Анализа Петријевих мрежа

Анализа Петријевих мрежа

Мере се:

- Својства Петријевих мрежа:
  - **Досежљивост (*Reachability*)** Проблем досежљивости се састоји у испитивању да ли се може достићи неко, жељено или нежељено, стање.
  - **Ограниченост (*Boundedness*)** Како места у PN могу представљати бафере са различитим ресурсима (производи, подаци итд.), проверавањем ограничености мреже утврђује се да ли ће доћи до претоваривања бафера.
  - **Живост** (***Liveness***) и **Мртви чвор** – блокада (***Dead lock***).
  - ...
- Перформансе моделираног процеса: трајање процеса и потпроцеса, чекање у процесу, искоришћеност ресурса итд.

Анализа Петријевих мрежа

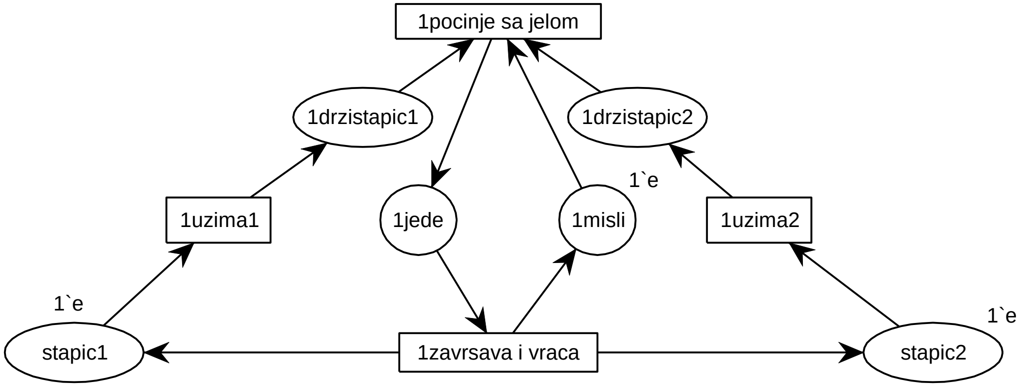
Методе за анализу:

- Матрица инциденције и једначина стања
- Инваријанте
- Стабло досежљивости
- Симулација

Матрица инциденције и једначина стања

$$U=[u_{ij}], i=\overline{1,n}, j=\overline{1,q}$$

$$u_{ij}=\begin{cases} W(t_j,p_i) & \text{ако} \quad t_j\in {}^{0}p_i \\ -W(t_j,p_i) & \text{ако} \quad t_j\in p_i^{0} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

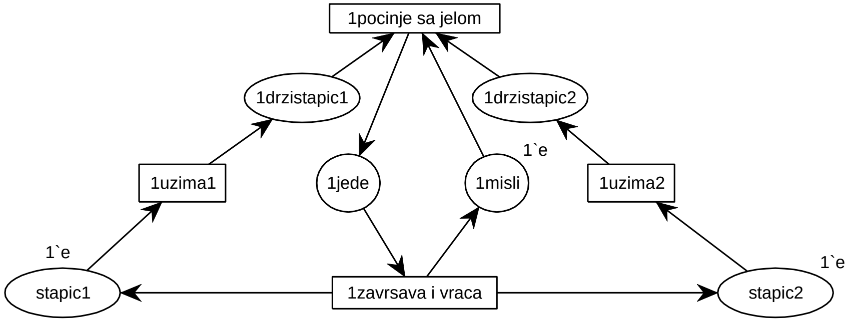
$$U=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \end{array}$$

Матрица инциденције и једначина стања

$$M^{\mathrm{T}} = M_0^{\mathrm{T}} + U \cdot V_\sigma^{\mathrm{T}}$$

σ - секвенца паљења
V_σ - (карактеристични) вектор секвенце паљења

$$M_0 = [100011] \qquad \sigma = \langle t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_2 \rangle \qquad V_\sigma = [2322]$$



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

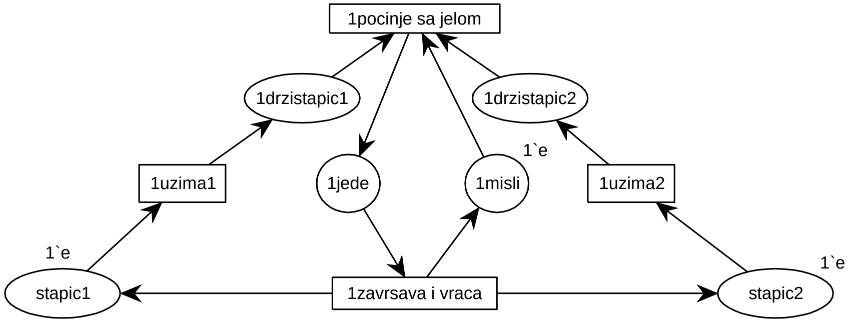
p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Матрица инциденције и једначина стања

$$M^{\mathrm{T}} = M_0^{\mathrm{T}} + U \cdot V_\sigma^{\mathrm{T}}$$

$$M_0 = [1\,0\,0\,0\,1\,1] \qquad V_\sigma = [4\,2\,1\,3]$$



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

p-инваријанта

Z–вектор *n* ненегативних целих бројева је ***p* –инваријанта** ако важи*:*

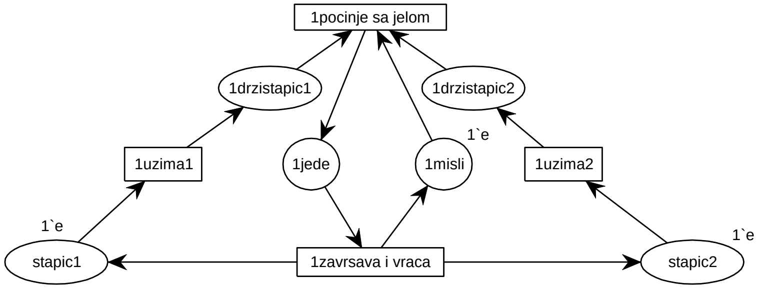
$$Z \cdot U = 0$$

где је *U* матрица инциденције ПМ , а *n* број места у ПМ*.*

$$U=\left.\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}$$

$$Z = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$$

Свака p-инваријанта $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ задовољава следећи систем једначина:



$$\begin{array}{rrrrrrl} & & z_3 & & -z_5 & & = 0 \\ & & & z_4 & & -z_6 & = 0 \\ -z_1 & +z_2 & -z_3 & -z_4 & & & = 0 \\ z_1 & -z_2 & & & +z_5 & +z_6 & = 0 \end{array}$$

t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

Z_1=[1,1,0,0,0,0], Z_2=[0,1,1,0,1,0], Z_3=[0,1,0,1,0,1]

p-инваријанта

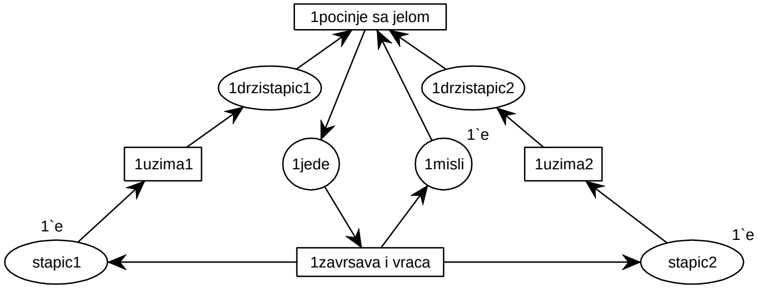
Својство : Нека је M_0 почетно маркирање мреже $PN = (N, M_0)$ и нека је $M \in R(M_0)$. Онда је

$$Z \cdot M_0^{\mathrm{T}} = Z \cdot M^{\mathrm{T}}$$

где је *Z* *p* –инваријанта.

$$M_0 = [100011], M_1 = [100110], M_2 = [010000]$$

Z_1=[1,1,0,0,0,0], Z_2=[0,1,1,0,1,0], Z_3=[0,1,0,1,0,1]



$$Z_1 \cdot M_0^{\mathrm{T}} = Z_1 \cdot M_1^{\mathrm{T}} = Z_1 \cdot M_2^{\mathrm{T}} = 1$$

$$Z_2 \cdot M_0^{\mathrm{T}} = Z_2 \cdot M_1^{\mathrm{T}} = Z_2 \cdot M_2^{\mathrm{T}} = 1$$

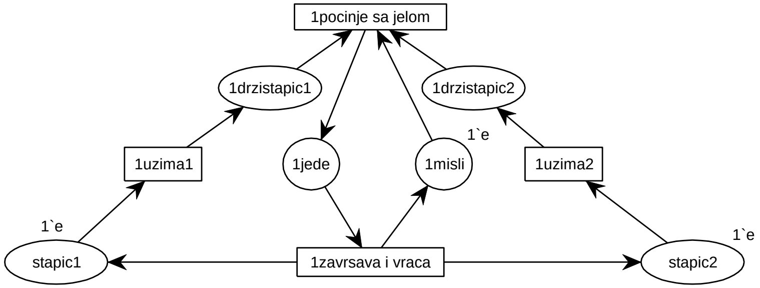
$$Z_3 \cdot M_0^{\mathrm{T}} = Z_3 \cdot M_1^{\mathrm{T}} = Z_3 \cdot M_2^{\mathrm{T}} = 1$$

t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

p-инваријанта

Својство : Ако су све компоненте *p* –инваријанте *Z* строго позитивне, онда је укупан број токена у ПМ ограничен. Ако су уз то све компоненте једнаке 1, онда укупан број токена у ПМ остаје константан после било које допустиве секвенце паљења.



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

$Z_1=[1,1,0,0,0,0]$, $Z_2=[0,1,1,0,1,0]$, $Z_3=[0,1,0,1,0,1]$

У делу мреже који представља инваријанту је увек један токен.

Z_1 или размишља или једе
Z_2 или је штапић 1 слободан или га филозоф држи или једе
Z_3 или је штапић 2 слободан или га филозоф држи или једе

t-инваријанта

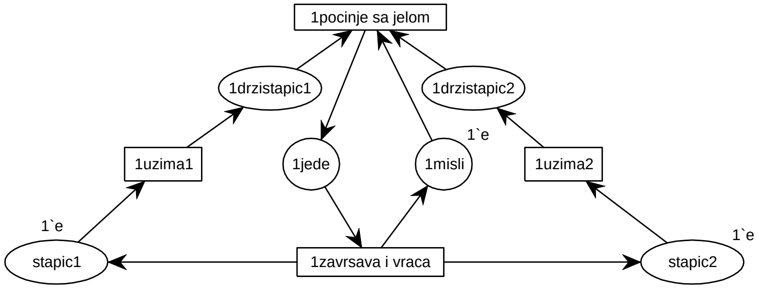
W–вектор *q* ненегативних целих бројева је ***t* –инваријанта** ако важи:

$$U \cdot W^T = 0$$

где је *U* матрица инциденције ПМ , а *q* број прелаза у ПМ.

$$U = \left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array}$$



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

$$W = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

Свака t-инваријанта W =[w1, w2, w3, w4] задовољава следећи систем једначина:

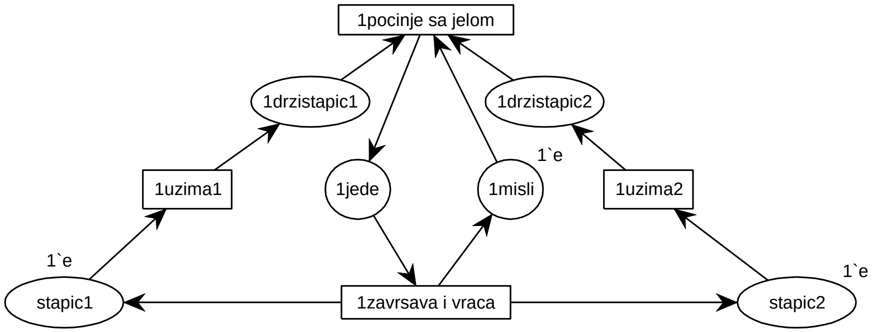
$$\begin{array}{rrrrl} & & -w_3 & +w_4 & = 0 \\ & & w_3 & -w_4 & = 0 \\ w_1 & & -w_3 & & = 0 \\ & w_2 & -w_3 & & = 0 \\ -w_1 & & & +w_4 & = 0 \\ & -w_2 & & +w_4 & = 0 \end{array}$$

W_1=[1,1,1,1], W_2=[0,0,0,0]

t-инваријанта

Својство : Ако постоји допустива секвенца паљења која одговара *t* –инваријанти, онда се таквом секвенцом паљења систем враћа у почетно стање.

$W_1=[1,1,1,1]$

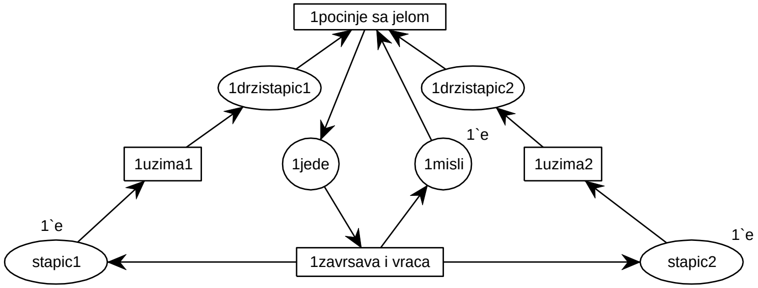


Систем се враћа у почетно стање ако се m пута упали секвенца $\sigma_1 =< t_1, t_2, t_3, t_4>$

t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

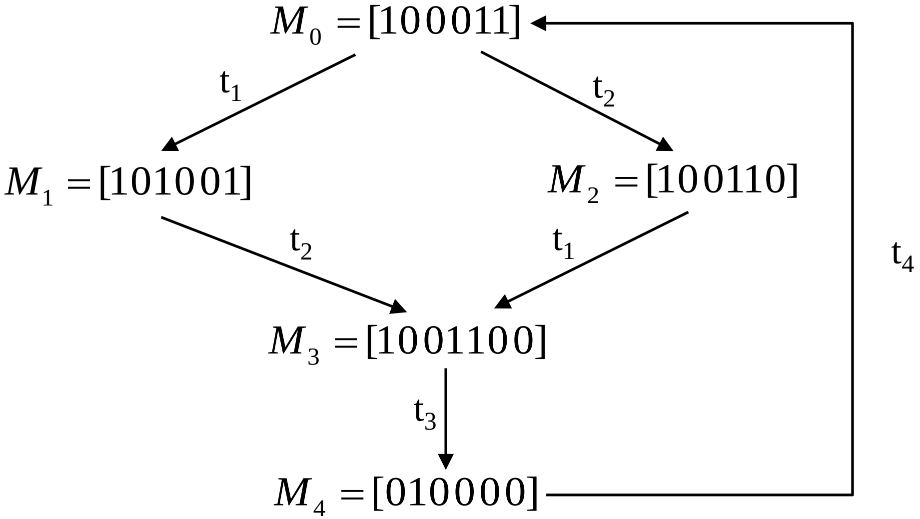
p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2

Стабло досежљивости (State space)



t_1=1uzima1,
t_2=1uzima2,
t_3=1pocinjesajelom,
t_4=1zavrsavaivraca,

p_1=1misli,
p_2=1jede,
p_3=1drzistapic1,
p_4=1drzistapic2,
p_5=stapic1,
p_6=stapic2



$M_0 = [100011]$

t_1 t_2

$M_1 = [101001]$

$M_2 = [100110]$

t_2 t_1

$M_3 = [1001100]$

t_3

$M_4 = [010000]$

t_4