

Matematički modeli efikasnosti

dr Gordana Savic

goca@fon.bg.ac.rs

dr Milan Martić

milan@fon.bg.ac.rs

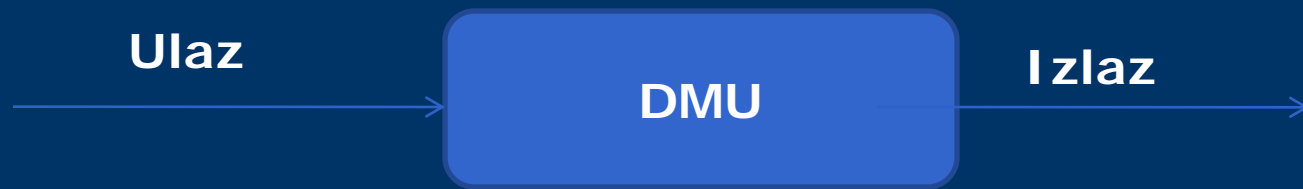
C203

Merenje performansi

- Evaluacija u odnosu na idealnu tačku – Naive metoda

Neefikasnost = (Aktuelni troškovi – min troškovi) / Aktuelni troškovi

Efektivnost = Aktuene performanse / Najbolje moguće performanse

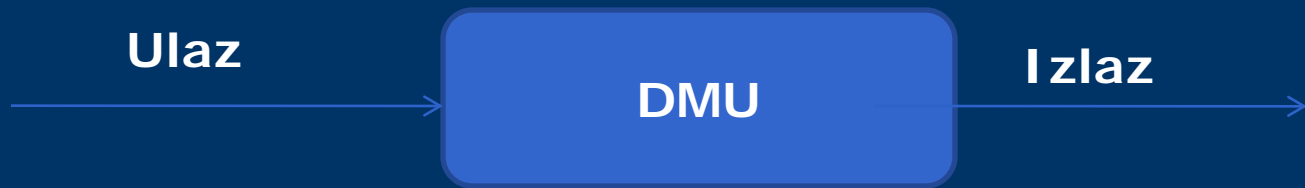


Merenje performansi – Nepoznate preference

- Višestruki ulazi
 - Višestruki izlazi
 - Nepoznati prioriteti
-
- *Holistički pristup – Farelova mera*

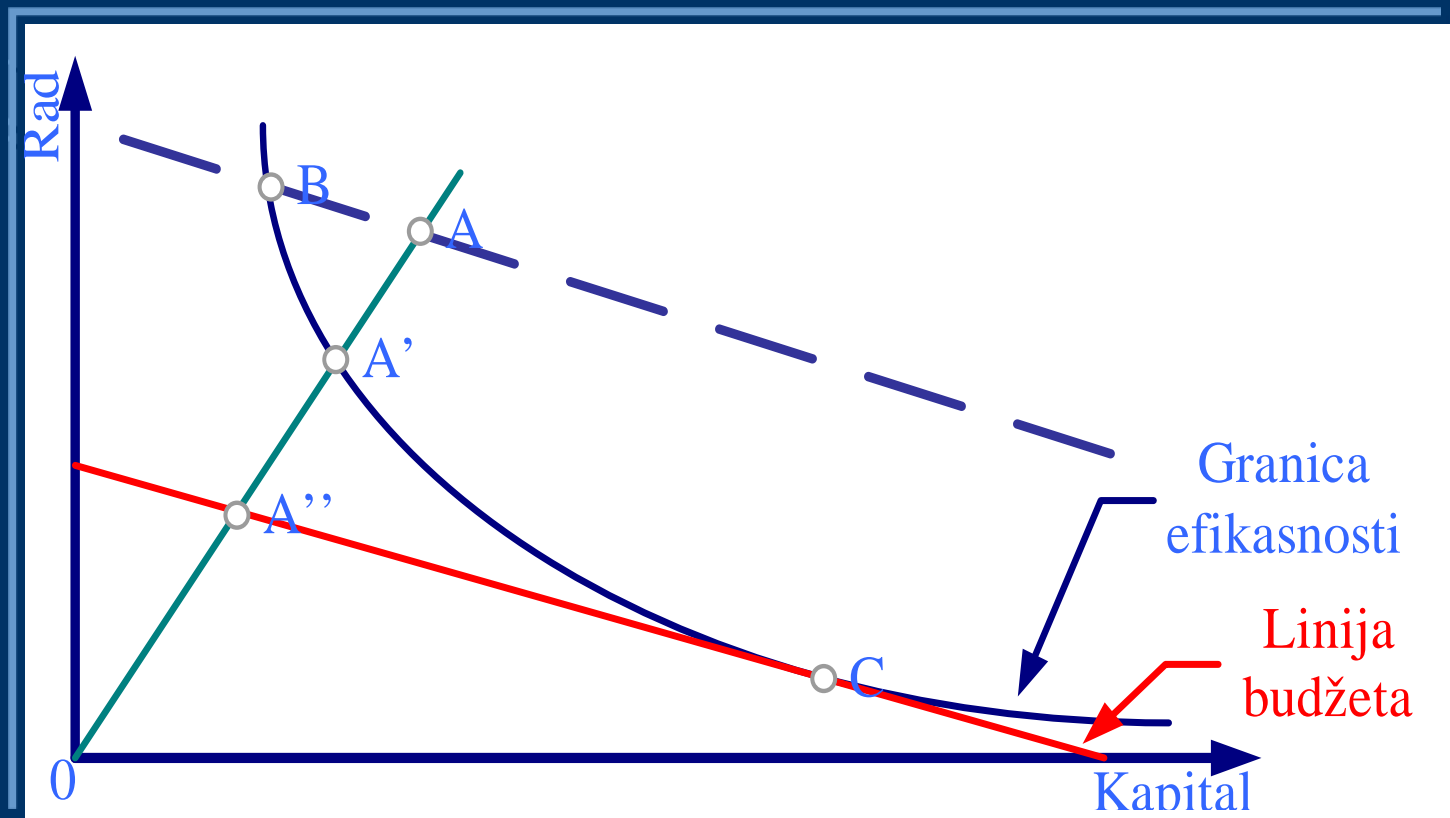
Merenje performansi

- Efikasnost = izlaz / ulaz



- Mere efikasnosti
 - tehničku efikasnost (TE),
 - alokativnu efikasnost (AE) i
 - ukupnu efikasnost – troškovna efikasnost (UE).

Tipovi efikasnosti



- Tipovi efikasnosti

Tipovi efikasnosti

1	2	3	4	10	11	12	8
DMU	Ulaz #	Jedinična cena €	Izlaz €	Izlaz /Ukupni troškovi (4/(2*3))	Troškovna efikasnost	Alokativna efikasnost (11/8)	Relativna tehnička efikasnost
A	50	500	100000	40	1	1	1
B	5	600	67500	33.75	0.5625	0.9	0.675

Ko je bolji?

- Majka
 - Kuvanje
 - Živeti sa
 - Ljubaznost
 - Lepota
- Žena
 - Kuvanje
 - Živeti sa
 - Ljubaznost
 - Lepota

Neuporedivo

Abraham Duarte (BALCOR 2013)

Efikasnost i produktivnost

Jedinica	Ulazi		Izlazi
	Broj radnika (BR)	Vreme rada (BT)	Mesečni prihod (MP)
A	50	75	210
B	50	75	150
C	60	40	190

Efikasnost i produktivnost

- Parcijalni indikator
- MP/BR
- MP/BT

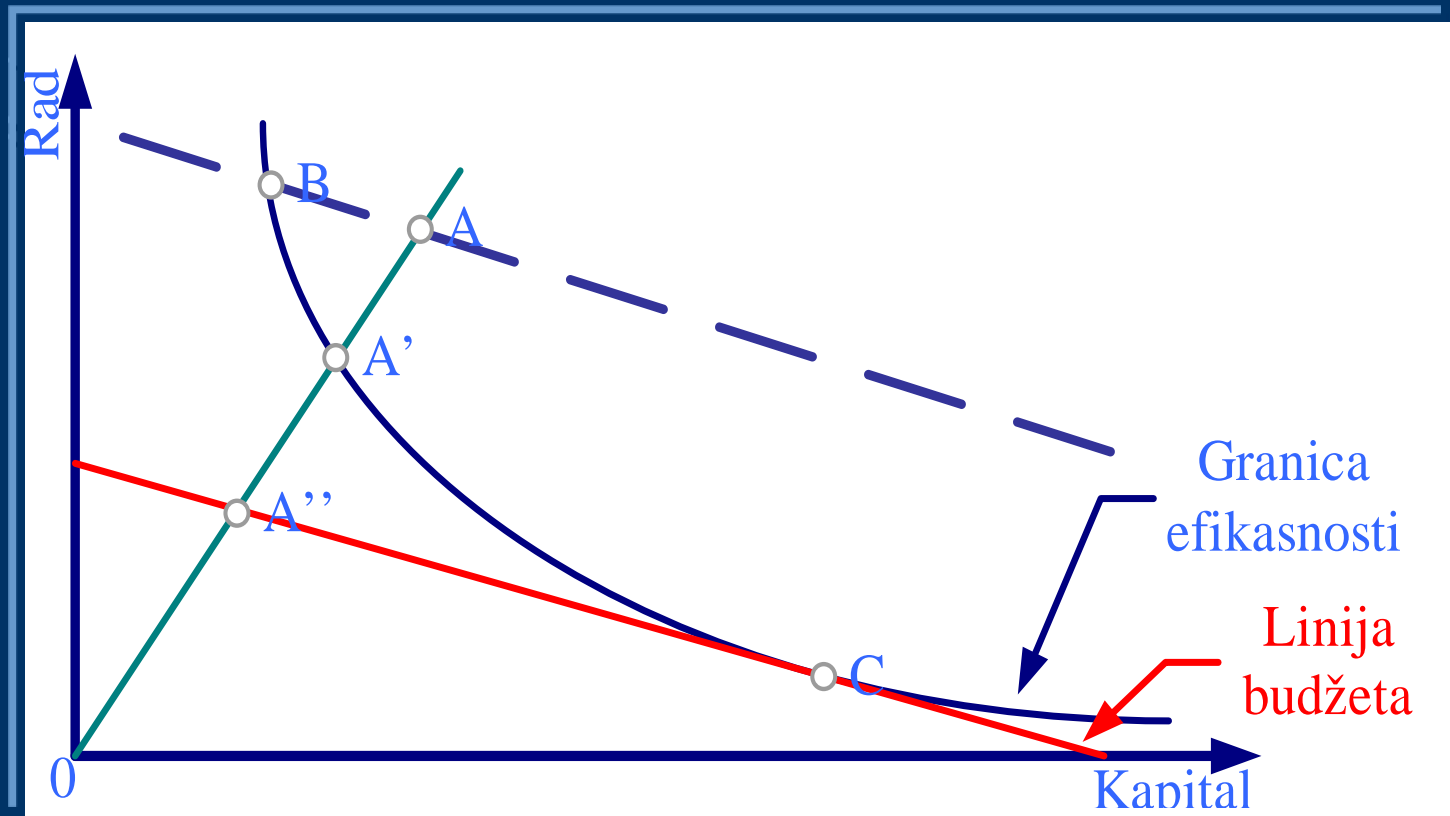
- Agregirane mere

Agregirani izlaz

Agregirani ulaz

Excel primer

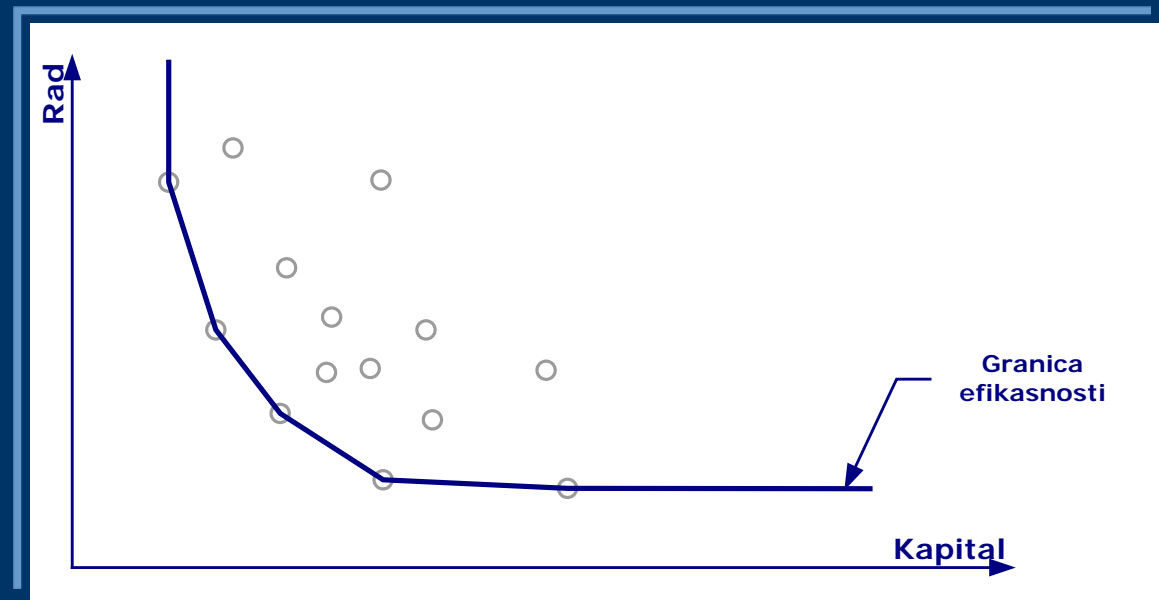
Granica efikasnosti



- Tipovi efikasnosti

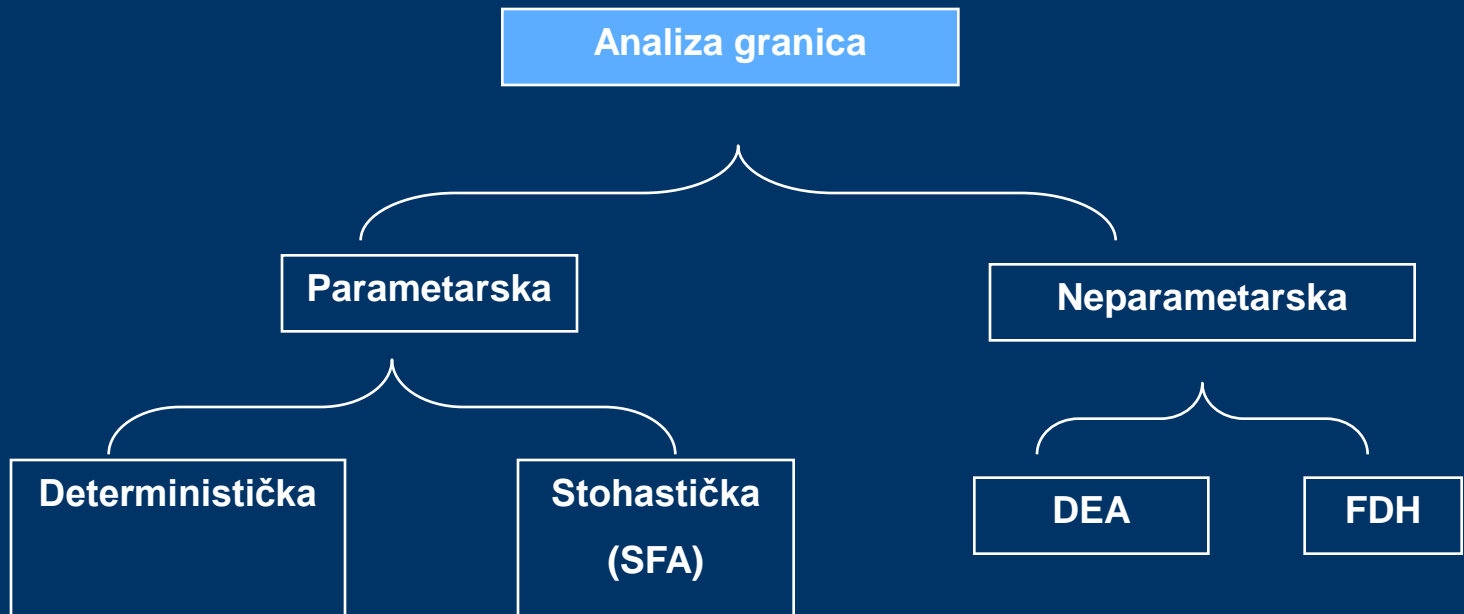
Merenje performansi

- Farrell, "The Measurement of Productive Efficiency", 1957



- Radikalna mera
- Proizvodna granica je obvojnica ili izokvanta

Tehnička efikasnost



DATA ENVELOPMENT ANALYSES - DEA

- Neparametarska tehnika za merenje efikasnosti jedinica o kojima se odlučuje (Decision making units - DMUs)
- 1978, Charnes, Cooper and Rodes
- Farelova definicija efikasnosti

Proizvidna efikasnost

- Koopmans (1951): "Dopustivi ulazno-izlazni vektor će biti efikasna ako je nemoguće povećati bilo koji izlaz i/ili smanjiti bilo koji ulaz bez simultanog smanjenja nekog drugog izlaza i/ili ulaza"
- Farrell (1957): Pareto optimalnost, Koopmans (1951) i Debreu (1951). Posmatrali su potunu efikasnost nekog sistema, razlažući ga na povezane aktivnosti (Koopmans), ili 'proizvodne jedinice' (Debreu). Farrell je uveo tehniku za posamtranje celog sistema kao jedne jedinice, za koju su poznati ulazi i izlazi i može se porediti sa ostalima u industriji.

Merenje performansi

- Analiza obavljanja podataka

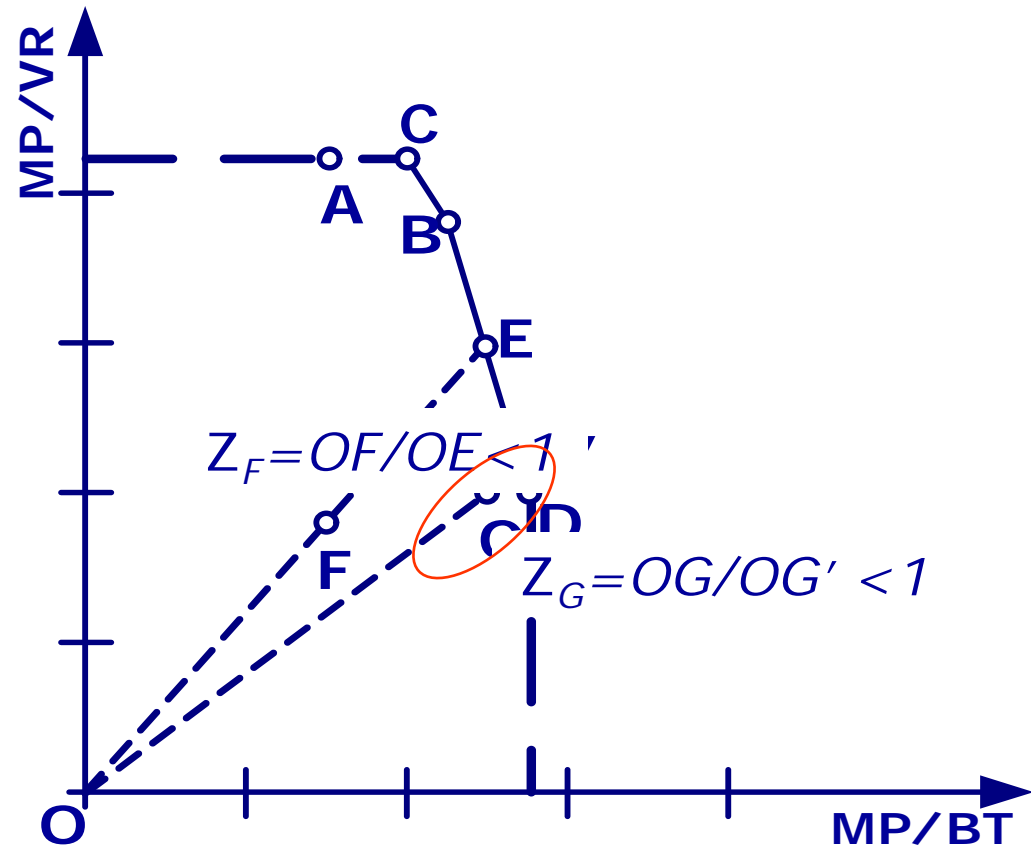
$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{težinska suma izlaza}}{\text{težinska suma ulaza}}$$

- Problem skaliranja
- Problem ponderisanja

Dva ulaza - jedan izlaz

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori	
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR
A	200	75	300	1.5	4
B	100	600	600	6	1
C	200	350	700	3.5	2
D	100	75	300	3	4
E	100	100	300	3	3
F	120	200	600	5	3
G	200	75	300	1.5	4

Granica efikasnosti



Primer

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori		Indeks efikasnosti
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR	
A	200	75	300	1.5	4	100.00%
B	100	600	600	6	1	100.00%
C	200	350	700	3.5	2	69.73%
D	100	75	300	3	4	100.00%
E	100	100	300	3	3	84.62%
F	120	200	600	5	3	100.00%

Merenje efikasnosti i DEA

- Charnes, Couper, Rhodes, "Measuring Efficiency of Decision Making Units", 1978
 - ne mora da postoji objektivan postupak za određivanje težinskih koeficijenata,
 - problem skaliranja je rešen tako što se efikasnost izražava kao broj između 0 i 1,
 - svaka jedinica ima slobodu da odredi vrednosti težinskih koeficijenata koje njoj najviše odgovaraju.

Merenje efikasnosti i DEA

Osobine DEA metode

- fokus je na pojedinačnim opservacijama nasuprot populacionim usrednjavanjima;
- ne zahteva se funkcionalna forma proizvodnog odnosa ulaz-izlaz;
- određuje se mera efikasnosti za svaku DMU u odnosu na korišćene ulaze i proizvedene izlaze;
- efikasne jedinice su Pareto optimalne;
- ukazuje se na potrebne promene ulaza i/ili izlaza sa kojima bi DMU ispod granice efikasnosti bila projektovana na granicu efikasnosti;

Osnovni CCR DEA model

Zadatak:

Odrediti efikasnosti svih DMU u posmatranom skupu

Dimenzije problema i indeksi:

n - broj DMU ($j = 1, \dots, n$)

m - broj ulaza ($i = 1, \dots, m$)

s - broj izlaza ($r = 1, \dots, s$)

Osnovni CCR DEA model

Zadati parametri

x_{ij} - posmatrani iznos ulaza i -te vrste za DMU j

$$(x_{ij} > 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n),$$

y_{rj} - posmatrani iznos izlaza r -te vrste za DMU j

$$(y_{rj} > 0, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n).$$

Osnovni CCR DEA model

Nepoznate

h_k - relativna efikasnost k - te DMU;

μ_r - težinski koeficijent za izlaz r ;

ν_i - težinski koeficijent za ulaz i .

Mera DEA efikasnosti

$$\frac{\text{virtuelni izlaz}}{\text{virtuelni ulaz}} = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}} \text{ za DMU}_k$$

CCR DEA model (CRS pretpostavka)

$$\max h_k = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}}$$

p.o

$$\frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1, j = 1, \dots, n$$

$$u_1, \dots, u_s \geq 0$$

$$v_1, \dots, v_m \geq 0$$

Linearni DEA model

$$(max) h_k = u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}$$

p.o

$$v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk} = 1$$

$$u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}$$

$$-(v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_1, \dots, u_s \geq 0$$

$$v_1, \dots, v_m \geq 0$$

Dva ulaza - jedan izlaz

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori	
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR
A	200	75	300	1.5	4
B	100	600	600	6	1
C	200	350	700	3.5	2
D	100	75	300	3	4
E	100	100	300	3	3
F	120	200	600	5	3
G	200	75	300	1.5	4

Osnovni CCR DEA model

$$(Max)h_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}$$

p.o

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Osnovni CCR DEA model

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dualni CCR DEA model

$$(Min) Z_k = -s \sum_{r=1}^s s_r^+ + s \sum_{i=1}^m \bar{s}_i^-$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \lambda_j x_{jk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - \bar{s}_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, \bar{s}_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$