Kombinatorna optimizacija
– GRAFOVI I MREŽE –

Milan Stanojević

Laboratorija za operaciona istraživanja „Jovan Petrić"
Fakultet organizacionih nauka, Beograd

Sadržaj predavanja

Sadržaj predavanja

Graf

- Graf je formalan, ali svestran alat matematičkog modeliranja.
- Veliki broj realnih sistema se mogu modelirati pomoću grafa.
- Na primer:
  - Svi tipovi mreža: putne, energetske, telekomunikacione, vodovodi, gasovodi, ...
  - VLST (mikročipovi, elektronski uređaji, ...)
  - Odnosi i uticaji između entiteta, ...

Definicije

Definicija grafa

Graf je uređen par (V, E), gde su:

- V – **skup** čvorova (*eng. Vertices*) (npr. $V = \{1, 2, \ldots, v\}$),
- $E \subseteq \{(i, j) \,|\, i \in V, j \in V\}$ – **skup** grana (*eng. Edges*).

Definicije

Definicija grafa

Graf je uređen par (V, E), gde su:

- V – **skup** čvorova (*eng. Vertices*) (npr. $V = \{1, 2, \ldots, v\}$),
- $E \subseteq \{(i,j) \,|\, i \in V, j \in V\}$ – **skup** grana (*eng. Edges*).

Definicije

Definicija grafa

Graf je uređen par (V, E), gde su:

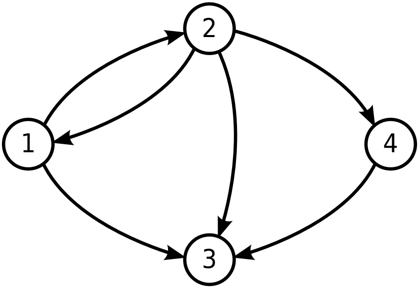
- V – **skup** čvorova (*eng. Vertices*) (npr. $V = \{1, 2, \ldots, v\}$),
- $E \subseteq \{(i, j) \,|\, i \in V, j \in V\}$ – **skup** grana (*eng. Edges*).

Grafička prezentacija grafa

Graf $G = (V, E)$ gde su, na primer:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1,2), (2,1), (1,3), (2,3), (2,4), (4,3)\}$

možemo predstaviti grafički:



Definicije

Usmereni/neusmereni grafovi

- Ako za neki graf $G = (V, E)$, za svaku granu $(i, j) \in E$ važi da postoji i grana $(j, i) \in E$, tada takve grafove zovemo **neusmereni**.

- Alternativno, za ovakve grafove možemo definisati skup grana:

$$E \subseteq \{\{i, j\} \,|\, i \in V, j \in V\}.$$

- Grafovi za koje ova osobina ne važi, zovu se **usmereni**.

Definicije

Usmereni/neusmereni grafovi

- Ako za neki graf $G = (V, E)$, za svaku granu $(i, j) \in E$ važi da postoji i grana $(j, i) \in E$, tada takve grafove zovemo **neusmereni**.
- Alternativno, za ovakve grafove možemo definisati skup grana:

$$E \subseteq \{\{i, j\} \,|\, i \in V, j \in V\}.$$

- Grafovi za koje ova osobina ne važi, zovu se **usmereni**.

Definicije

Usmereni/neusmereni grafovi

- Ako za neki graf $G = (V, E)$, za svaku granu $(i, j) \in E$ važi da postoji i grana $(j, i) \in E$, tada takve grafove zovemo **neusmereni**.

- Alternativno, za ovakve grafove možemo definisati skup grana:

$$E \subseteq \{\{i, j\} \,|\, i \in V, j \in V\}.$$

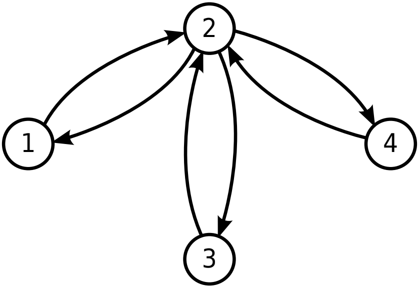
- Grafovi za koje ova osobina ne važi, zovu se **usmereni**.

Grafička prezentacija neusmerenog grafa

Graf $G = (V, E)$ gde su, na primer:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2)\}$

možemo predstaviti grafički na standardan način:

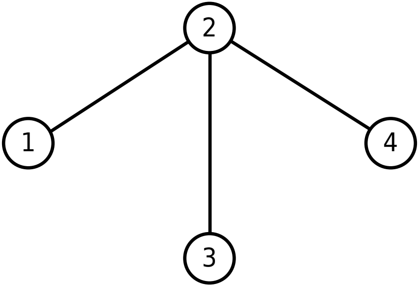


Grafička prezentacija neusmerenog grafa

Isti graf $G = (V, E)$ se može definisati drugačije:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$

i grafički se predstaviti jednostavnije:



Definicije

Čvorovi i grane usmerenog grafa

Ako postoji grana $e = (i, j) \in E$ **usmerenog** grafa $G = (V, E)$, tada kažemo:

- Grana e **polazi** iz čvora i i **završava** u čvoru j,
- Ako grana e_2 polazi iz istog čvora u kome grana e_1 završava, tada grana e_2 **sledi** granu e_1,
- Broj grana koji završava u nekom čvoru i zove se **ulazni stepen čvora** i,
- Broj grana koji polazi iz nekog čvora i zove se **izlazni stepen čvora** i.

Definicije

Čvorovi i grane neusmerenog grafa

Ako postoji grana $e = \{i, j\} \in E$ **neusmerenog** grafa $G = (V, E)$, tada kažemo:

- Čvorovi i i j su **susedni** i predstavljaju **krajnje tačke** grane e,
- Čvor i i grana e su **incidentni** ako $i \in e$,
- Dve grane e_1 i e_2 su **susedne** ako su incidentne sa istim čvorom,
- Broj grana koje su incidentne nekom čvoru i zove se **stepen čvora** i.

Definicije

Sledeći i prethodni čvorovi

- Skup čvorova koji slede čvor i se označava $\Gamma(i) = \{j | (i, j) \in E\}$,
- Skup čvorova koji prethode čvoru j se označava $\Gamma^{-1}(j) = \{i | (i, j) \in E\}$.

Primer:

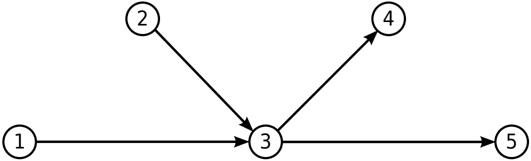
Za prikazani graf: $\Gamma(3) = \{4, 5\}$, $\Gamma^{-1}(3) = \{1, 2\}$

Definicije

Sledeći i prethodni čvorovi

- Skup čvorova koji slede čvor i se označava $\Gamma(i) = \{j | (i,j) \in E\}$,
- Skup čvorova koji prethode čvoru j se označava $\Gamma^{-1}(j) = \{i | (i,j) \in E\}$.

Primer:



Za prikazani graf: $\Gamma(3) = \{4, 5\}$, $\Gamma^{-1}(3) = \{1, 2\}$

Definicije

Potpun graf

Za graf $G = (V, E)$ se kaže da je **potpun** ako $\forall i, j \in V, i \neq j, \exists (i, j) \in E$.

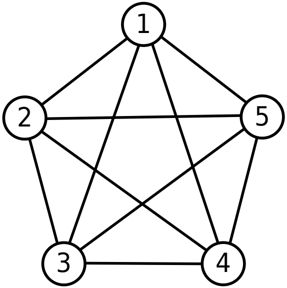
Primer:

Definicije

Potpun graf

Za graf $G = (V, E)$ se kaže da je **potpun** ako $\forall i, j \in V, i \neq j, \exists (i, j) \in E$.

Primer:



Definicije

Put

Put između dva zadata čvora s i t, $s, t \in V$ je **niz grana** za koje važi:

- Prva grana polazi iz čvora s,
- Svaka sledeća grana sledi prethodnu granu iz niza (je susedna prethodnoj grani – ako je graf neusmeren),
- Poslednja grana završava u čvoru t.

Primer:

$$((s,1),(1,4),(4,8),(8,3),(3,t))$$

Alternativno, put se može predstaviti nizom čvorova:

$$(s,1,4,8,3,t)$$

Definicije

Put

Put između dva zadata čvora s i t, $s, t \in V$ je **niz grana** za koje važi:

- Prva grana polazi iz čvora s,
- Svaka sledeća grana sledi prethodnu granu iz niza (je susedna prethodnoj grani – ako je graf neusmeren),
- Poslednja grana završava u čvoru t.

Primer:

$$((s,1),(1,4),(4,8),(8,3),(3,t))$$

Alternativno, put se može predstaviti nizom čvorova:

$$(s,1,4,8,3,t)$$

Definicije

Put

Put između dva zadata čvora s i t, $s, t \in V$ je **niz grana** za koje važi:

- Prva grana polazi iz čvora s,
- Svaka sledeća grana sledi prethodnu granu iz niza (je susedna prethodnoj grani – ako je graf neusmeren),
- Poslednja grana završava u čvoru t.

Primer:

$$((s,1),(1,4),(4,8),(8,3),(3,t))$$

Alternativno, put se može predstaviti nizom čvorova:

$$(s,1,4,8,3,t)$$

Definicije

Elementarni put

Elementarni put je onaj put koji kroz sve čvorove prolazi najviše jednom.

Primer:

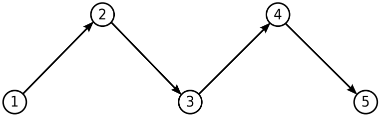
- Put $(1, 2, 3, 4, 5)$ je **elementaran**.
- Put $(1, 3, 4, 2, 3, 5)$ **nije elementaran** pošto kroz čvor 3 prolazi dva puta.

Definicije

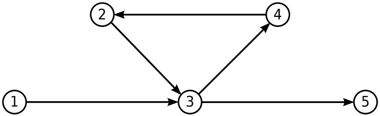
Elementarni put

Elementarni put je onaj put koji kroz sve čvorove prolazi najviše jednom.

Primer:



- Put $(1, 2, 3, 4, 5)$ je **elementaran**.



- Put $(1, 3, 4, 2, 3, 5)$ **nije elementaran** pošto kroz čvor 3 prolazi dva puta.

Definicije

Kontura

Kontura je elementarni put koji počinje i završava u istom čvoru.

Primer:

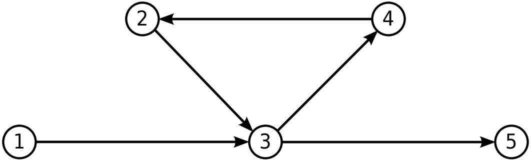
- Put $(2, 3, 4, 2)$ je kontura.
- Putevi $(3, 4, 2, 3)$ i $(4, 2, 3, 4)$ predstavljaju istu konturu.

Definicije

Kontura

Kontura je elementarni put koji počinje i završava u istom čvoru.

Primer:



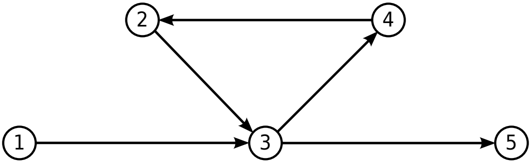
- Put $(2, 3, 4, 2)$ je kontura.
- Putevi $(3, 4, 2, 3)$ i $(4, 2, 3, 4)$ predstavljaju istu konturu.

Definicije

Kontura

Kontura je elementarni put koji počinje i završava u istom čvoru.

Primer:



- Put $(2, 3, 4, 2)$ je kontura.
- Putevi $(3, 4, 2, 3)$ i $(4, 2, 3, 4)$ predstavljaju istu konturu.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf

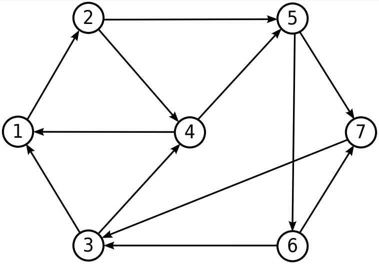
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf



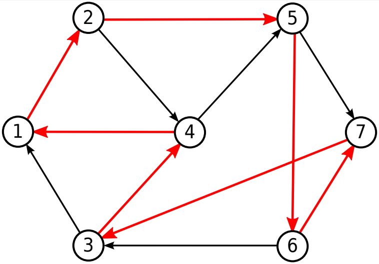
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf



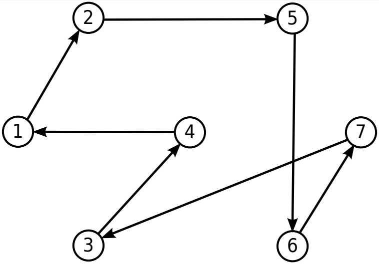
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf



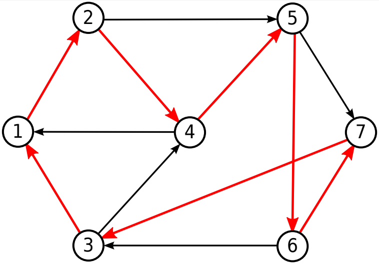
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf



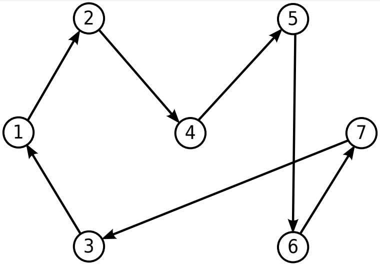
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

Hamiltonova kontura

Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz sve čvorove nekog grafa.

Primer: Za graf



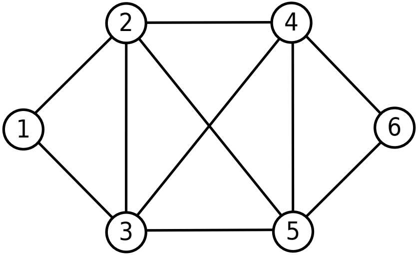
- Put $(1, 2, 5, 6, 7, 3, 4, 1)$ je jedna Hamiltonova kontura zadatog grafa.
- Na primer, put $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 1)$ je takođe jedna Hamiltonova kontura.

Definicije

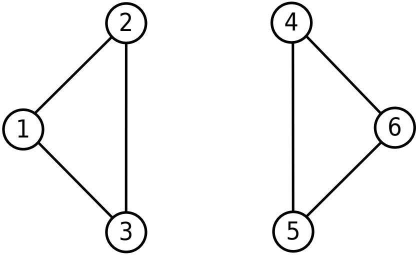
Povezan graf

- **Neusmeren** graf je **povezan**, ako za svaka dva čvora $i, j \in V$ postoji put koji ih povezuje.
- **Usmeren** graf je **povezan**, ako za svaka dva čvora $i, j \in V$ postoji put koji ih povezuje, pri čemu se usmerenja grana zanemaruju.
- U slučaju da nije povezan, za graf kažemo da je **nepovezan**.

Primer povezan / nepovezan graf



Povezan graf



Nepovezan graf

Definicije

Presek grafa (neprecizna definicija)

Presek grafa je **skup grana** čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan.

Presek grafa (precizna definicija)

Za **neusmeren** graf $G = (V, E)$ i zadati podskup čvorova $W \subset V$, presek grafa $\delta(W)$ je podskup grana takvih da im je jedan čvor u skupu W, a drugi u skupu $V \setminus W$. Drugim rečima

$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}.$$

Definicije

Presek grafa (neprecizna definicija)

Presek grafa je **skup grana** čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan.

Presek grafa (precizna definicija)

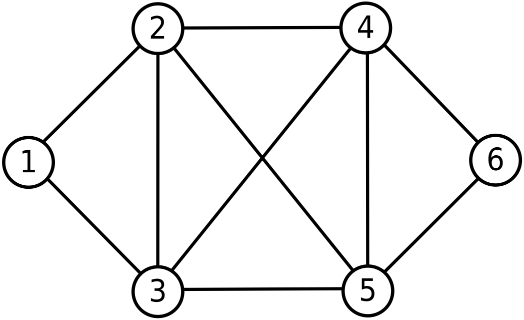
Za **neusmeren** graf $G = (V, E)$ i zadati podskup čvorova $W \subset V$, presek grafa $\delta(W)$ je podskup grana takvih da im je jedan čvor u skupu W , a drugi u skupu $V \backslash W$. Drugim rečima

$$\delta(W) = \{\{i, j\} \in E \mid i \in W, j \in V \backslash W\}.$$

Primer presek grafa

Presek grafa

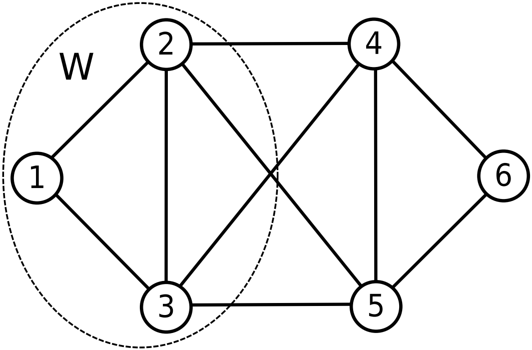
$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}$$



Primer presek grafa

Presek grafa

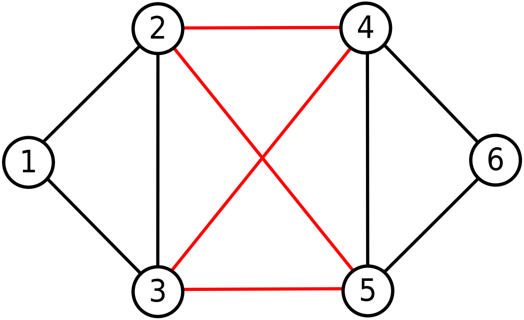
$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \backslash W\}$$



Primer presek grafa

Presek grafa

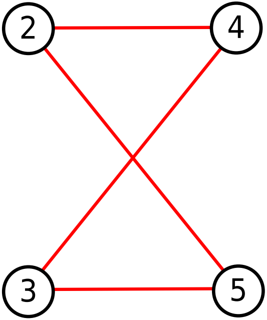
$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}$$



Primer presek grafa

Presek grafa

$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \backslash W\}$$



Definicije

Stablo

Neusmeren graf $G = (V, E)$ je **stablo** ako važe bar dve od sledeće tri tvrdnje:

1. Graf G ne sadrži ni jednu konturu.
2. Graf G sadrži tačno $|V| - 1$ grana.
3. Graf G je povezan.

Primer:

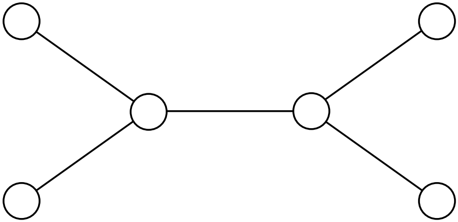
Definicije

Stablo

Neusmeren graf $G = (V, E)$ je **stablo** ako važe bar dve od sledeće tri tvrdnje:

1. Graf G ne sadrži ni jednu konturu.
2. Graf G sadrži tačno $|V| - 1$ grana.
3. Graf G je povezan.

Primer:

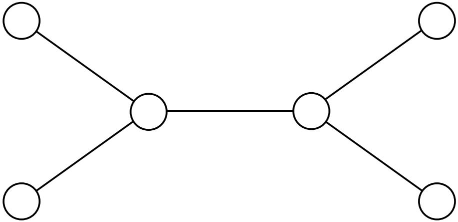


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

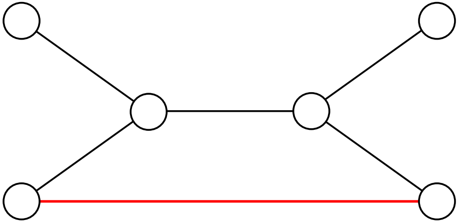


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

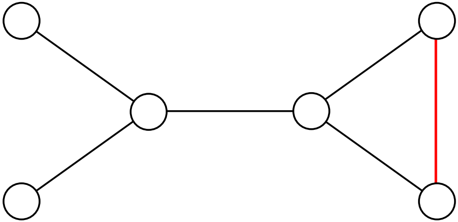


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

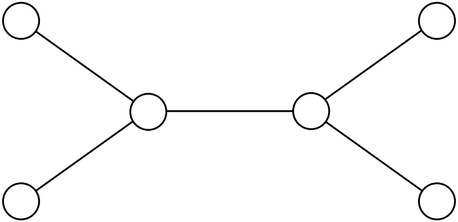


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

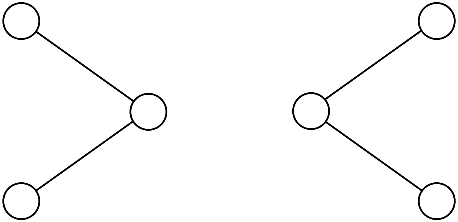


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

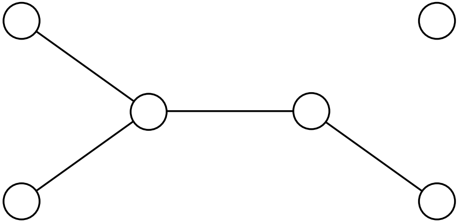


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

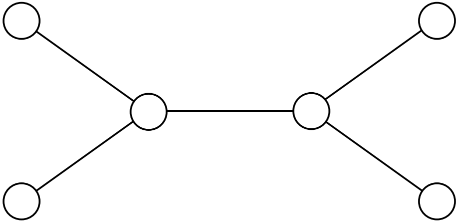


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

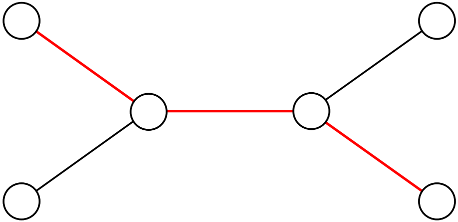


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:

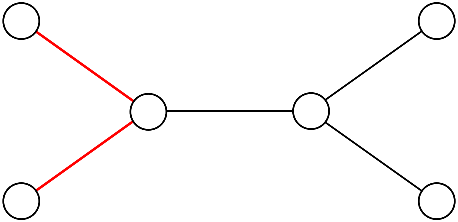


Definicije

Osobine stabla

1. Dodavanjem grane u stablo dobija se kontura.
2. Udaljavanjem grane iz stabla dobija se nepovezan graf.
3. Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan put.

Primer:



Definicije

Mreža

- Kada se elementima grafa (čvorovima i/ili granama) dodele neke vrednosti, on se naziva **težinski graf**.
- Povezan težinski graf se naziva **mreža**.

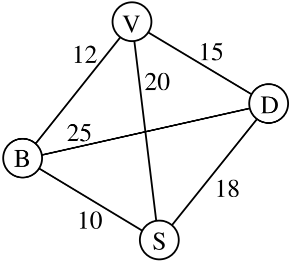
Primer: Putna mreža je zadata grafom, a vrednosti predstavljaju udaljenosti između ključnih tačaka (npr. raskrsnica, gradova i sl.)

Definicije

Mreža

- Kada se elementima grafa (čvorovima i/ili granama) dodele neke vrednosti, on se naziva **težinski graf**.
- Povezan težinski graf se naziva **mreža**.

Primer: Putna mreža je zadata grafom, a vrednosti predstavljaju udaljenosti između ključnih tačaka (npr. raskrsnica, gradova i sl.)



Definicije

Vrednosti koje se dodeljuju elementima grafa mogu imati različitu prirodu i tumačenje.

Vrednosti koje se dodeljuju **granama**, mogu predstavljati npr.:

- dužinu,
- težinu,
- kapacitet,
- pouzdanost, ...

Vrednosti koje se dodeljuju **čvorovima**, mogu predstavljati npr.:

- propusnost,
- značaj,
- uticaj, ...

Definicije

Vrednosti koje se dodeljuju elementima grafa mogu imati različitu prirodu i tumačenje.

Vrednosti koje se dodeljuju **granama**, mogu predstavljati npr.:

- dužinu,
- težinu,
- kapacitet,
- pouzdanost, ...

Vrednosti koje se dodeljuju **čvorovima**, mogu predstavljati npr.:

- propusnost,
- značaj,
- uticaj, ...

Definicije

Vrednosti koje se dodeljuju elementima grafa mogu imati različitu prirodu i tumačenje.

Vrednosti koje se dodeljuju granama, mogu predstavljati npr.:

- dužinu,
- težinu,
- kapacitet,
- pouzdanost, ...

Vrednosti koje se dodeljuju čvorovima, mogu predstavljati npr.:

- propusnost,
- značaj,
- uticaj, ...

Optimizacija na mrežama

- Zadaci optimizacije na mrežama predstavljaju u poslednje vreme najčešće optimizacione probleme.
- Takođe, oni spadaju i u najteže i najviše proučavane probleme sadašnjice.

Sadržaj predavanja

Nalaženje najkraćeg puta između dva zadata čvora u mreži

- Zadat je graf $G = (V, E)$ i skup vrednosti (dužina, težina) koje odgovaraju svakoj grani $C = \{(c_{ij}) \mid (i, j) \in E\}$.
- Zadati su čvorovi $s \in V$ i $t \in V$:
  - s – početni čvor (*Start*);
  - t – krajnji čvor (*Target*).

Nalaženje najkraćeg puta između dva zadata čvora u mreži

Dužina puta

- Dužina puta jednaka je zbiru dužina grana koje tom putu pripadaju.

Formalno

$$P = ((s, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_r, t))$$

$$L(P) = \sum_{p \in P} c_p$$

Problem najkraćeg puta

Potrebno je odrediti put od čvora s do čvora t čija je dužina najmanja.

Nalaženje najkraćeg puta između dva zadata čvora u mreži

Dužina puta

- Dužina puta jednaka je zbiru dužina grana koje tom putu pripadaju.

Formalno

$$P = ((s, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_r, t))$$

$$L(P) = \sum_{p \in P} c_p$$

Problem najkraćeg puta

Potrebno je odrediti put od čvora s do čvora t čija je dužina najmanja.

Nalaženje najkraćeg puta između dva zadata čvora u mreži

Dužina puta

- Dužina puta jednaka je zbiru dužina grana koje tom putu pripadaju.

Formalno

$$P = ((s, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_r, t))$$

$$L(P) = \sum_{p \in P} c_p$$

Problem najkraćeg puta

Potrebno je odrediti put od čvora s do čvora t čija je dužina najmanja.

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda
2. Belmanov algoritam
3. Dajkstrin algoritam

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam
3. Dajkstrin algoritam

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam ✔
3. Dajkstrin algoritam

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam ✔ $O(|E|\,|V|)$
3. Dajkstrin algoritam

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam ✔ $O(|E||V|)$
3. Dajkstrin algoritam ✔

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam ✔ $O(|E||V|)$
3. Dajkstrin algoritam ✔ $O(|V|^2)$

Rešavanje problema najkraćeg puta

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Belmanov algoritam ✓ $O(|E|\,|V|)$
3. Dajkstrin algoritam ✓ $O(|V|^2)$ ◀

Dajkstrin algoritam

- Dajkstrin[1] algoritam je specijalizovan algoritam za nalaženje najkraćeg puta od jednog zadatog čvora (s) do svih ostalih.
- Svakom čvoru se dodeljuje oznaka $d(j)$ koja predstavlja udaljenost čvora j od početnog čvora, koja može biti privremena ili trajna.
- Kada je oznaka čvora j trajna, oznaka $d(j)$ predstavlja najmanju udaljenost od početnog čvora do čvora j.
- Sa $S \subseteq V$ će biti obeležen skup čvorova kojima su dodeljene trajne oznake, a sa $Q \subseteq V$ privremene ($S \cap Q = \emptyset$, $S \cup Q = V$).

[1] Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002).

Dajkstrin algoritam

- Dajkstrin[1] algoritam je specijalizovan algoritam za nalaženje najkraćeg puta od jednog zadatog čvora (s) do svih ostalih.
- Svakom čvoru se dodeljuje oznaka $d(j)$ koja predstavlja udaljenost čvora j od početnog čvora, koja može biti privremena ili trajna.
- Kada je oznaka čvora j trajna, oznaka $d(j)$ predstavlja najmanju udaljenost od početnog čvora do čvora j.
- Sa $S \subseteq V$ će biti obeležen skup čvorova kojima su dodeljene trajne oznake, a sa $Q \subseteq V$ privremene ($S \cap Q = \emptyset$, $S \cup Q = V$).

[1] Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002).

Dajkstrin algoritam

- Dajkstrin[1] algoritam je specijalizovan algoritam za nalaženje najkraćeg puta od jednog zadatog čvora (s) do svih ostalih.
- Svakom čvoru se dodeljuje oznaka $d(j)$ koja predstavlja udaljenost čvora j od početnog čvora, koja može biti privremena ili trajna.
- Kada je oznaka čvora j trajna, oznaka $d(j)$ predstavlja najmanju udaljenost od početnog čvora do čvora j.
- Sa $S \subseteq V$ će biti obeležen skup čvorova kojima su dodeljene trajne oznake, a sa $Q \subseteq V$ privremene ($S \cap Q = \emptyset$, $S \cup Q = V$).

[1] Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002).

Dajkstrin algoritam

- Dajkstrin[1] algoritam je specijalizovan algoritam za nalaženje najkraćeg puta od jednog zadatog čvora (s) do svih ostalih.
- Svakom čvoru se dodeljuje oznaka $d(j)$ koja predstavlja udaljenost čvora j od početnog čvora, koja može biti privremena ili trajna.
- Kada je oznaka čvora j trajna, oznaka $d(j)$ predstavlja najmanju udaljenost od početnog čvora do čvora j.
- Sa $S \subseteq V$ će biti obeležen skup čvorova kojima su dodeljene trajne oznake, a sa $Q \subseteq V$ privremene ($S \cap Q = \emptyset$, $S \cup Q = V$).

[1] Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002).

Dajkstrin algoritam

- U početku će samo čvor s imati trajnu oznaku sa vrednošću 0 (dužina najkraćeg puta od čvora s do njega samog), a ostali čvorovi privremene oznake sa vrednošću ∞.
- U svakoj iteraciji Dajkstrinog algoritma određuje se dužina najkraćeg puta (tj. trajna oznaka) od početnog do nekog čvora grafa.
- Radi lakšeg rekonstruisanja puta, svakom čvoru osim početnom pridružuju se i oznake $p(j)$ koje predstavljaju čvor koji će u nađenom putu prethoditi čvoru j.

Dajkstrin algoritam

- U početku će samo čvor s imati trajnu oznaku sa vrednošću 0 (dužina najkraćeg puta od čvora s do njega samog), a ostali čvorovi privremene oznake sa vrednošću ∞.
- U svakoj iteraciji Dajkstrinog algoritma određuje se dužina najkraćeg puta (tj. trajna oznaka) od početnog do nekog čvora grafa.
- Radi lakšeg rekonstruisanja puta, svakom čvoru osim početnom pridružuju se i oznake $p(j)$ koje predstavljaju čvor koji će u nađenom putu prethoditi čvoru j.

Dajkstrin algoritam

- U početku će samo čvor s imati trajnu oznaku sa vrednošću 0 (dužina najkraćeg puta od čvora s do njega samog), a ostali čvorovi privremene oznake sa vrednošću ∞.
- U svakoj iteraciji Dajkstrinog algoritma određuje se dužina najkraćeg puta (tj. trajna oznaka) od početnog do nekog čvora grafa.
- Radi lakšeg rekonstruisanja puta, svakom čvoru osim početnom pridružuju se i oznake $p(j)$ koje predstavljaju čvor koji će u nađenom putu prethoditi čvoru j.

Dajkstrin algoritam

Algoritam

1. Inicijalizacija:
   - Podeliti čvorove na one sa trajnim i one sa privremenim oznakama: $S \leftarrow \{s\}$; $Q \leftarrow V \setminus \{s\}$;
   - Dodeliti početne oznake: $d(s) \leftarrow 0$; $d(j) \leftarrow \infty$, $j \in Q$;
   - Postaviti početni čvor za tekući: $i \leftarrow s$.
2. Svim čvorovima koji slede tekući čvor, a imaju privremenu oznaku, dodeliti nove oznake:

$$d(j) \leftarrow \min\{d(j), d(i) + c_{ij}\}, \quad j \in \Gamma(i) \cap Q$$

Dajkstrin algoritam

Algoritam

3. Od svih čvorova sa privremenim oznakama:
   - izabrati onaj sa najmanjom vrednošću:

   $$u \leftarrow \arg\min_{j \in Q} d(j)$$

   - proglasiti tu oznaku za trajnu:

   $$S \leftarrow S \cup \{u\}, \; Q \leftarrow Q \setminus \{u\}$$

   - evidentirati prethodni čvor: $p(u) \leftarrow i$
   - postaviti taj čvor za tekući: $i \leftarrow u$
4. Ako je $Q \neq \emptyset$ ići na korak 2. U suprotnom KRAJ.

Dajkstrin algoritam

Rešenje

- Na kraju algoritma, svi čvorovi će imati trajne oznake $d(j)$. Ove vrednosti predstavljaju dužine najkraćih puteva od čvora s do čvora j (tj. vrednost rešenja).
- Sastav puteva (tj. rešenje) se može lako odrediti za svaki čvor, prateći „unazad" oznake za prethodni čvor $p(j)$.

- U zadacima, u oznakama čvorova, trajne oznake će biti obeležene sa „+", a privremene sa „–".

Dajkstrin algoritam

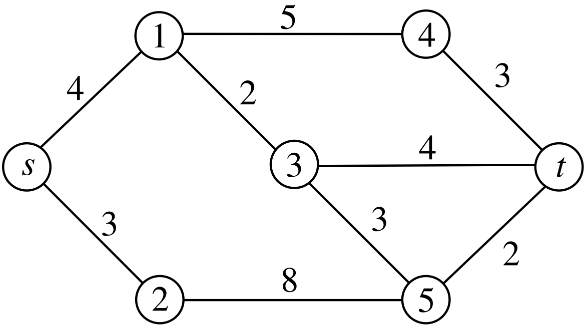
Rešenje

- Na kraju algoritma, svi čvorovi će imati trajne oznake $d(j)$. Ove vrednosti predstavljaju dužine najkraćih puteva od čvora s do čvora j (tj. vrednost rešenja).
- Sastav puteva (tj. rešenje) se može lako odrediti za svaki čvor, prateći „unazad" oznake za prethodni čvor $p(j)$.

- U zadacima, u oznakama čvorova, trajne oznake će biti obeležene sa „+", a privremene sa „–".

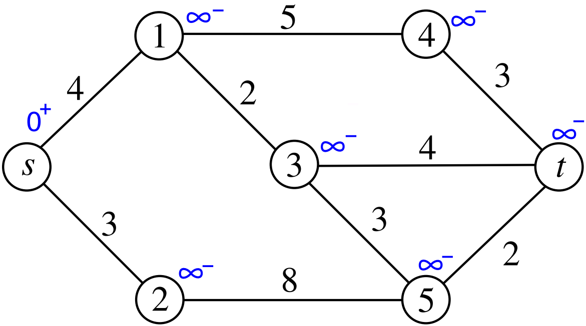
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



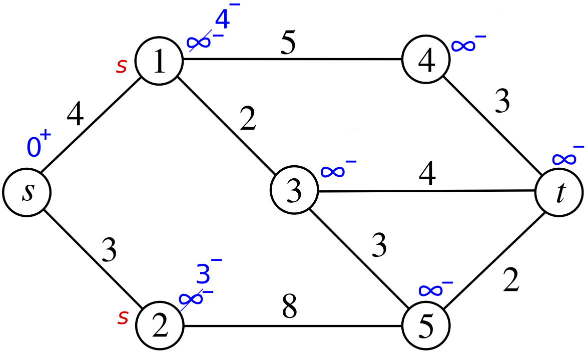
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



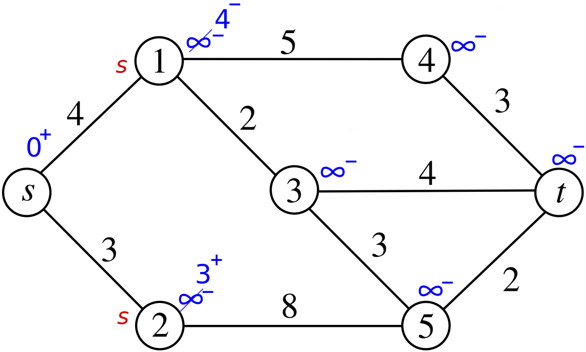
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



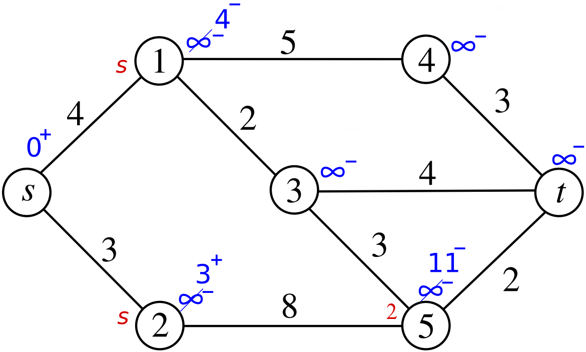
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.

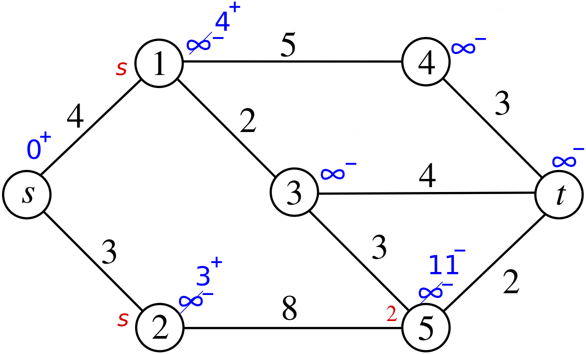


Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.

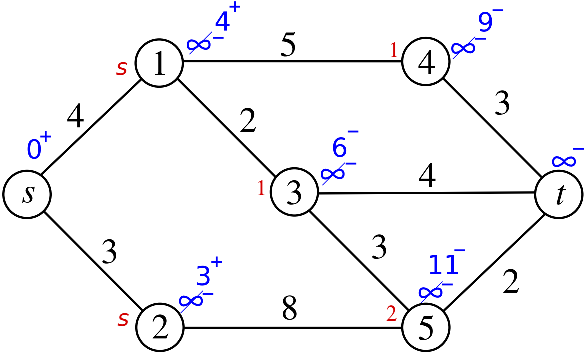


Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



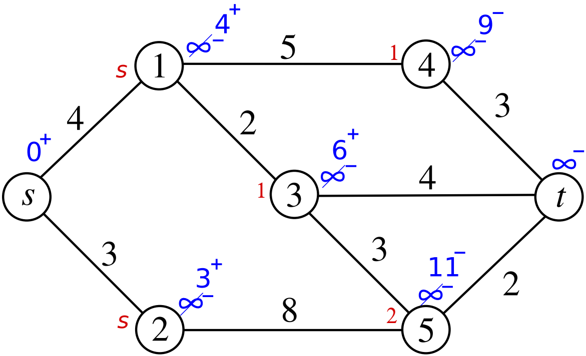
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.

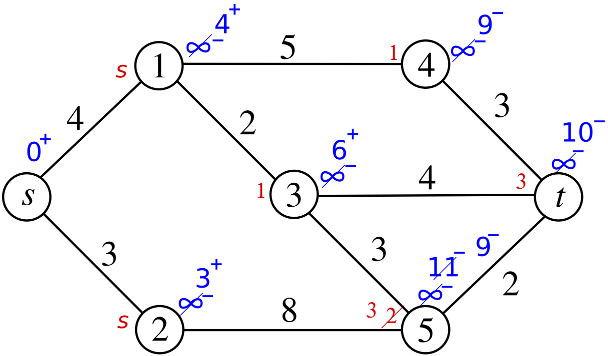


Dajkstrin algoritam – primer

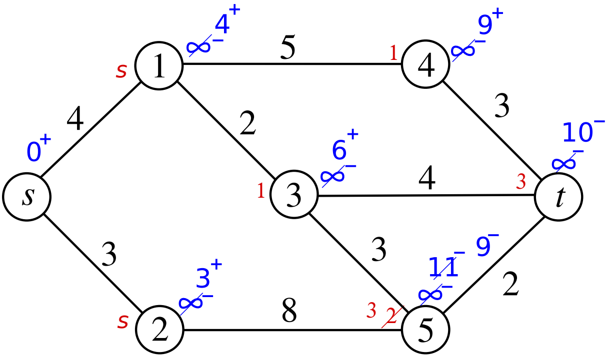
Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



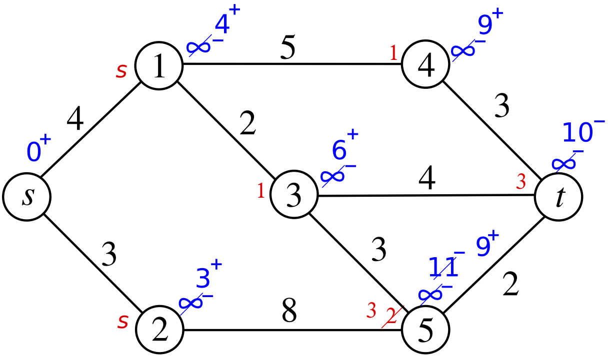
Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.

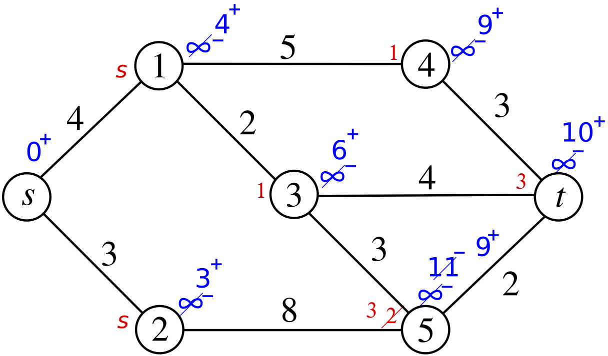


Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



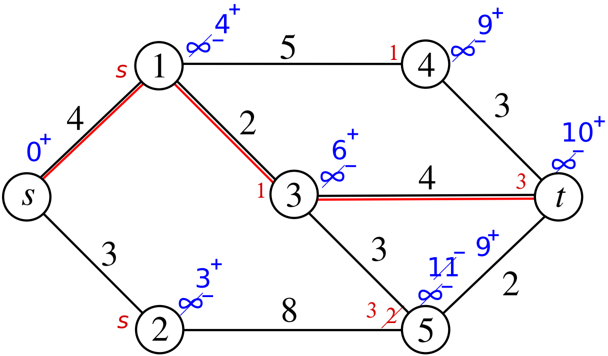
Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



Dajkstrin algoritam – primer

Odrediti najkraći put od čvora s do čvora t.



Dužina najkraćeg puta od s do t je: $4 + 2 + 4 = 10$.
Sastav najkraćeg puta (rešenje) je: $((s, 1), (1, 3), (3, t))$.

Sadržaj predavanja

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Zadat je **neusmereni** povezan graf $G = (V, E)$ i skup vrednosti (težina, dužina) koje odgovaraju svakoj grani $C = \{(c_{ij}) \mid \{i, j\} \in E\}$.

Razapinjuće stablo – definicija

- Razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ je podgraf tog grafa koji sadrži sve čvorove V tog grafa i stablo je.
- Drugim rečima:
  $S = (V, E^{'})$ je razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ akko $E^{'} \subseteq E$ i S je stablo.

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Zadat je **neusmereni** povezan graf $G = (V, E)$ i skup vrednosti (težina, dužina) koje odgovaraju svakoj grani $C = \{(c_{ij}) \mid \{i, j\} \in E\}$.

Razapinjuće stablo – definicija

- Razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ je podgraf tog grafa koji sadrži sve čvorove V tog grafa i stablo je.
- Drugim rečima:
  $S = (V, E^{'})$ je razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ akko $E^{'} \subseteq E$ i S je stablo.

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Zadat je **neusmereni** povezan graf $G = (V, E)$ i skup vrednosti (težina, dužina) koje odgovaraju svakoj grani $C = \{(c_{ij}) \mid \{i, j\} \in E\}$.

Razapinjuće stablo – definicija

- Razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ je podgraf tog grafa koji sadrži sve čvorove V tog grafa i stablo je.
- Drugim rečima:
  $S = (V, E^{'})$ je razapinjuće stablo grafa $G = (V, E)$ akko $E^{'} \subseteq E$ i S je stablo.

Nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla

Težina (dužina) razapinjućeg stabla

- Težina razapinjućeg stabla jednaka je zbiru težina grana koje tom stablu pripadaju.

Formalno

$$S = \left(V, E^{'}\right)$$

$$L(S) = \sum_{l \in E^{'}} c_l$$

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Potrebno je odrediti razapinjuće stablo čija je težina najmanja.

Nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla

Težina (dužina) razapinjućeg stabla

- Težina razapinjućeg stabla jednaka je zbiru težina grana koje tom stablu pripadaju.

Formalno

$$S = \left(V, E^{'}\right)$$

$$L(S) = \sum_{l \in E^{'}} c_l$$

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Potrebno je odrediti razapinjuće stablo čija je težina najmanja.

Nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla

Težina (dužina) razapinjućeg stabla

- Težina razapinjućeg stabla jednaka je zbiru težina grana koje tom stablu pripadaju.

Formalno

$$S = \left(V, E^{'}\right)$$

$$L(S) = \sum_{l \in E'} c_l$$

Problem minimalnog razapinjućeg stabla

- Potrebno je odrediti razapinjuće stablo čija je težina najmanja.

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda
2. Kraskalov algoritam
3. Primov algoritam

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Kraskalov algoritam
3. Primov algoritam

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Kraskalov algoritam ✔
3. Primov algoritam

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✗
2. Kraskalov algoritam ✓ $O(|E| \log |V|)$
3. Primov algoritam

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✗
2. Kraskalov algoritam ✓ $O(|E| \log |V|)$
3. Primov algoritam ✓

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Kraskalov algoritam ✔ $O(|E|\log|V|)$
3. Primov algoritam ✔ $O(|E|+|V|\log|V|)$

Rešavanje problema minimalnog razapinjućeg stabla

Metode rešavanja:

1. Simpleks metoda ✖
2. Kraskalov algoritam ✓ $O(|E|\log|V|)$
3. Primov algoritam ✓ $O(|E|+|V|\log|V|)$ ◀

Primov algoritam

- Primov algoritam je proždrljiva (halapljiva, *greedy*) procedura konstruisanja razapinjućeg stabla dodavanjem po jednog čvora (i odgovarajuće grane) do tada konstruisanom stablu.
- Označimo sa U skup čvorova i sa P skup grana koje su do nekog trenutka uključeni u stablo.

Primov algoritam

- Primov algoritam je proždrljiva (halapljiva, *greedy*) procedura konstruisanja razapinjućeg stabla dodavanjem po jednog čvora (i odgovarajuće grane) do tada konstruisanom stablu.
- Označimo sa U skup čvorova i sa P skup grana koje su do nekog trenutka uključeni u stablo.

Primov algoritam

Algoritam

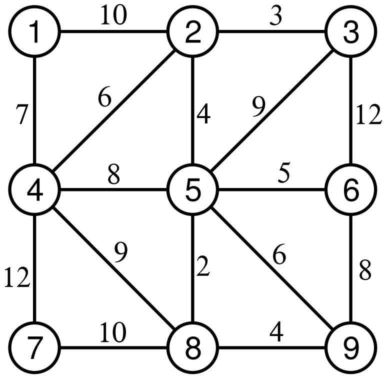
1. Inicijalizacija: izabrati proizvoljan čvor $u \in V$ i dodati ga u skup $U = \{u\}$; $P = \emptyset$.
2. Između svih grana $M = \{\{i,j\} \mid \{i,j\} \in E, i \in U, j \in V \setminus U\}$, tj. grana čiji jedan čvor pripada formiranom stablu, a drugi je van njega izabrati onu sa najmanjom težinom. Drugim rečima:

$$\{v, u\} \leftarrow \arg\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij}$$

3. Čvor u i granu $\{v, u\}$ dodati stablu: $U \leftarrow U \cup \{u\}$, $P \leftarrow P \cup \{\{v, u\}\}$.
4. Ponavljati korake 2 i 3 sve dok se ne doda svih $|V|$ čvorova u U, odnosno $|V| - 1$ grana u P. Dobijeni graf $S = (U, P)$ predstavlja minimalno razapinjuće stablo.

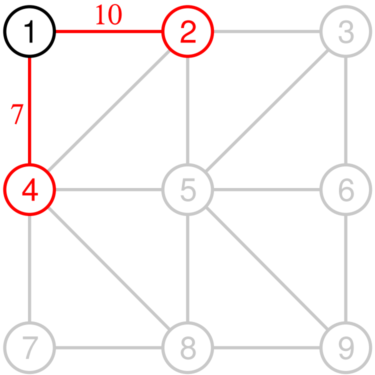
Primov algoritam – primer

Odrediti minimalno razapinjuće stablo grafa:



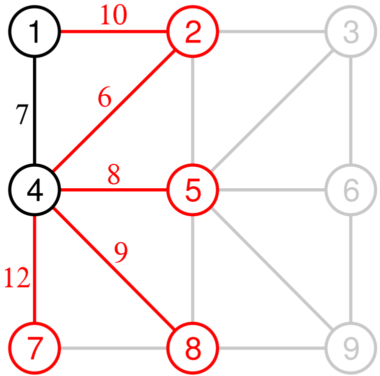
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



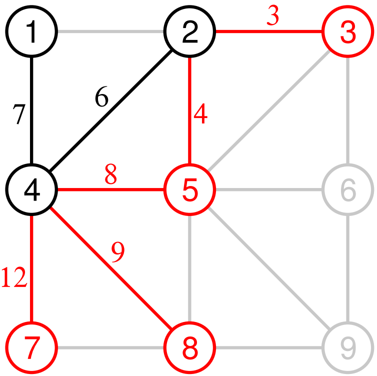
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



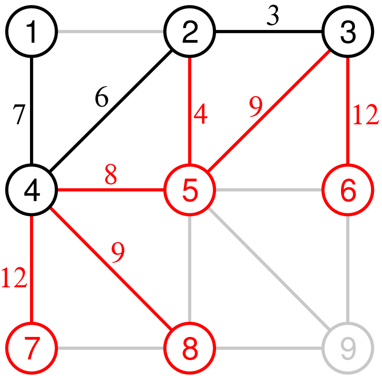
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



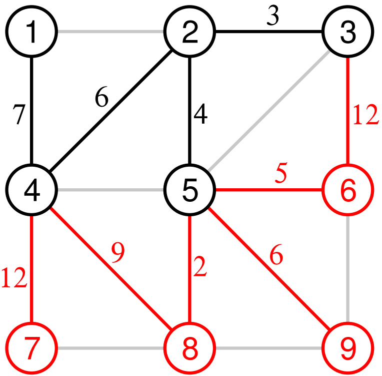
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



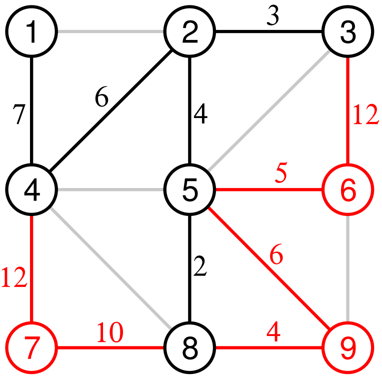
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



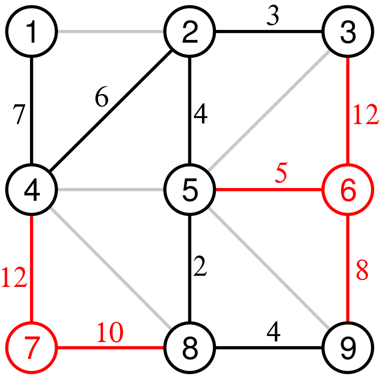
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



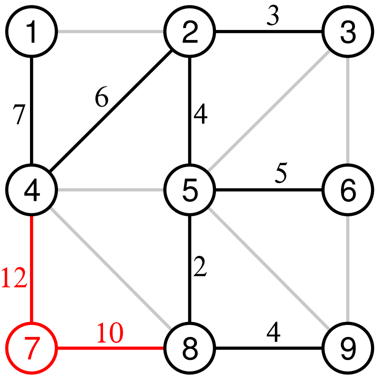
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



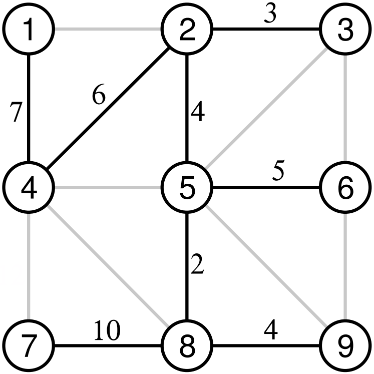
Primov algoritam – primer

Primov algoritam:



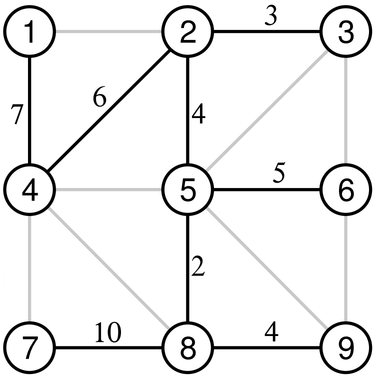
Primov algoritam – primer

Rešenje:



Primov algoritam – primer

Rešenje:



Težina (dužina) minimalnog razapinjućeg stabla je:
$7 + 6 + 3 + 4 + 5 + 2 + 10 + 4 = 41$.

Hvala na pažnji!