Kombinatorna optimizacija
– OPŠTA POSTAVKA ZADATKA –

Milan Stanojević

Laboratorija za operaciona istraživanja „Jovan Petrić"
Fakultet organizacionih nauka, Beograd

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Kombinatorna optimizacija – primer

Kombinatorna optimizacija – primer

Formulacija problema KO

- Zadat je konačan skup $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Za svaki element skupa $e \in E$ definisana je funkcija $w(e)$ takva da:

$$w : E \to \mathbb{R}$$

Dopustivi skup problema KO se definiše:

$$X \subseteq \mathcal{P}(E)$$

- Svako dopustivo rešenje $x \in X$ je zapravo $x \subseteq E$.

Formulacija problema KO

- Zadat je konačan skup $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
- Za svaki element skupa $e \in E$ definisana je funkcija $w(e)$ takva da:

$$w : E \to \mathbb{R}$$

Dopustivi skup problema KO se definiše:

$$X \subseteq \mathcal{P}(E)$$

- Svako dopustivo rešenje $x \in X$ je zapravo $x \subseteq E$.

Formulacija problema KO

- Zadat je konačan skup $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Za svaki element skupa $e \in E$ definisana je funkcija $w(e)$ takva da:

$$w : E \to \mathbb{R}$$

Dopustivi skup problema KO se definiše:

$$X \subseteq \mathcal{P}(E)$$

- Svako dopustivo rešenje $x \in X$ je zapravo $x \subseteq E$.

Formulacija problema KO

- Zadat je konačan skup $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Za svaki element skupa $e \in E$ definisana je funkcija $w(e)$ takva da:

$$w : E \to \mathbb{R}$$

Dopustivi skup problema KO se definiše:

$$X \subseteq \mathcal{P}(E)$$

- Svako dopustivo rešenje $x \in X$ je zapravo $x \subseteq E$.

Formulacija problema KO

Funkcija cilja problema KO je najčešće:

$$f(x) = \sum_{e \in x} w(e)$$

Optimizacioni problem KO je:

$$(\min) \sum_{e \in x} w(e)$$

p.o.

$$x \in X$$

Formulacija problema KO

Funkcija cilja problema KO je najčešće:

$$f(x) = \sum_{e \in x} w(e)$$

Optimizacioni problem KO je:

$$(\min) \sum_{e \in x} w(e)$$

p.o.

$$x \in X$$

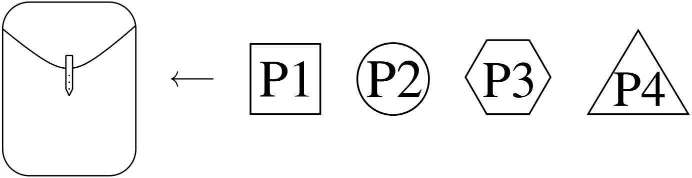
Formulacija problema KO

Optimizacioni problem KO u opštem slučaju:

Minimizirati ili maksimizirati funkciju $f(x)$ pri ograničenjima $x \in X$, gde su:

- X konačan (ili prebrojiv) skup,
- $f(x) : X \to \mathbb{R}$.

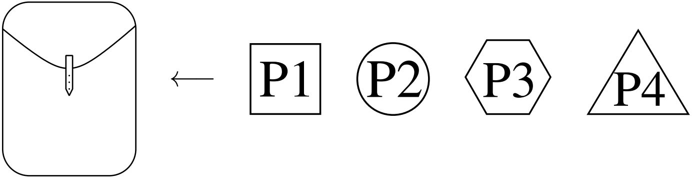
Primer problema KO – Problem ranca



vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- $E = \{P1, P2, P3, P4\}$
- $\mathcal{P}(E) = \{\{\,\}, \{P1\}, \{P2\}, \{P3\}, \{P4\}, \{P1, P2\}, \{P1, P3\}, \{P1, P4\}, \{P2, P3\}, \{P2, P4\}, \{P3, P4\}, \{P1, P2, P3\}^*, \{P1, P2, P4\}, \{P1, P3, P4\}, \{P2, P3, P4\}, \{P1, P2, P3, P4\}^*\}$
- Zapremina: 0, 8, 6, 7, 4, 14, 15, 12, 13, 10, 11, 21, 18, 19, 17, 25

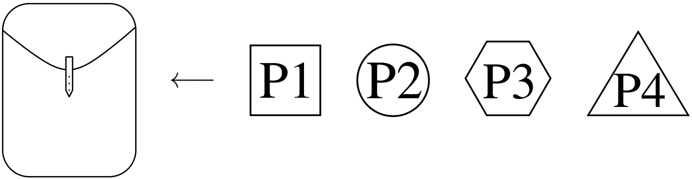
Primer problema KO – Problem ranca



vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- $E = \{P1, P2, P3, P4\}$
- $\mathcal{P}(E) = \{\{\,\}, \{P1\}, \{P2\}, \{P3\}, \{P4\}, \{P1, P2\}, \{P1, P3\}, \{P1, P4\}, \{P2, P3\}, \{P2, P4\}, \{P3, P4\}, \{P1, P2, P3\}^*, \{P1, P2, P4\}, \{P1, P3, P4\}, \{P2, P3, P4\}, \{P1, P2, P3, P4\}^*\}$
- Zapremina: 0, 8, 6, 7, 4, 14, 15, 12, 13, 10, 11, 21, 18, 19, 17, 25

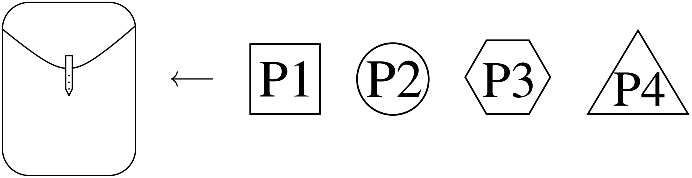
Primer problema KO – Problem ranca



vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- $E = \{P1, P2, P3, P4\}$
- $\mathcal{P}(E) = \{\{\,\}, \{P1\}, \{P2\}, \{P3\}, \{P4\}, \{P1, P2\}, \{P1, P3\}, \{P1, P4\}, \{P2, P3\}, \{P2, P4\}, \{P3, P4\}, \{P1, P2, P3\}^*, \{P1, P2, P4\}, \{P1, P3, P4\}, \{P2, P3, P4\}, \{P1, P2, P3, P4\}^*\}$
- Zapremina: 0, 8, 6, 7, 4, 14, 15, 12, 13, 10, 11, 21, 18, 19, 17, 25

Primer problema KO – Problem ranca



vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- $E = \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}$
- $\mathcal{P}(E) = \{\{\,\}, \{\mathrm{P1}\}, \{\mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}\}^*, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}^*\}$
- Zapremina: 0, 8, 6, 7, 4, 14, 15, 12, 13, 10, 11, **21**, 18, 19, 17, **25**

Primer problema KO – Problem ranca

Dopustivi skup

$X = \{\{\}, \{P1\}, \{P2\}, \{P3\}, \{P4\}, \{P1, P2\}, \{P1, P3\}, \{P1, P4\}, \{P2, P3\}, \{P2, P4\}, \{P3, P4\}, \{P1, P2, P4\}, \{P1, P3, P4\}, \{P2, P3, P4\}\}$

Primer problema KO – Problem ranca

Dopustivi skup

$X = \{\{\}, \{\mathrm{P1}\}, \{\mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}\}$

Vrednosti dopustivih rešenja:

$f(\{\}) = 0$
$f(\{\mathrm{P1}\}) = 70$
$f(\{\mathrm{P2}\}) = 80$
$f(\{P3\}) = 50$
$f(\{P4\}) = 60$

$f(\{P1, P2\}) = 150$
$f(\{P1, P3\}) = 120$
$f(\{P1, P4\}) = 130$
$f(\{P2, P3\}) = 130$
$f(\{P2, P4\}) = 140$
$f(\{P3, P4\}) = 110$

$f(\{P1, P2, P4\}) = 210$
$f(\{P1, P3, P4\}) = 180$
$f(\{P2, P3, P4\}) = 190$

Primer problema KO – Problem ranca

Dopustivi skup

$X = \{\{\}, \{\mathrm{P1}\}, \{\mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P1}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}, \{\mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}\}\}$

Vrednost optimalnog rešenja:

$$f(\{P1, P2, P4\}) = 210$$

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Opšta formulacija KO preko MP

- Svakom elementu e_j skupa E pridružuje se tzv. **binarna** promenljiva x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1 & e_j \in x \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- $x = \{e_j \mid x_j = 1, j = 1, \ldots, n\}$
- $e_j \in x \Leftrightarrow x_j = 1$
- Funkcija $w(e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se može formulisati:

$$w_j x_j$$

- Funkcija cilja sada ima oblik:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Opšta formulacija KO preko MP

- Svakom elementu e_j skupa E pridružuje se tzv. **binarna** promenljiva x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1 & e_j \in x \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- $x = \{e_j \mid x_j = 1, j = 1, \ldots, n\}$
- $e_j \in x \Leftrightarrow x_j = 1$
- Funkcija $w(e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se može formulisati:

$$w_j x_j$$

- Funkcija cilja sada ima oblik:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Opšta formulacija KO preko MP

- Svakom elementu e_j skupa E pridružuje se tzv. **binarna** promenljiva x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1 & e_j \in x \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- $x = \{e_j \mid x_j = 1, j = 1, \ldots, n\}$
- $e_j \in x \Leftrightarrow x_j = 1$
- Funkcija $w(e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se može formulisati:

$$w_j x_j$$

- Funkcija cilja sada ima oblik:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Opšta formulacija KO preko MP

- Svakom elementu e_j skupa E pridružuje se tzv. **binarna** promenljiva x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1 & e_j \in x \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- $x = \{e_j \mid x_j = 1, j = 1, \ldots, n\}$
- $e_j \in x \Leftrightarrow x_j = 1$
- Funkcija $w(e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se može formulisati:

$$w_j x_j$$

- Funkcija cilja sada ima oblik:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Opšta formulacija KO preko MP

- Svakom elementu e_j skupa E pridružuje se tzv. **binarna** promenljiva x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1 & e_j \in x \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n$$

- $x = \{e_j \mid x_j = 1, j = 1, \ldots, n\}$
- $e_j \in x \Leftrightarrow x_j = 1$
- Funkcija $w(e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se može formulisati:

$$w_j x_j$$

- Funkcija cilja sada ima oblik:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Primer MM problema KO – Problem ranca

		x_1	x_2	x_3	x_4
vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- Matematički model:

$$(\max) \quad f(x) = 70x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 60x_4$$

p.o.

$$8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

- Rešenje problema MM:

$$x^* = (1, 1, 0, 1), \;\; f(x^*) = 210$$

Primer MM problema KO – Problem ranca

		x_1	x_2	x_3	x_4
vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- Matematički model:

$$
\begin{array}{ll}
(\max) & f(x) = 70x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 60x_4 \\
\text{p.o.} & \\
 & 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

- Rešenje problema MM:

$$x^* = (1, 1, 0, 1), \ f(x^*) = 210$$

Primer MM problema KO – Problem ranca

		x_1	x_2	x_3	x_4
vrednost [€]	max	70	80	50	60
zapremina [l]	20	8	6	7	4

- Matematički model:

$$\begin{aligned} &(\max) \quad f(x) = 70x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 60x_4 \\ &\text{p.o.} \\ &\qquad 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 20 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Rešenje problema MM:

$$x^* = (1, 1, 0, 1), \; f(x^*) = 210$$

Sadržaj predavanja

1 Opšta postavka zadatka KO

2 Formulacija KO preko matematičkog programiranja

3 Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
- Osnovni MM problema ranca
- MM problema najkraćeg puta
- MM problema minimalnog razapinjućeg stabla

4 Rešavanje problema KO
- Složenost problema KO
- Pristupi rešavanju

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
    - Osnovni MM problema ranca
    - MM problema najkraćeg puta
    - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
    - Složenost problema KO
    - Pristupi rešavanju

Osnovni MM problema ranca

Zadato:

- Ranac kapaciteta C.
- Skup predmeta koji se mogu staviti u ranac $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
- Za svaki predmet su zadati:

c_j vrednost predmeta $j \in E$,
a_j zapremina (masa, površina, ...) predmeta $j \in E$.

Problem ranca

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j \in E} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j \in E} a_j x_j \leq C$$
$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, |E|$$

Osnovni MM problema ranca

Zadato:

- Ranac kapaciteta C.
- Skup predmeta koji se mogu staviti u ranac $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
- Za svaki predmet su zadati:

c_j vrednost predmeta $j \in E$,
a_j zapremina (masa, površina, ...) predmeta $j \in E$.

Problem ranca

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j \in E} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j \in E} a_j x_j \le C$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \, j = 1, \ldots, |E|$$

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Zadato:

- Usmeren graf $G = (V, E)$
- Za svaku granu zadata je dužina c_{ij}, $(i, j) \in E$.
- Početni i krajnji čvor s i t.

Uvodimo promenljive

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } (i,j) \text{ pripada putu} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$

odnosno

- $x \in \{0, 1\}^{|E|}$

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Zadato:

- Usmeren graf $G = (V, E)$
- Za svaku granu zadata je dužina c_{ij}, $(i, j) \in E$.
- Početni i krajnji čvor s i t.

Uvodimo promenljive

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } (i,j) \text{ pripada putu} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$

odnosno

- $x \in \{0, 1\}^{|E|}$

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Sada je lako formulisati funkciju cilja:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude **elementarni** put između s i t, tj.:

- Da iz čvora s izađe samo jedna grana;
- Da u čvor t uđe samo jedna grana;
- Za svaki čvor osim s i t treba da važi jedno od:
  - da jedna grana uđe i jedna grana izađe iz njega;
  - da ni jedna grana niti uđe niti izađe iz njega.

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Sada je lako formulisati funkciju cilja:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude **elementarni** put između s i t, tj.:

- Da iz čvora s izađe samo jedna grana;
- Da u čvor t uđe samo jedna grana;
- Za svaki čvor osim s i t treba da važi jedno od:
  - da jedna grana uđe i jedna grana izađe iz njega;
  - da ni jedna grana niti uđe niti izađe iz njega.

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Sada je lako formulisati funkciju cilja:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude **elementarni** put između s i t, tj.:

- Da iz čvora s izađe samo jedna grana;
- Da u čvor t uđe samo jedna grana;
- Za svaki čvor osim s i t treba da važi jedno od:
  - da jedna grana uđe i jedna grana izađe iz njega;
  - da ni jedna grana niti uđe niti izađe iz njega.

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Matematički model

$$(\min) \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{j\in\Gamma(s)} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{j\in\Gamma^{-1}(i)} x_{ji} = \sum_{j\in\Gamma(i)} x_{ij}, \quad i \in V \setminus \{s,t\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in E$$

Matematički model problema nalaženja najkraćeg puta

Matematički model

$$(\min) \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{j\in\Gamma(s)} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{j\in\Gamma^{-1}(i)} x_{ji} = \sum_{j\in\Gamma(i)} x_{ij}, \quad i \in V \setminus \{s,t\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in E$$

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
    - Osnovni MM problema ranca
    - MM problema najkraćeg puta
    - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
    - Složenost problema KO
    - Pristupi rešavanju

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Zadato:

- Neusmeren graf $G = (V, E)$
- Za svaku granu zadata je težina (dužina) c_{ij}, $\{i, j\} \in E$.

Uvodimo promenljive

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } \{i,j\} \text{ pripada stablu} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$

odnosno

- $x \in \{0, 1\}^{|E|}$

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Zadato:

- Neusmeren graf $G = (V, E)$
- Za svaku granu zadata je težina (dužina) c_{ij}, $\{i, j\} \in E$.

Uvodimo promenljive

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } \{i,j\} \text{ pripada stablu} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$

odnosno

- $x \in \{0, 1\}^{|E|}$

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Funkcija cilja je ista kao kod svih sličnih problema:

$$(\min) \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude razapinjuće stablo, tj.:

- Da dobijeno rešenje predstavlja povezan graf.

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Funkcija cilja je ista kao kod svih sličnih problema:

$$(\min) \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude razapinjuće stablo, tj.:

- Da dobijeno rešenje predstavlja povezan graf.

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Funkcija cilja je ista kao kod svih sličnih problema:

$$(\min) \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude razapinjuće stablo, tj.:

- Da dobijeno rešenje predstavlja povezan graf.

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Funkcija cilja je ista kao kod svih sličnih problema:

$$(\min) \sum_{\{i,j\}\in E} c_{ij}x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude razapinjuće stablo, tj.:

- Da dobijeno rešenje predstavlja povezan graf.

Samo to?

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Funkcija cilja je ista kao kod svih sličnih problema:

$$(\min) \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da dobijeno rešenje zaista bude razapinjuće stablo, tj.:

- Da dobijeno rešenje predstavlja povezan graf.

Samo to? Da li treba dodati ograničenja koja će da obezbede da rešenje ne sadrži konture?

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Matematički model

$$(\min) \sum_{\{i,j\}\in E} c_{ij}x_{ij}$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{\{i,j\}\in\delta(W)} x_{ij} \geq 1,\ \forall W \subset V,\ |W| \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \{i,j\} \in E$$

Mat. model problema minimalnog razapinjućeg stabla

Matematički model u razvijenoj formi

$$(\min) \sum_{\{i,j\}\in E} c_{ij}x_{ij}$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{\{i,j\}\in E, i\in W, j\in V\setminus W} x_{ij} \geq 1, \ \forall W \subset V, \ |W| \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \{i,j\} \in E$$

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Dimenzije problema KO

Dimenzije problema

- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$
- $|X|$ – takođe eksponencijalno raste s dimenzijama problema.
- Eksplicitna enumeracija (potpuno pretraživanje dopustivog skupa) **neizvodljivo** čak i za relativno male dimenzije problema.

Računska složenost problema KO

Prema računskoj složenosti, problemi KO se mogu podeliti na:

- Polinomijalne probleme – problemi koji imaju takvu strukturu da se za njih može razviti polinomijalni algoritam (P).
    - problem najkraćeg puta (Dajkstrin i Belmanov algoritam),
    - problem minimalnog razapinjućeg stabla (Primov i Kraskalov algoritam),
    - problem asignacije (raspoređivanja) (mađarska metoda), ...
- Teške kombinatorne probleme – problemi za koje ne postoji i (veruje se) ne mogu se razviti polinomijalni algoritmi.

Računska složenost problema KO

Prema računskoj složenosti, problemi KO se mogu podeliti na:

- Polinomijalne probleme – problemi koji imaju takvu strukturu da se za njih može razviti polinomijalni algoritam (P). Na primer:
  - problem najkraćeg puta (Dajkstrin i Belmanov algoritam),
  - problem minimalnog razapinjućeg stabla (Primov i Kraskalov algoritam),
  - problem asignacije (raspoređivanja) (mađarska metoda), ...
- Teške kombinatorne probleme – problemi za koje ne postoji i (veruje se) ne mogu se razviti polinomijalni algoritmi.

Računska složenost problema KO

Prema računskoj složenosti, problemi KO se mogu podeliti na:

- Polinomijalne probleme – problemi koji imaju takvu strukturu da se za njih može razviti polinomijalni algoritam (P). Na primer:
    - problem najkraćeg puta (Dajkstrin i Belmanov algoritam),
    - problem minimalnog razapinjućeg stabla (Primov i Kraskalov algoritam),
    - problem asignacije (raspoređivanja) (mađarska metoda), ...
- Teške kombinatorne probleme – problemi za koje ne postoji i (veruje se) ne mogu se razviti polinomijalni algoritmi.

Računska složenost problema KO

Teški problemi KO se mogu dalje podeliti na:

- NP (Nedeterministički Polinomijalne), za koje postoje tzv. NP algoritmi, npr.:
  - problem trgovačkog putnika (TSP – *Traveling Salesman Problem*),
  - problem rutiranja vozila (VRP – *Vehicle Routing Problem*);
- Striktno eksponencijalne probleme, npr.:
  - problem nalaženja svih podskupova nekog skupa,
  - problem nalaženja svih Hamiltonovih kontura u grafu.

Računska složenost problema KO

Teški problemi KO se mogu dalje podeliti na:

- NP (Nedeterministički Polinomijalne), za koje postoje tzv. NP algoritmi, npr.:
    - problem trgovačkog putnika (TSP – *Traveling Salesman Problem*),
    - problem rutiranja vozila (VRP – *Vehicle Routing Problem*);
- Striktno eksponencijalne probleme, npr.:
    - problem nalaženja svih podskupova nekog skupa,
    - problem nalaženja svih Hamiltonovih kontura u grafu.

Sadržaj predavanja

1. Opšta postavka zadatka KO
2. Formulacija KO preko matematičkog programiranja
3. Neki karakteristični problemi KO – formulacija preko MP
   - Osnovni MM problema ranca
   - MM problema najkraćeg puta
   - MM problema minimalnog razapinjućeg stabla
4. Rešavanje problema KO
   - Složenost problema KO
   - Pristupi rešavanju

Pristupi rešavanju

Osnovni pristupi rešavanju problema KO:

- Egzaktne metode – metode koje garantuju nalaženje optimalnog rešenja,
- Približne metode – metode koje ne garantuju nalaženje optimalnog rešenja.

Pristupi rešavanju – egzaktne metode

Egzaktnim metodama se mogu rešavati problemi iz klase P i problemi relativno malih dimenzija iz klase NP.

Egzaktne metode (implicitna enumeracija):

- specijalizovane metode za određen problem,
- dinamičko programiranje,
- generisanje kolona,
- metoda sekućih ravni,
- metoda grananja i ograničavanja,
- metoda grananja i sečenja, ...

Pristupi rešavanju – egzaktne metode

Egzaktnim metodama se mogu rešavati problemi iz klase P i problemi relativno malih dimenzija iz klase NP.

Egzaktne metode (implicitna enumeracija):

- specijalizovane metode za određen problem,
- dinamičko programiranje,
- generisanje kolona,
- metoda sekućih ravni,
- metoda grananja i ograničavanja,
- metoda grananja i sečenja, ...

Pristupi rešavanju – približne metode

Približne metode su po pravilu polinomijalne i najčešće se primenjuju kada se u razumnom vremenu ne može dobiti optimalno rešenje egzaktnim metodama.

Približne metode:

- specijalizovane heuristike (npr. najbliži sused, proždrljive, ušteda, ...);
- metode lokalnog pretraživanja (npr. k-opt, ...);
- metaheuristike (npr. simulirano kaljenje, tabu pretraživanje, vns, evolutivni algoritmi, ...);
- aproksimativni algoritmi.

Pristupi rešavanju – približne metode

Približne metode su po pravilu polinomijalne i najčešće se primenjuju kada se u razumnom vremenu ne može dobiti optimalno rešenje egzaktnim metodama.

Približne metode:

- specijalizovane heuristike (npr. najbliži sused, proždrljive, ušteda, ...);
- metode lokalnog pretraživanja (npr. k-opt, ...);
- metaheuristike (npr. simulirano kaljenje, tabu pretraživanje, vns, evolutivni algoritmi, ...);
- aproksimativni algoritmi.

KRAJ

Hvala na pažnji!