routing Problem - CVRP). Kod CVRP-a data je flota identičnih vozila sa ograničenim kapacitetom i dati su korisnici sa svojim zahtevima. Vozila obilaze i opslužuju zadate lokacije (korisnike) na isti način kao kod VRP-a s tim što je potrebno poštovati kapacitete vozila. Cilj je da se pronađe rutiranje koje će minimizovati pređeno rastojanje.

Zadat je kompletan graf $G = (N, L), N = \{0,1, \dots, n\}$. Čvor 0 označava depo (skladište). Sa $C = N\backslash\{0\}$ označen je skup čvorova bez depoa. Svakoj grani $(i, j) \in L$ pridružena je vrednost (dužina, težina) c_{ij}. Svakom čvoru $i \in N$ osim depoa pridružena je potražnja $q_i, i \in N$. Zadat je i kapacitet vozila Q.

Zadatak VRP se sastoji u određivanju putanja (ruta) vozila tako da se minimizira njihova ukupna dužina (troškovi), a koje su takve da:

1. Svaki grad u $N\backslash\{0\}$ se posećuje tačno jedanput samo jednim vozilom,
2. Sve rute počinju i završavaju u skladištu,
3. Zadovoljena su neka dodatna ograničenja:
   a) Ograničenja kapaciteta: svakom čvoru (gradu) $i > 1$ pridružuju se nenegativna težina q_i, a zbir težina na bilo kojoj ruti ne sme da bude veći od kapaciteta vozila Q.
   b) Broj gradova na proizvoljnoj ruti je ograničen sa P (u ovom slučaju je $q_i = 1$ za $i > 1$ i $Q = P$).
   c) Ograničenje na ukupnu dužinu rute (vreme putovanja): ukupna dužina rute je ograničena sa Λ. Ova dužina se dobija na osnovu vremena putovanja između gradova i vremena zadržavanja u gradovima.
   d) Vremenski prozori: grad i treba da bude posećen u vremenskom intervalu $[a_i, b_i]$, a postoje i zadržavanja (čekanja) u gradu i.
   e) Odnosi prethođenja između parova čvorova; grad i ne može biti posećen pre grada j.

Algoritam ušteda (Klark-Rajtov algoritam)

Klark i Rajt (Clarke and Wright) su 1964. godine predložili algoritam ušteda koji se bazira na principu proždrljivosti. Ovaj algoritam je jedan od najviše primenjivanih heurističkih pristupa rešavanju zadatka VRP. Algoritam polazi od početnog rešenja u kojem ima *n*-1 ruta koje se formiraju tako što se po jedno vozilo upućuje iz skladišta do jednog potrošača i vraća u skladište. Zatim se interaktivno, iz koraka u korak spajaju po dve putanje koje donose najveću uštedu, a zadovoljavaju ograničenja zadatka.

Algoritam

1.Inicijalizacija:

1. Konstruisati elementarne rute (0; *i*; 0) $\forall\ i = 1, \ldots, n$ i odrediti tekuću dužinu svih ruta $F = \sum_{i \in C} c_{0i} + c_{i0}$.

2. Izračunati uštede $S_{ij},\ \forall (i,j) \in L$ po sledećoj formuli $S_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}, \forall (i,j) \in L$.

3. Sortirati uštede u nerastućem redosledu.

2. Za svaki element sortirane liste ušteda S_{ij}:

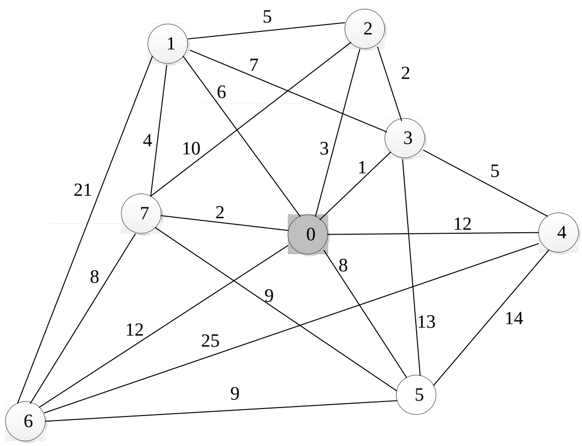
1. Odrediti:

- da li su *i* i *j* u različitim rutama prvi ili poslednji čvorovi,
- da li je zbir kapaciteta te dve rute manji od kapaciteta vozila.

2. Ako da:

- povezati ove dve rute,
- smanjiti ukupnu dužinu ruta za S_{ij}, tj. $F \leftarrow F - S_{ij}$,
- izračunati kapacitet nove rute kao zbir kapaciteta ruta od kojih je formirana,
- eliminisati grane starih ruta.

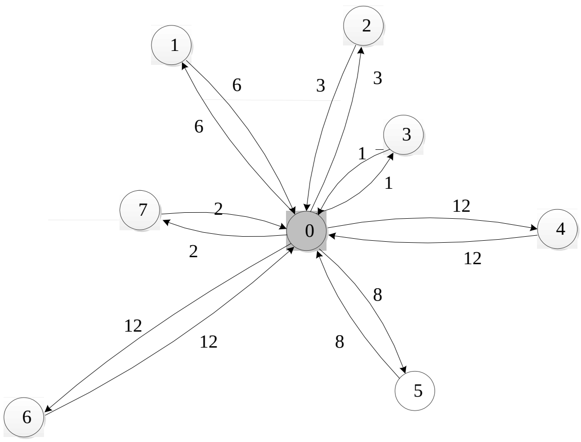
Primer 1. Firma "Komercijala" a.d. je ugovorila isporuku 350 kutija čokoladnih pralina. Sedam prodavnica u Zemunu je naručilo praline. Udaljenosti između centralnog skladišta firme i prodavnica, kao i njihov prostorni raspored dati su na slici 2. Potrebe prodavnica su redom (prodavnica 1, prodavnica 2,..., prodavnica7): 40, 20, 25, 70, 45, 50 i 100 kutija. Firma "Komercijala" a.d. ima 5 kombija nosivosti po 200 kutija. Primenom algoritma ušteda odrediti koliko kombija će firma morati da angažuje i koje su to optimalne rute kojima će oni morati da izvrše isporuku, a da pređeni put bude minimalan?



Slika 2.

Rešenje:

1. Konstruisaćemo elementarne rute i dobićemo početno rešenje koje ima sledeći oblik:



Slika 3.

2. Rute i njihove dužine su:

(0-1-0), F=6+6=12
(0-2-0), F=3+3=6
(0-3-0), F=1+1=2
(0-4-0), F=12+12=24
(0-5-0), F=8+8=16
(0-6-0), F=12+12=24
(0-7-0), F=2+2=4

3. Moguće uštede su:

$S_{12} = c_{10} + c_{02} - c_{12}$ = 6+3-5 = 4
$S_{13} = c_{10} + c_{03} - c_{13}$ = 6+1-7 = 0
$S_{16} = c_{10} + c_{06} - c_{16}$ = 6+12-21 = -3
$S_{17} = c_{10} + c_{07} - c_{17}$ = 6+2-4 = 4
$S_{23} = c_{20} + c_{03} - c_{23}$ =3+1-2 = 2
$S_{27} = c_{20} + c_{07} - c_{27}$ = 3+2-10 = -5
$S_{34} = c_{30} + c_{04} - c_{34}$ = 1+12-5 = 8
$S_{35} = c_{30} + c_{05} - c_{35}$ = 1+8-13 = -4
$S_{45} = c_{40} + c_{05} - c_{45}$ = 12+8-14 = 6
$S_{46} = c_{40} + c_{06} - c_{46}$ = 12+12-25 = -1
$S_{56} = c_{50} + c_{06} - c_{56}$ = 8+12-9 = 11
$S_{57} = c_{50} + c_{07} - c_{57}$ = 8+2-9 = 1
$S_{67} = c_{60} + c_{07} - c_{67}$ = 12+2-8 = 6

Kada sve pozitivne uštede sortiramo u nerastući niz, dobijamo sledeću listu:

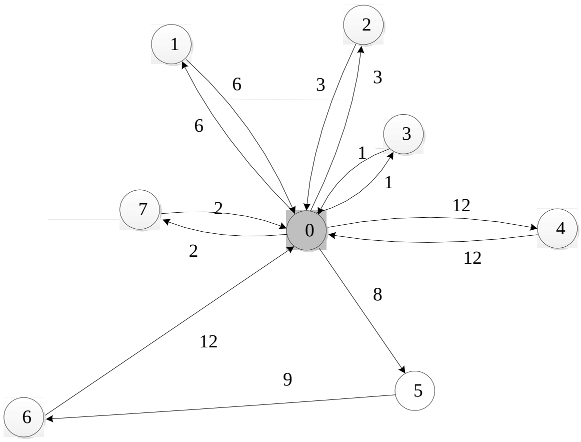
S_{56} = 11
S_{34} = 8
S_{45} = 6
S_{67} = 6
S_{12} = 4
S_{17} = 4
S_{23} = 2
S_{57} = 1

Svakoj od ovih ušteda odgovara spajanje ruta koje je moguće uraditi samo ako su zadovoljena ograničenja kapaciteta.

1. S_{56} = 11, čvor 5 je prvi u ruti (0-5-0) (ne uzimamo u obzir depo), a čvor 6 je takođe prvi u ruti (0-6-0).
Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_5 + q_6 = 45 + 50 = 95 < 200$

Oba uslova su zadovoljena, formiramo novu rutu (0-5-6-0).

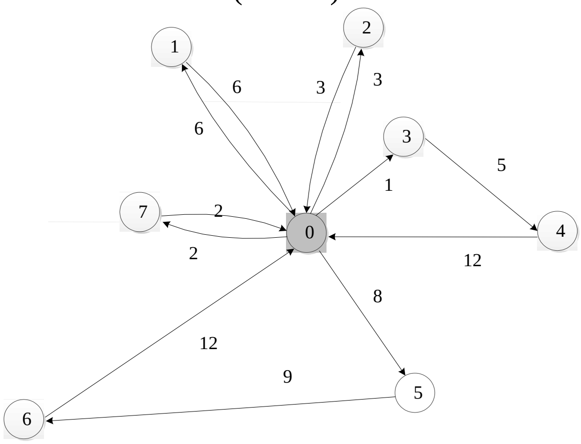


Slika 3a.

2. $S_{34} = 8$, čvor 3 je prvi u ruti (0-3-0) (ne uzimamo u obzir depo), a čvor 4 je takođe prvi u ruti (0-4-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_3 + q_4 = 25 + 70 = 95 < 200$

Oba uslova su zadovoljena, formiramo novu rutu (0-3-4-0).

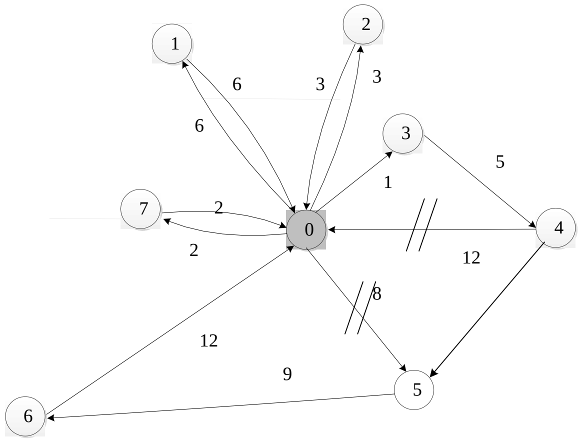


Slika 3b.

3. $S_{45} = 6$, čvor 4 je poslednji u ruti (0-3-4-0), a čvor 5 je prvi u ruti (0-5-6-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 190 < 200$

Oba uslova su zadovoljena, formiramo novu rutu (0-3-4-5-6-0); ovom vezom spajaju se rute (0-5-6-0) i (0-3-4-0). Nakon spajanja ove dve rute, precrtavamo grane (4,0) i (0,5).



Slika 3c.

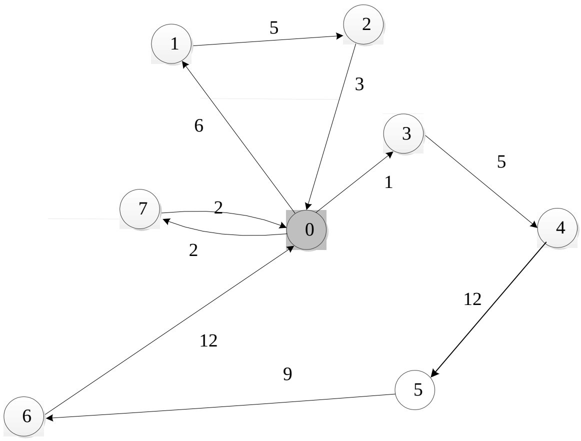
4. $S_{67} = 6$, čvor 6 je poslednji u ruti (0-3-4-5-6-0), a čvor 7 je prvi u ruti (0-7-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 = 190 + 100 = 390 > 200$ => nedopustiva ruta, tražnja je veća od kapaciteta vozila; ušteda S_{67} se ne može iskoristiti.

5. $S_{12} = 4$, čvor 1 je prvi u ruti (0-1-0), a čvor 2 je takođe prvi u ruti (0-2-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_1 + q_2 = 40 + 20 = 60 < 200$

Oba uslova su zadovoljena, formiramo novu rutu (0-1-2-0).

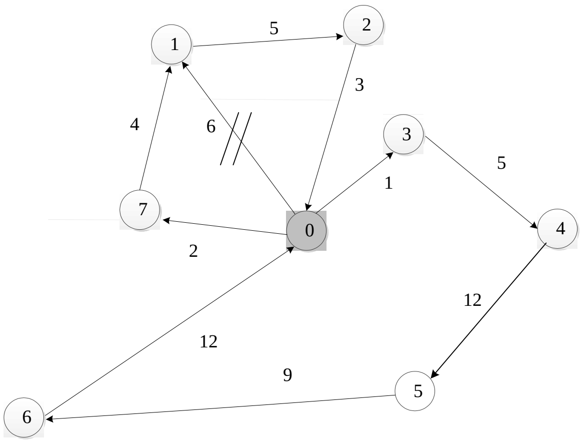


Slika 3d.

6. $S_{17} = 4$, čvor 1 je prvi u ruti (0-1-2-0), a čvor 7 je poslednji (i prvi i poslednji) u ruti (0-7-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_1 + q_2 + q_7 = 40 + 20 + 100 = 160 < 200$

Oba uslova su zadovoljena, formiramo novu rutu (0-7-1-2-0); ovom vezom spajaju se rute (0-1-2-0) i (0-7-0). Nakon spajanja ove dve rute, precrtava se grana (0,1).



Slika 3e.

7. $S_{23} = 2$, čvor 2 je poslednji u ruti (0-7-1-2-0), a čvor 3 je prvi u ruti (0-3-4-5-6-0). Sada proveravamo uslov za kapacitet:

$q_7 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 100 + 40 + 20 + 25 + 70 + 45 + 60 = 360 > 200$

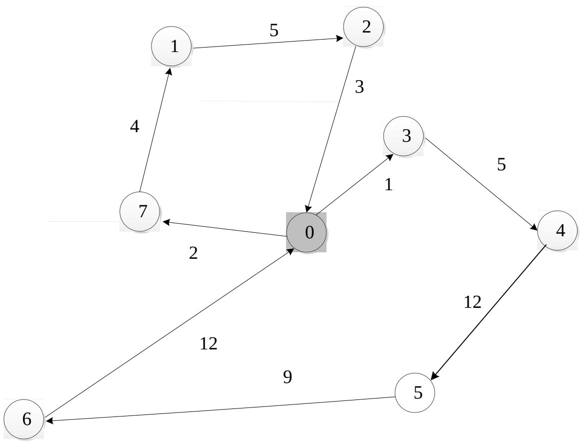
Ova ruta je nedopustiva, tražnja je veća od kapaciteta vozila; ušteda S_{23} se ne može iskoristiti.

8. $S_{57} = 1$, čvor 5 nije ni prvi ni poslednji u ruti (0-3-4-5-6-0), tako da se ova ruta ne može formirati; ušteda S_{57} se ne može iskoristiti.

Dobili smo konačno rešenje (slika 4) potrebno je da izračunamo dužinu puta koju vozilo treba da pređe:

$f^* = 2\,c_{01} + 2\,c_{02} + 2\,c_{03} + 2\,c_{04} + 2\,c_{05} + 2\,c_{06} + 2\,c_{07} - S_{56} - S_{34} - S_{45} - S_{12} - S_{17}$

$f^* = 88 - 33 = 55$



Slika 4.

Zadatak se može rešiti i na sledeći način (izbegavajući detaljno pisanje svakog koraka):

0-1-0 (40)
0-2-0 (20) } 60 } 0-1-2-0 (60)

0-3-0 (25)
0-4-0 (70) } 95 } 0-3-4-0 (95)

0-5-0 (45)
0-6-0 (50) } 90 } 0-5-6-0 (95)

0-3-4-0 (95), 0-5-6-0 (95) } 0-3-4-5-6-0 (185)

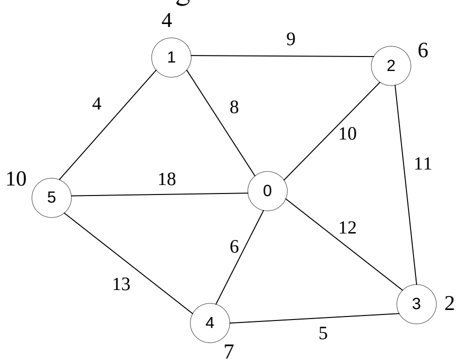
0-7-0 (100)

0-1-2-0 (60), 0-7-0 (100) } 0-7-1-2-0 (160)

<u>Za vežbu</u>:

***** Rešiti primer 1 uz uslov da firma može koristiti samo automobile nosivosti 100 kutija (firma ima 10 ovakvih automobila, a svaki automobil vozi najviše jednu rutu).
***** Rešiti primer 1 uz uslov da firma može koristiti samo jedan kamion nosivosti 330 kutija, a kamion može voziti više ruta.

Primer 2. Raznosač novina mora da isporuči dnevnu štampu od izdavačke kuće do 5 trafika. Prevozno sredstvo kojim raspolaže omogućava mu da odjednom ponese najviše 12 paketa novina. Na slici 5 je data skica rasporeda izdavačke kuće (označena sa 0) i trafika (označene sa 1-5), njihova udaljenost i količina novina koju potražuje svaka od njih. Primenom algoritma ušteda odrediti optimalnu rutu raznosača.



Slika 5.

Rešenje:

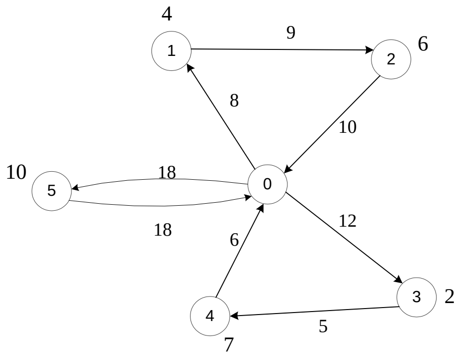
Sortirana lista mogućih ušteda:

$S_{51} = 22$
$S_{34} = 13$
$S_{45} = 11$
$S_{23} = 11$
$S_{12} = 9$

0-1-0 (4)
0-2-0 (6)
0-1-2-0 (10)

0-3-0 (2)
0-4-0 (7)
0-3-4-0 (9)

0-5-0 (10)



Slika 6.

Za vežbu:

***** Rešiti primer 2 uz uslov da raznosač novina ne može koristiti put od izdavačke kuće do trafike 1.

Primer 3. Deca iz vrtića "Sreća Sreća Radost" otišla su na kampovanje na planinu Taru. Tamo su se podelili u 9 grupa i svaka grupa dece dobila je zadatak da oformi mali kamp (kampovi su označeni brojevima od 1-9) u blizini hotela (označen je 0). Udaljenosti između hotela i kampova i udaljenosti između samih kampova dati su u tabeli. Nakon što su deca otišla da postave kampove, koordinator kampovanja Mića shvatio je da su zaboravili da ponesu lanč pakete. Pošto su deca imala puno posla oko podizanja šatora, Mića će im svima odneti lanč pakete. Međutim, on može da ponese odjednom 50 paketa, tako da je odlučio da primeni svoje znanje sa FONa i da izračuna optimalne rute kako bi što manje pešačio i na taj način posao obavio što brže. Koje rešenje je dobio Mića?
*napomena - između kampova 1 i 9 nalazi se potočić i Mića ne može da ga pređe, jer nema odgovarajuću opremu.

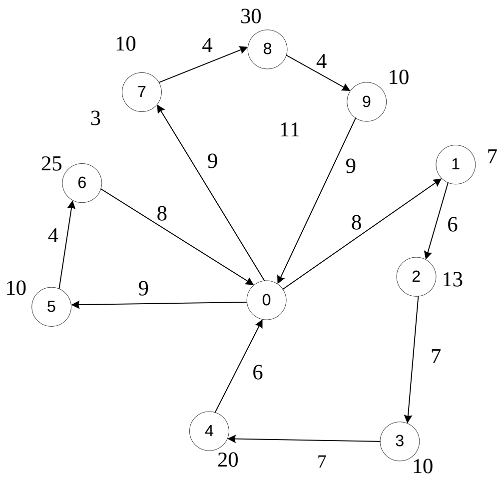
Udaljenost	Hotel	Kamp 1	Kamp 2	Kamp 3	Kamp 4	Kamp 5	Kamp 6	Kamp 7	Kamp 8	Kamp 9
Hotel	/	8	4	8	6	9	8	9	11	9
Kamp 1		/	6	/	/	/	/	/	/	/
Kamp 2			/	7	/	/	/	/	/	/
Kamp 3				/	7	/	/	/	/	/
Kamp 4					/	8	/	/	/	/
Kamp 5						/	4	/	21	20
Kamp 6							/	3	/	/
Kamp 7								/	4	/
Kamp 8									/	4
Kamp 9										/
Broj dece u kampovima		7	13	10	20	10	25	10	30	10

Rešenje:

Sortirana lista mogućih ušteda:

$S_{78} = 16$
$S_{89} = 16$
$S_{67} = 14$
$S_{56} = 13$
$S_{34} = 7$
$S_{45} = 7$
$S_{23} = 5$
$S_{12} = 6$

0-1-0 (7)				
	20	0-1-2-0 (20)		
0-2-0 (13)			50	0-1-2-3-4-0 (50)
0-3-0 (10)				
	30	0-3-4-0 (30)		
0-4-0 (20)				
0-5-0 (10)				
	35	0-5-6-0 (35)		
0-6-0 (25)				
0-7-0 (10)				
	40	0-7-8-0 (40)		
0-8-0 (30)			50	0-7-8-9-0 (50)
0-9-0 (10)		0-9-0 (10)		



Slika 7.

Za vežbu: uraditi primer 3 uz uslov da Mića može da ponese 40 paketića.