

Najkraće razapinjuće stablo - zadaci

Data je mreža $G = (N, L)$ i težine grana $C = (c_{ij})$, $(i, j) \in L$ pri čemu je $c_{ij} = c_{ji}$. Razapinjuće stablo grafa G je povezan podgraf grafa G , takav da sadrži sve čvorove kao i G i ne sadrži ni jednu konturu. Očigledno da je broj grana u razapinjućem stablu $l = n - 1$.

Problem određivanja najkraćeg razapinjućeg stabla SST (*Shortest Spaning Tree*) sastoji se u izdvajanju onog razapinjućeg stabla grafa G čiji je zbir dužina (težina) grana minimalan.

Primov algoritam

Neka je N' skup čvorova i L' skup grana koje su do nekog trenutka uključeni u stablo.

1. Inicijalizacija: izabrati proizvoljan čvor $u \in N$ i dodati ga u skup N , tj. $N' \leftarrow \{u\}$; $L' = \emptyset$;

2. Između svih grana $M = \{\{i, j\} \mid \{i, j\} \in L; i \in N'; j \in N \setminus N'\}$, tj. grana čiji jedan čvor pripada formiranom stablu, a drugi je van njega, izabrati onu sa najmanjom težinom. Drugim recima:

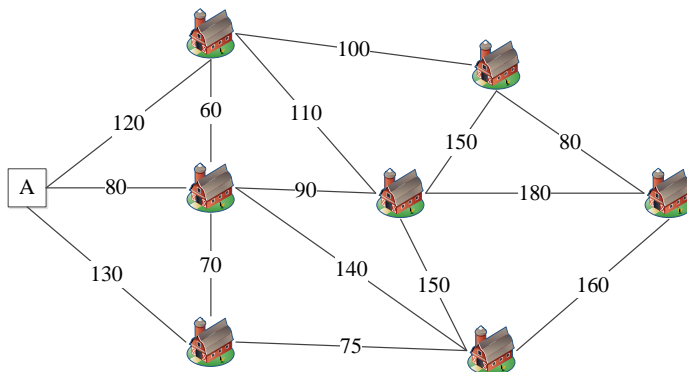
$$\{m, n\} \leftarrow \arg \min_{\{i, j\} \in M} c_{ij}$$

3. Čvor n i granu $\{m, n\}$ dodati stablu: $N' \leftarrow N' \cup \{n\}$, $L' \leftarrow L' \cup \{\{m, n\}\}$.

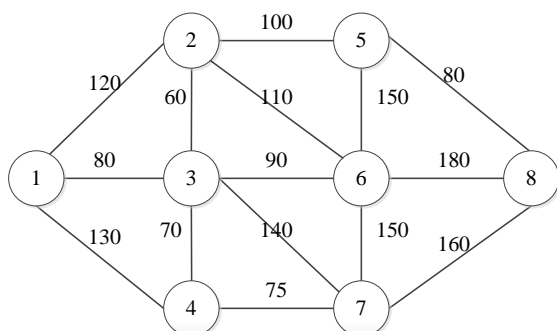
4. Ponavljati korake 2 i 3 sve dok se ne doda svih $|N|$ čvorova u N' , odnosno $|N| - 1$ grana u L' .

Dobijeni graf $G' = (N', L')$ predstavlja minimalno razapinjuće stablo.

Primer 1. U jednom selu treba postaviti vodovodnu mrežu. Instalacija je sprovedena do ulaza u selo (tačka A) odakle treba dalje postaviti cevi do svake kuće u selu. Zbog konfiguracije terena nije moguće sprovesti cevi između bilo koje dve kuće već na način kako je prikazano na slici (udaljenost između kuća je data u metrima). Potrebno je odrediti koje kuće treba povezati međusobno tako da ukupna dužina cevi koje treba postaviti bude minimalna.



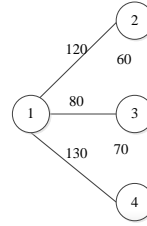
Rešenje: Zadatom problemu odgovara graf na slici.



1. Inicijalizacija: $N' \leftarrow \{1\}; L' = \emptyset;$

2. $M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}, \min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{13} = 80$

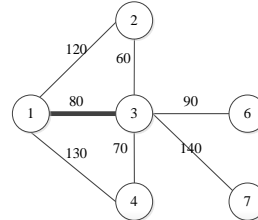
3. $N' = \{1,3\}; L' = \{\{1,3\}\}$



2. $M = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,7\}\},$

$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{32} = 60$

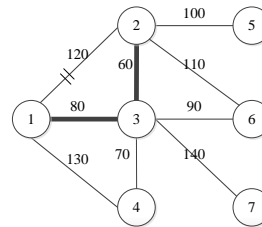
3. $N' = \{1,2,3\}; L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}\}$



2. $M = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,7\}\},$

$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{34} = 70$

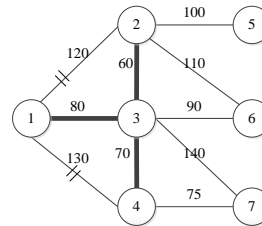
3. $N' = \{1,2,3,4\}; L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{3,4\}\}$



2. $M = \{\{2,5\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,7\}\},$

$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{47} = 75$

3. $N' = \{1,2,3,4,7\}; L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{4,7\}\}$

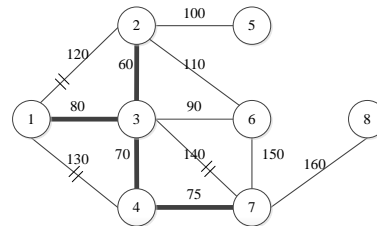


2. $M = \{\{2,5\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{7,6\}, \{7,8\}\},$

$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{36} = 90$

3. $N' = \{1,2,3,4,6,7\};$

$L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{4,7\}, \{3,6\}\}$

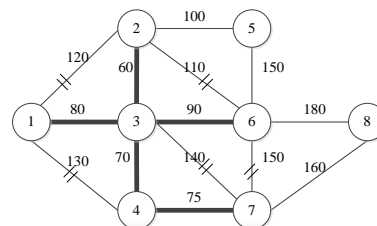


2. $M = \{\{2,5\}, \{6,5\}, \{6,8\}, \{7,8\}\},$

$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{25} = 100$

3. $N' = \{1,2,3,4,5,6,7\};$

$L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{4,7\}, \{3,6\}, \{2,5\}\}$

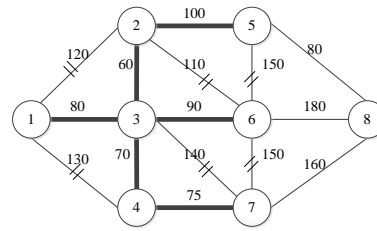


$$2. M = \{\{5,8\}, \{6,8\}, \{7,8\}\},$$

$$\min_{\{i,j\} \in M} c_{ij} = c_{58} = 80$$

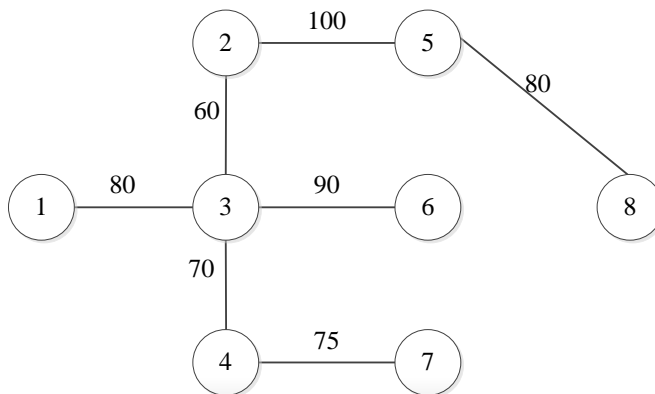
$$3. N' = \{1,2,3,4,5,6,7,8\};$$

$$L' = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{4,7\}, \{3,6\}, \{2,5\}, \{5,8\}\}$$



Najkraće razapinjuće stablo je prikazano na sledećoj slici a njegova dužina je:

$$80+60+70+75+90+100+80= 555.$$



Napomena: Isto razapinjuće stablo se dobija ako se u prvom koraku izabere bilo koji čvor.

Ako je u koraku 1 izabran čvor npr. 2, $N' \leftarrow \{2\}$, redosled kojim se čvorovi pridružuju skupu N' i grane skupu L' je sledeći:

$$M = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}\},$$

$$N' \leftarrow \{3\}, L' \leftarrow \{\{2,3\}\};$$

$$M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,7\}\},$$

$$N' \leftarrow \{4\}, L' \leftarrow \{\{3,4\}\};$$

$$M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,7\}\},$$

$$N' \leftarrow \{7\}, L' \leftarrow \{\{4,7\}\};$$

$$M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{6,7\}, \{7,8\}\},$$

$$N' \leftarrow \{1\}, L' \leftarrow \{\{1,3\}\};$$

$$M = \{\{2,5\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{6,7\}, \{7,8\}\},$$

$$N' \leftarrow \{6\}, L' \leftarrow \{\{3,6\}\};$$

$$M = \{\{2,5\}, \{5,6\}, \{6,8\}, \{7,8\}\},$$

$$N' \leftarrow \{5\}, L' \leftarrow \{\{2,5\}\};$$

$$M = \{\{5,8\}, \{6,8\}, \{7,8\}\},$$

$$N' \leftarrow \{8\}, L' \leftarrow \{\{5,8\}\}$$

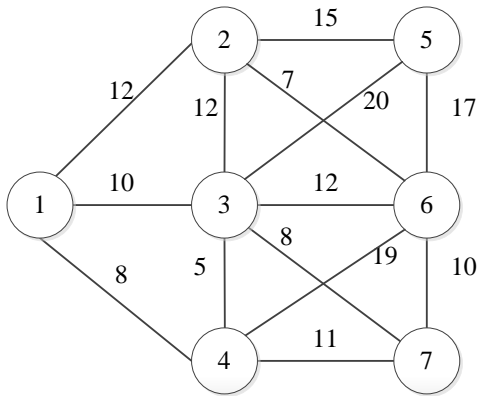
Primer 2. Arhipelag od 6 ostrva je potrebno povezati mostovim međusobno i sa kopnom tako da se mogu obilaziti automobilima. Troškovi izgradnje mostova između ostrva koja je moguće povezati mostom i ostrva i kopna dati su u sledećoj tabeli:

	Kopno	O1	O2	O3	O4	O5	O6
Kopno	/	12	13	8	/	/	/
O1	12	/	12	/	15	7	/
O2	13	12	/	5	20	12	8
O3	8	/	5	/	/	19	11
O4	/	15	20	/	/	17	/
O5	/	7	12	19	17	/	10
O6	/	/	8	11	/	10	/

Potrebno je odrediti na koji način povezati kopno i sva ostrva tako da ukupni troškovi izgradnje mostova

budu monimalni.

Rešenje: Zadati problem se može predstaviti sledećim grafom:

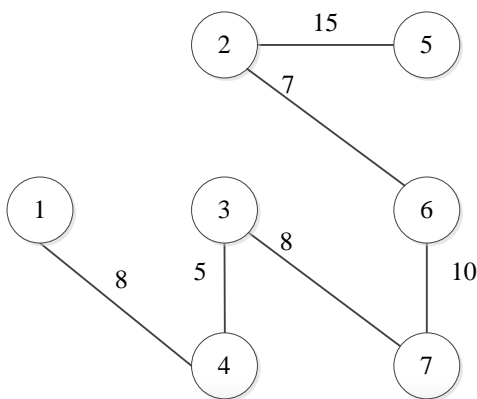


Ako je u koraku 1 izabran čvor npr. 5, $N' \leftarrow \{5\}$, redosled kojim se čvorovi pridružuju skupu N' i grane skupu L' je sledeći:

- | | |
|--|---|
| $M = \{\{2,5\}, \{3,5\}, \{5,6\}\},$ | $N' \leftarrow \{2\}, L' \leftarrow \{\{2,5\}\};$ |
| $M = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{5,6\}\},$ | $N' \leftarrow \{6\}, L' \leftarrow \{\{2,6\}\};$ |
| $M = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}, \{6,7\}\},$ | $N' \leftarrow \{7\}, L' \leftarrow \{\{6,7\}\};$ |
| $M = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{4,7\}\},$ | $N' \leftarrow \{3\}, L' \leftarrow \{\{3,7\}\};$ |
| $M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{4,6\}, \{4,7\}\},$ | $N' \leftarrow \{4\}, L' \leftarrow \{\{3,4\}\};$ |
| $M = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\},$ | $N' \leftarrow \{1\}, L' \leftarrow \{\{1,4\}\};$ |

Najkraće razapinjuće stablo je prikazano na sledećoj slici a njegova težina (ukupna cena izgradnje mostova) je:

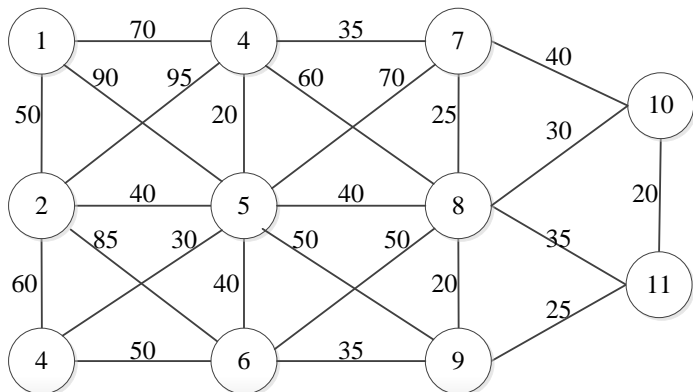
$$8+5+8+10+7+15= 53$$



Da je u koraku 1 izabran čvor 1, $N' \leftarrow \{1\}$, redosled kojim se čvorovi pridružuju skupu N' i grane skupu L' bi bio sledeći:

- $N' \leftarrow \{4\}, L' \leftarrow \{\{1,4\}\}; N' \leftarrow \{3\}, L' \leftarrow \{\{3,4\}\}; N' \leftarrow \{7\}, L' \leftarrow \{\{3,7\}\};$
 $N' \leftarrow \{6\}, L' \leftarrow \{\{6,7\}\}; N' \leftarrow \{2\}, L' \leftarrow \{\{2,6\}\}; N' \leftarrow \{5\}, L' \leftarrow \{\{5,6\}\}.$

Primer 3. U jednoj poslovnoj zgradi je potrebno instalirati lokalnu računarsku mrežu. Na 11 izabranih mesta je postavljen po jedan *svič* (*Switch* - komutator), uređaj koji upravlja protokom podataka između pojedinih računara na lokalnoj mreži. Na grafu na slici je prikazana udaljenost u metrima između pojedinih svičeva (prikazane su samo udaljenosti koje su manje od 100m jer u ostalim slučajevima dolazi do slabljenja signala). Ovih 11 svičeva je potrebno povezati kablovima. Odrediti na koji način povezati svičeve tako da svaki bude povezan sa bar jednim svičem i da ukupna dužina iskorišćenog kabla bude minimalna.

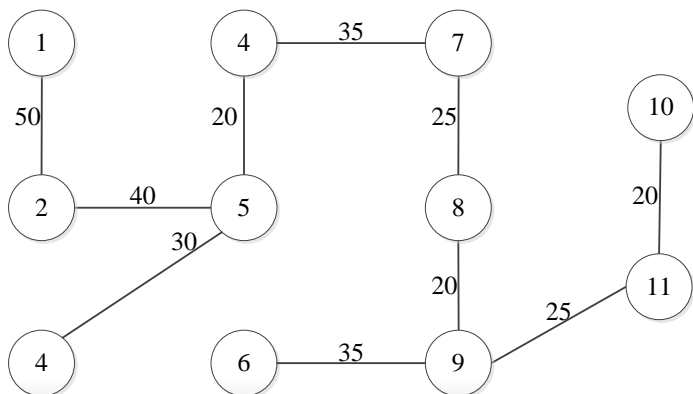


Rešenje: Ako je u koraku 1 izabran čvor 1, $N' \leftarrow \{1\}$, redosled kojim se čvorovi pridružuju skupu N' i grane skupu L' je sledeći:

- | | |
|---|--|
| $M = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}\},$ | $N' \leftarrow \{2\}, L' \leftarrow \{\{1,2\}\};$ |
| $M = \{\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}\},$ | $N' \leftarrow \{5\}, L' \leftarrow \{\{2,5\}\};$ |
| $M = \{\{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{5,9\}\},$ | $N' \leftarrow \{4\}, L' \leftarrow \{\{4,5\}\};$ |
| $M = \{\{2,3\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{4,7\}, \{4,8\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{5,9\}\},$ | $N' \leftarrow \{3\}, L' \leftarrow \{\{3,5\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{4,7\}, \{4,8\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{5,9\}\},$ | $N' \leftarrow \{7\}, L' \leftarrow \{\{4,7\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{4,8\}, \{5,6\}, \{5,8\}, \{5,9\}, \{7,8\}, \{7,10\}\},$ | $N' \leftarrow \{8\}, L' \leftarrow \{\{7,8\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{5,9\}, \{6,8\}, \{7,10\}, \{8,9\}, \{8,10\}, \{8,11\}\},$ | $N' \leftarrow \{9\}, L' \leftarrow \{\{8,9\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{6,8\}, \{6,9\}, \{7,10\}, \{8,10\}, \{8,11\}, \{9,11\}\},$ | $N' \leftarrow \{11\}, L' \leftarrow \{\{9,11\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{6,8\}, \{6,9\}, \{7,10\}, \{8,10\}, \{10,11\}\},$ | $N' \leftarrow \{10\}, L' \leftarrow \{\{10,11\}\};$ |
| $M = \{\{2,6\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{6,8\}, \{6,9\}\},$ | $N' \leftarrow \{6\}, L' \leftarrow \{\{6,9\}\};$ |

Najkraće razapinjuće stablo je prikazano na sledećoj slici a njegova težina (ukupna cena izgradnje mostova) je:

$$50+40+30+20+35+25+20+35+25+20= 300$$



Minimalna ukupna dužina kablova kojima se mogu povezati svi svičevi je 300 metara.