Problem najkraćeg puta - zadaci

Neka je dat graf $G = (N, L)$ i neka su granama pridružene vrednosti c_{ij}, $(i, j) \in L$. Vrednosti c_{ij} mogu predstavljati dužine, težine, cene, pouzdanost itd. Ove vrednosti mogu biti i negativne ali ovde se takve primene neće razmatrati. U nastavku će se koristiti termin dužina a podrazumevaće se da c_{ij} može imati i drugačiju interpretaciju.

Potrebno je naći najkraći put između zadatih čvorova s i t. *Put* između zadatih čvorova s i t definiše se kao niz grana od kojih prva polazi iz čvora s, svaka sledeća grana u nizu počinje u onom čvoru u kojem se završava prethodna, a poslednja se završava u čvoru t:

$$[(s, i_1), (i_1, i_2), \dots , (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)]$$

Alternativno, put može da se definiše kao niz čvorova kroz koje prolazi: $(s, i_1, i_2, \dots , i_{k-1}, i_k, t)$

Dužina puta se definiše kao zbir dužina grana koje pripadaju putu. Najkraći put između čvorova s i t je put najmanje dužine.

Za nalaženje najkraćih puteva kroz mrežu od interesa su samo elementarni putevi. *Elementarni put* je put koji kroz svaki čvor grafa prolazi najviše jedanput.

Dajkstrin algoritam

Pored prethodno uvedene notacije, uvodi se i obeležje ili oznaka $d(j)$ čvora j koje može biti privremeno (promenljivo) i piše se $d^-(j)$ ili stalno (nepromenljivo), kada se piše $d^+(j)$. Stalno obeležje $d^+(j)$ čvora j predstavlja dužinu najkraćeg puta od početnog do čvora j.

Algoritam

1° Inicijalizacija
Čvorovima se dodeljuju početna obeležja na sledeći način:
- početnom čvoru s dodeljuje se stalno obeležje $d^+(s) = 0$;
- svim ostalim čvorovima dodeljuju se privremena obeležja $d^-(j) = \infty$, $j \in N \setminus \{s\}$;
- stavimo da je $i = s$.

2° Odrediti skup A_i čvorova koji slede čvor i i koji nemaju stalno obeležje ($\Gamma(i)$ je skup čvorova sledbenika čvora i)

$$A_i = \{j \mid j \in \Gamma(i) \wedge d(j) = d^-(j)\}.$$

3° Za svako $j \in A_i$ odrediti nova privremena obeležja

$$d^-(j) = \min\{d^-(j), d^+(i) + c_{ij}\}$$

4° Od svih čvorova na mreži koji su obeleženi privremenim obeležjem, samo jedan j^* dobija stalno obeležje i to onaj za koji je

$$d^-(j^*) = \min_{j \in N}\{d^-(j)\},$$

pa je $d^+(j^*) = d^-(j^*)$.

5° Proveriti da li je $j^* = t$, tj. da li je završni čvor obeležen stalnim obeležjem.
Ako nije, staviti $i = j^*$ i vratiti se na korak 2°.
Ako jeste, određena je dužina najkraćeg puta $d^+(t)$ i sada treba rekonstruisati najkraći put kojim se od s stiglo do t.

6° Najkraći put $p= (s, j_1, j_2, \dots , j_k, t)$ određujemo vraćajući se unazad od čvora t ka čvoru s:

$$t \rightarrow j_k \rightarrow j_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow s,$$

tako da važi:

j_k : $\quad d^+(t) - d^+(j_k) = c_{j_k t}$

$j_{k\text{-}1}$: $\quad d^+(j_k) - d^+(j_{k-1}) = c_{j_{k-1} j_k}$

. $\quad$ . . $\quad$. $\quad$.

s : $\quad d^+(j_1) - d^+(s) = c_{sj_1}$

Jasno je da važi: $\quad d^+(t) = c_{sj_1} + c_{j_1 j_2} + \ldots + c_{j_{k-a} j_k} + c_{j_k t}$

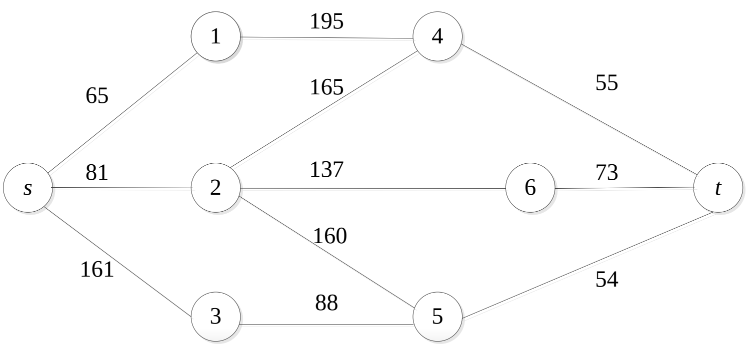
Napomena: Poslednji korak algoritma, određivanje najkraćeg puta, pojednostavljuje se ako se u koraku 4°, pored stalnog obeležja, zapamti i indeks čvora koji prethodi posmatranom čvoru i na osnovu kojeg je dobijeno to obeležje.

Primer 1. Na mapi je prikazana putna mreža istočne Srbije a udaljenosti u km između gradova preko kojih se može putovati i koji su povezani putevima su date matricom udaljenosti (oznaka *M* znači da dva grada nisu povezana putem). Vrstama i kolonama matrice udaljenosti odgovaraju, redom, sledeći gradovi: Beograd, Smederevo, Požarevac, Paraćin, Kladovo, Zaječar, Bor i Negotin.

$$
\begin{bmatrix}
0 & 65 & 81 & 161 & M & M & M & M \\
65 & 0 & M & M & 195 & M & M & M \\
81 & M & 0 & M & 165 & 160 & 137 & M \\
161 & M & M & 0 & M & 88 & M & M \\
M & 195 & 165 & M & 0 & M & M & 55 \\
M & M & 160 & 88 & M & 0 & M & 54 \\
M & M & 137 & M & M & M & 0 & 73 \\
M & M & M & M & 55 & 54 & 73 & 0
\end{bmatrix}
$$

Potrebno je odrediti najkraći put od Beograda do Negotina.

Rešenje: Na osnovu datih podataka je moguće formirati graf u kome početni čvor *s* predstavlja grad Beograd a krajnji čvor *t* grad Negotin. Gradovi: Smederevo, Požarevac, Paraćin, Kladovo, Zaječar i Bor su označeni čvorovima 1, 2, 3, 4, 5 i 6, respektivno. Udaljenosti između gradova (c_{ij}) su prikazane na granama.



$G = (N, L)$, $N=\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, t\}$,
$L=\{(s,1), (s,2), (s,3), (1,4), (2,4), (2,5), (2,6), (3,5), (4,t), (5,6), (5,t), (6,t)\}$

Algoritam

1° Inicijalizacija
- početnom čvoru *s* dodeljuje se stalno obeležje $d^+(s) = 0$;

- svim ostalim čvorovima dodeljuju se privremena obeležja:
$d^-(1) = d^-(2) = d^-(3) = d^-(4) = d^-(5) = d^-(6) = d^-(t) = \infty$;
- stavimo da je $i = s$.

2° Čvor s slede čvorovi: 1, 2 i 3, $A_s = \{1, 2, 3\}$

3° Za svako $j \in A_s$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(1) = \min\{\infty, 0+65\} = 65$

$d^-(2) = \min\{\infty, 0+81\} = 81$

$d^-(3) = \min\{\infty, 0+161\} = 161$

4° $\min\{d^-(1), d^-(2), d^-(3)\} = \min\{65, 81, 161\}= d^-(1) = 65 \Rightarrow d^+(1) = d^-(1), j^*=1$

5° $j^* \neq t, \quad i=1$

2° Čvor 1 sledi čvor: 4, $A_1 = \{4\}$

3° Za svako $j \in A_1$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(4) = \min\{\infty, 65+195\} = 260$

4° $\min\{ d^-(2), d^-(3), d^-(4)\} = \min\{ 81, 161, 260\} =d^-(2) = 81 \Rightarrow d^+(2) = d^-(2), \ j^*=2$

5° $j^* \neq t, \quad i=2$

2° Čvor 2 slede čvorovi: 4, 5 i 6. $A_2 = \{4, 5, 6\}$

3° Za svako $j \in A_2$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(4) = \min\{260, 81+165\} = 246$

$d^-(5) = \min\{\infty, 81+160\} = 241$

$d^-(6) = \min\{\infty, 81+137\} = 218$

4° $\min\{ d^-(3), d^-(4), d^-(5), d^-(6)\} = \min\{ 161, 246, 241,218\} =d^-(3) = 161 \Rightarrow d^+(3) = d^-(3), \ j^*=3$

5° $j^* \neq t, \quad i=3$

2° Čvor 3 sledi čvor: 5. $A_3 = \{5\}$

3° Za svako $j \in A_3$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(5) = \min\{241, 161+88\} = 241$

4° $\min\{ d^-(4), d^-(5), d^-(6)\} = \min\{ 246, 241,218\} =d^-(6) = 218 \Rightarrow d^+(6) = d^-(6), \ j^*=6$

5° $j^* \neq t, \quad i=6$

2° Čvor 6 sledi čvor: t. $A_3 = \{t\}$

3° Za svako $j \in A_6$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(t) = \min\{\infty, 218+73\} = 291$

4° $\min\{ d^-(4), d^-(5), t\} = \min\{ 246, 241,291\} =d^-(5) = 241 \Rightarrow d^+(5) = d^-(5), \ j^*=5$

5° $j^* \neq t, \quad i=5$

2° Čvor 5 sledi čvor: t. $A_5 = \{t\}$

3° Za svako $j \in A_5$ određuju se nova privremena obeležja:

$d^-(t) = \min\{291, 241+54\} = 291$

4° $\min\{ d^-(4), t\} = \min\{ 246, 291\} =d^-(4) = 246 \Rightarrow d^+(4) = d^-(4), \ j^*=4$

5° $j^* \neq t, \quad i=4$

2° Čvor 4 sledi čvor: t. $A_4 = \{t\}$

3^o Za svako $j \in A_4$ određuju se nova privremena obeležja:

$$d^-(t) = \min\{291, 246+55\} = 291$$

4^o $\min\{\ t\} = \min\{\ 291\} = d^-(t) = 291 \Rightarrow d^+(t) = d^-(t),\ j^* = t$

5^o $j^* = t$

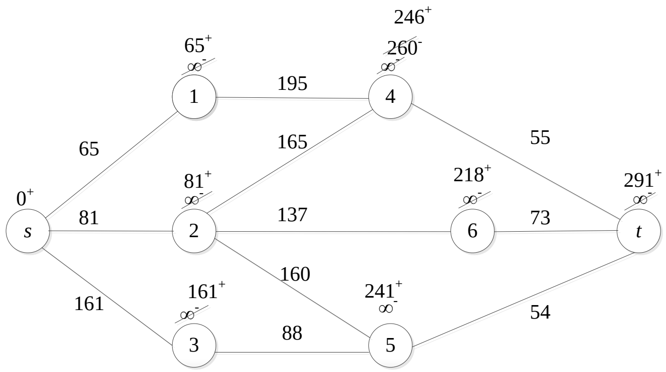
6^o Određivanje najkraćeg puta:

$$d^+(t) - d^+(6) = 291 - 73 = 218$$
$$d^+(6) - d^+(2) = 218 - 137 = 81$$
$$d^+(2) - d^+(s) = 81 - 81 = 0$$

Najkraći put $p = (s, j_1, j_2, \ldots, j_k, t)$ određujemo vraćajući se unazad od čvora t ka čvoru s:
$t \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow s$,

Najkraći put od Beograda do Negotina iznosi 291km ako se putuje preko Smedereva i Bora.

U nastavku će isti problem biti rešen unošenjem oznaka na samu mrežu, vodeći računa o redosledu dodeljivanja ovih vrednosti.



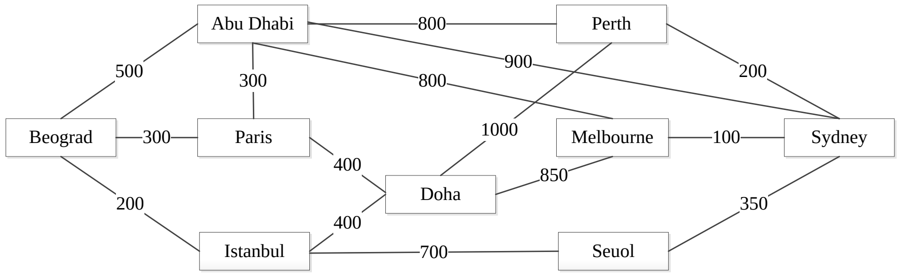
Redosled kojim su čvorovi dobijali stalna obeležja:

- $d^+(s) = 0$;
- $d^+(1) = 65$;
- $d^+(2) = 81$;
- $d^+(3) = 161$;
- $d^+(6) = 218$;
- $d^+(5) = 241$;
- $d^+(4) = 246$;
- $d^+(t) = 291$.

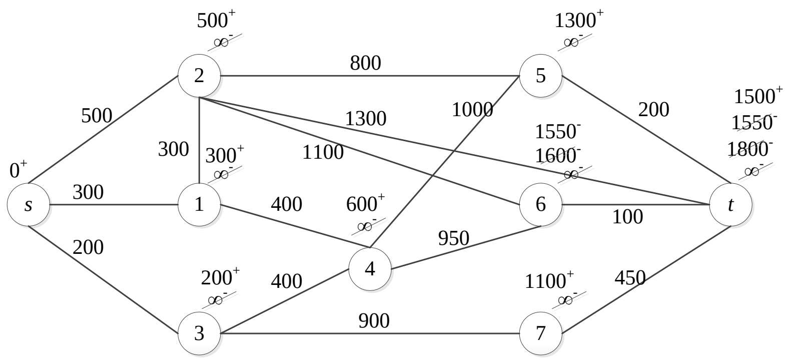
Za vežbu: Odrediti put kojim se najbrže stiže od Beograda do Negotina. Vreme puta između gradova u minutima dato je u sledećoj matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 75 & 80 & 115 & M & M & M & M \\ 75 & 0 & M & M & 337 & M & M & M \\ 80 & M & 0 & M & 195 & 164 & 205 & M \\ 115 & M & M & 0 & M & 87 & M & M \\ M & 337 & 195 & M & 0 & M & M & 57 \\ M & M & 164 & 87 & M & 0 & M & 60 \\ M & M & 205 & M & M & M & 0 & 82 \\ M & M & M & M & 57 & 60 & 82 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 2: Kako najjeftinije leteti od Srbije do Australije? Ovaj put se može izvesti sa najmanje dva presedanja. Na slici su prikazani gradovi u kojima su aerodrome na kojima se može presedati i cene pojedinačnih letova u dolarima.



Rešenje:



Redosled kojim su čvorovi dobijali stalna obeležja:

- $d^+(s) = 0$;
- $d^+(3) = 200$;
- $d^+(1) = 300$;
- $d^+(2) = 500$;
- $d^+(4) = 600$;
- $d^+(7) = 1100$;
- $d^+(5) = 1300$;
- $d^+(t) = 1500$.

Određivanje najkraćeg puta:

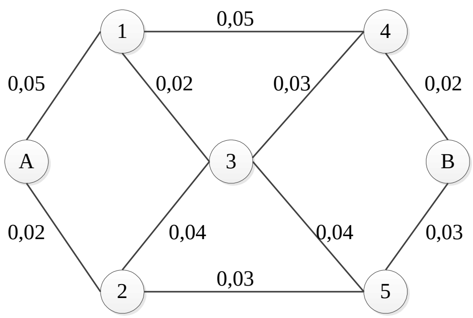
$$d^+(t) - d^+(5) = 1500 - 200 = 1300$$

$$d^+(5) - d^+(2) = 1300 - 800 = 500$$

$$d^+(2) - d^+(s) = 500 - 500 = 0$$

Najjeftiniji let od Beograda do Sidneja košta 1500km ako se leti preko Perta i Abu Dabija.

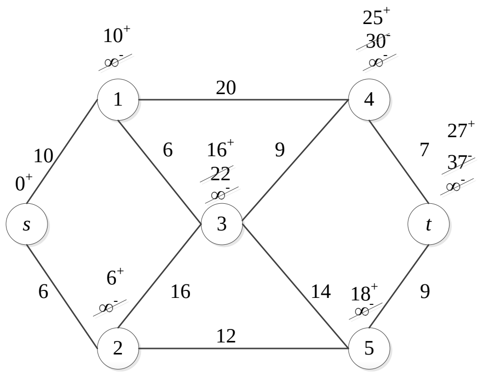
Primer 3: Trgovac električnom energijom je na berzi ugovorio prodaju 70MWh kupcu B po ceni od 30nj/MWh koje je otkupio po ceni od 20€/MWh od prodavca A. Prenos električne energije treba da se izvrši u toku jednog dana a trgovac mora da obezbedi i plati transmisione kapacitete za prenos. Na mreži na slici su prikazani posrednici preko kojih može da se prenese električna energija i transmisioni kapaciteti koji ih povezuju. Na granama su prikazane jedinične cene u nj/km a udaljenost između čvorova je data u matrici udaljenosti.



$$\begin{bmatrix} 0 & 200 & 300 & M & M & M & M \\ & 0 & M & 300 & 400 & M & M \\ & & 0 & 400 & M & 400 & M \\ & & & 0 & 300 & 350 & M \\ & & & & 0 & M & 350 \\ & & & & & 0 & 300 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Kojim transmisionim kapacitetima je najjeftinije preneti električnu energiju? Kolika je u tom slučaju prosečna cena po kojoj trgovac električnom energijom vrši prenos a koliki je njegov ukupan profit? Formulisati problem kao problem nalaženja najkraćeg puta.

Rešenje:



Redosled kojim su čvorovi dobijali stalna obeležja:

- $d^+(s) = 0$;
- $d^+(2) = 6$;
- $d^+(1) = 10$;
- $d^+(3) = 16$;
- $d^+(5) = 18$;
- $d^+(4) = 25$;
- $d^+(t) = 27$.

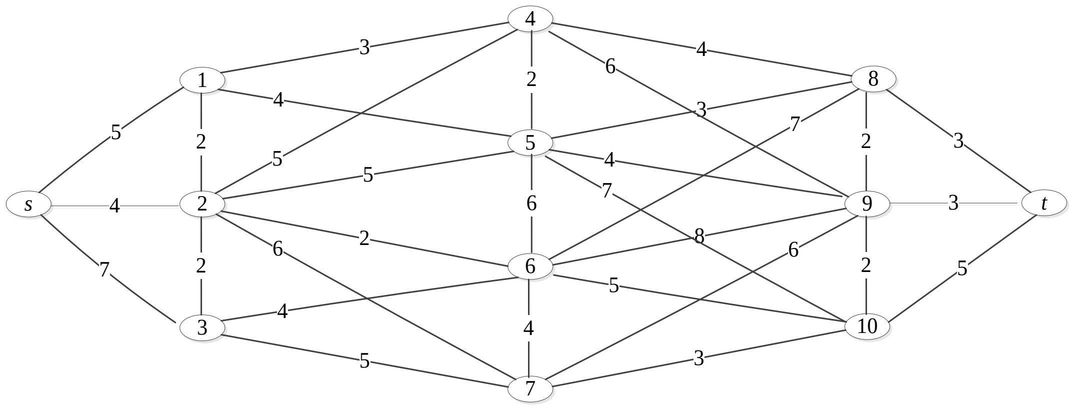
Određivanje najkraćeg puta:

$$d^+(t) - d^+(5) = 27 - 9 = 18$$

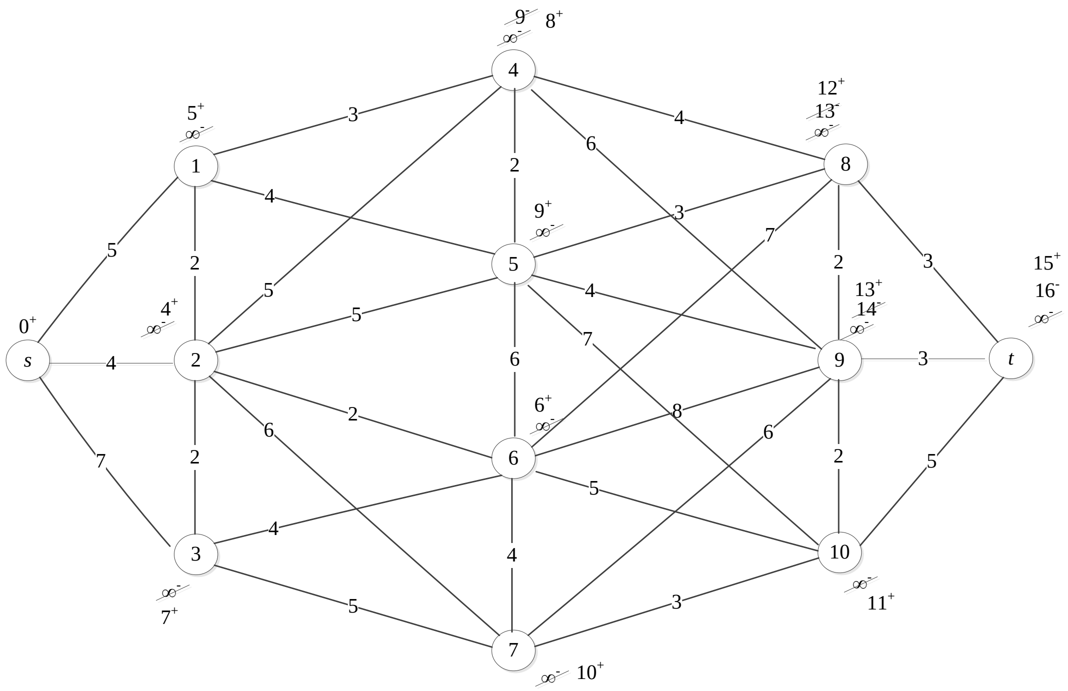
$$d^+(5) - d^+(2) = 18 - 12 = 6$$

$$d^+(2) - d^+(s) = 6 - 6 = 0$$

Primer 4: Između IP adrese pošiljaoca (s) i IP adrese primaoca (t) je potrebno uspostaviti saobraćaj. Saobraćaj se može uspostaviti preko mreže rutera koja je prikazana na slici. Između IP adresa i rutera kao i između samih rutera postoji kašnjenje u prenosu paketa. Ovo kašnjenje u milisekundama je prikazano na granama. Potrebno je odrediti preko kojih rutera će se uspostaviti saobraćaj tako da ukupno kašnjenje u prenosu paketa od IP adrese pošiljaoca do IP adrese primaoca bude minimalno.



Rešenje:



Redosled kojim su čvorovi dobijali stalna obeležja:

$d^+(s) = 0$; $d^+(2) = 4$; $d^+(1) = 5$; $d^+(6) = 6$; $d^+(3) = 7$; $d^+(4) = 8$; $d^+(5) = 9$; $d^+(7) = 10$; $d^+(10) = 11$; $d^+(8) = 12$; $d^+(9) = 13$; $d^+(t) = 15$.

Određivanje najkraćeg puta:

$$d^+(t) - d^+(8) = 15 - 3 = 12$$

$$d^+(8) - d^+(4) = 12 - 4 = 8$$

$$d^+(4) - d^+(1) = 8 - 3 = 5$$

$$d^+(1) - d^+(s) = 5 - 5 = 0$$

Najkraći put: $s \to 1 \to 4 \to 8 \to t$.

Najmanje ukupno kašnjenje u prenosu paketa iznosi 15 milisekundi. Saobraćaj treba uspostaviti preko rutera 1, 4 i 8.