

# Matematički modeli efikasnosti

dr Gordana Savic

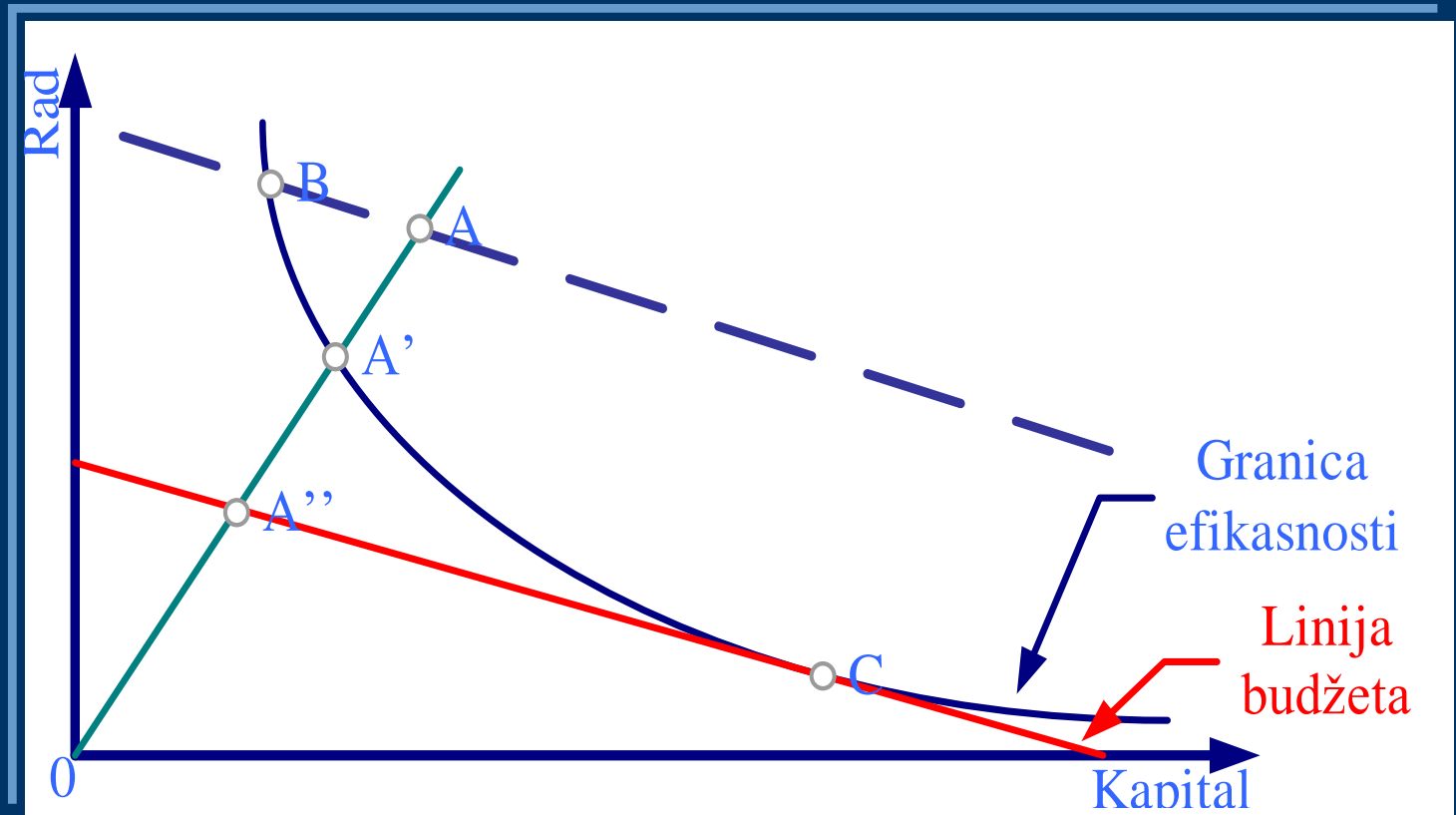
[goca@fon.bg.ac.rs](mailto:goca@fon.bg.ac.rs)

dr Milan Martić

[milan@fon.bg.ac.rs](mailto:milan@fon.bg.ac.rs)

C203

# Tipovi efikasnosti



- Tipovi efikasnosti

# Efikasnost i produktivnost

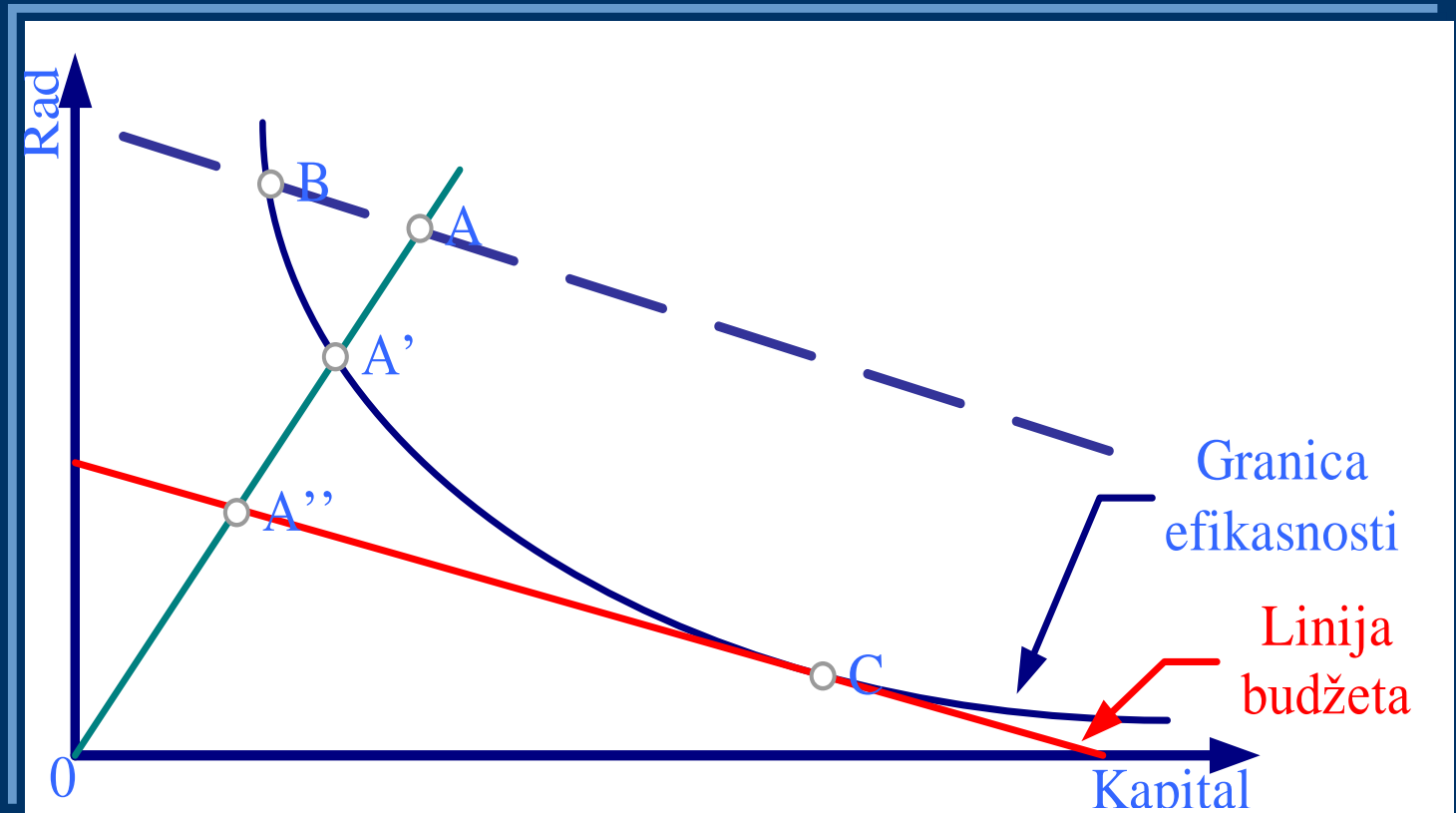
- Parcijalni indikator
- MP/BR
- MP/BT

- Agregirane mere

Agregirani izlaz

Agregirani ulaz

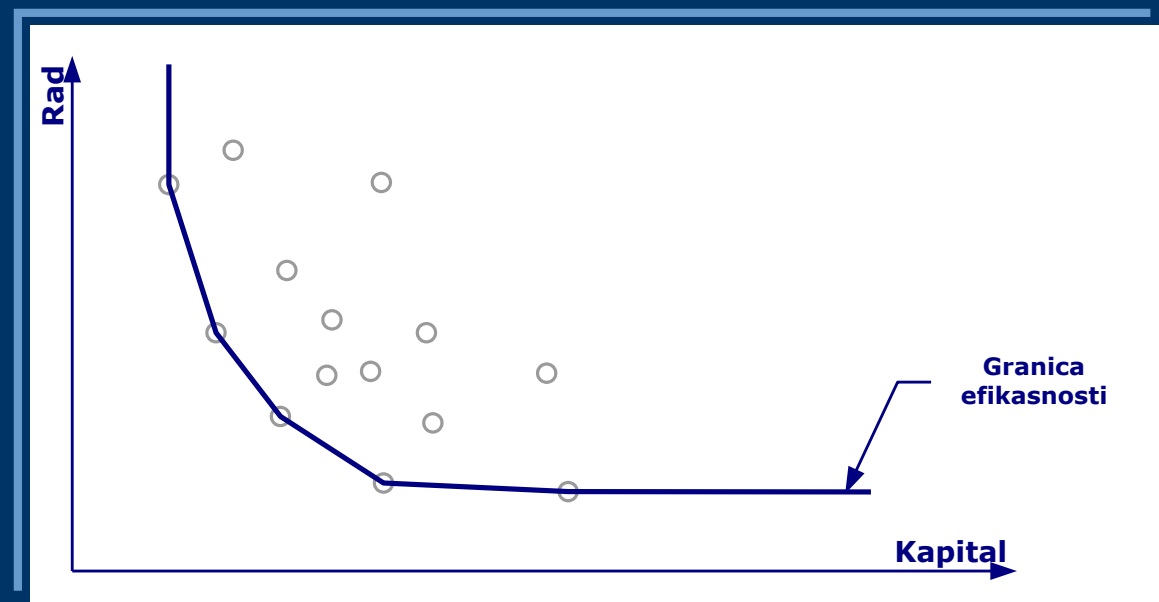
# Granica efikasnosti



- Tipovi efikasnosti

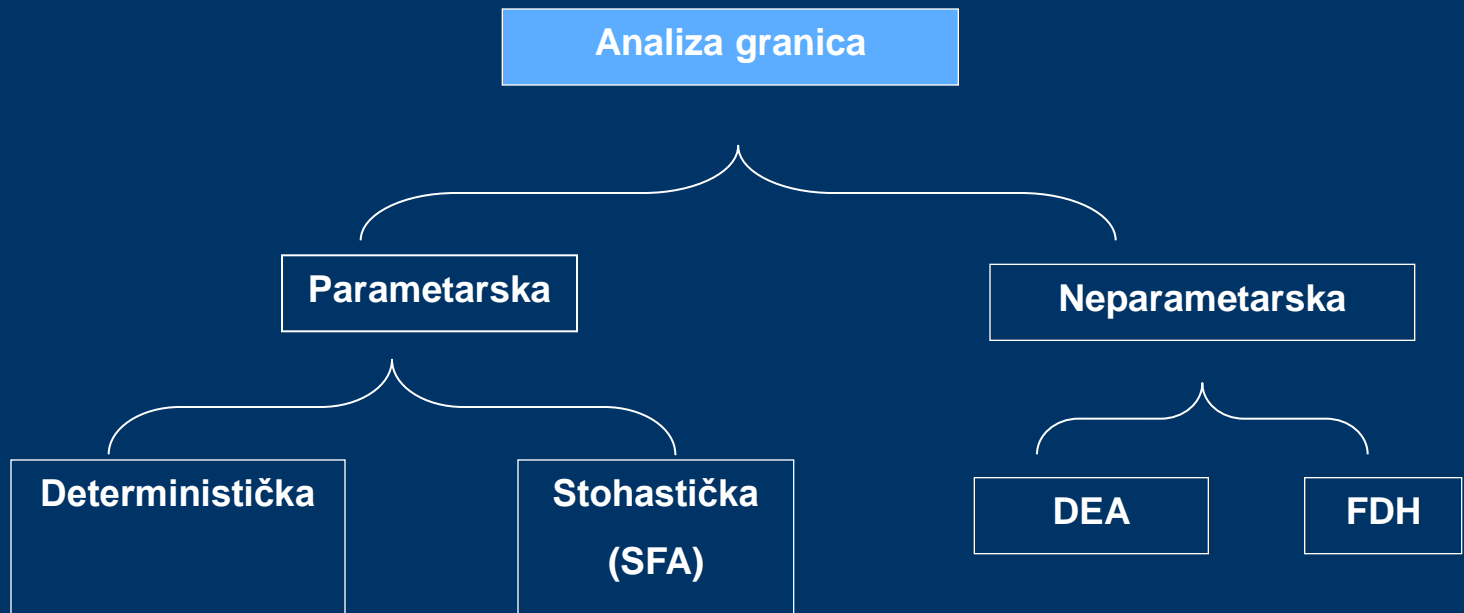
# Merenje performansi

- Farrell, "The Measurement of Productive Efficiency", 1957



- Radikalna mera
- Proizvodna granica je obvojnica ili izokvanta

# Tehnička efikasnost



## DATA ENVELOPMENT ANALYSES - DEA

- Nelinearna tehnika za merenje efikasnosti jedinica o kojima se odlučuje (Decision making units - DMUs)
- 1978, Charnes, Cooper and Rades
- Farelova definicija efikasnosti

# Proizvidna efikasnost

- Koopmans (1951): "Dopustivi ulazno-izlazni vektor će biti efikasna ako je nemoguće povećati bilo koji izlaz i/ili smanjiti bilo koji ulaz bez simultanog smanjenja nekog drugog izlaza i/ili ulaza"
- Farrell (1957): Pareto optimalnost, Koopmans (1951) i Debreu (1951). Posmatrali su potunu efikasnost nekog sistema, razlažući ga na povezane aktivnosti (Koopmans), ili 'proizvodne jedinice' (Debreu). Farrell je uveo tehniku za posamtranje celog sistema kao jedne jedinice, za koju su poznati ulazi i izlazi i može se porediti sa ostalima u industriji.



# Merenje performansi

## - Analiza obavijanja podataka

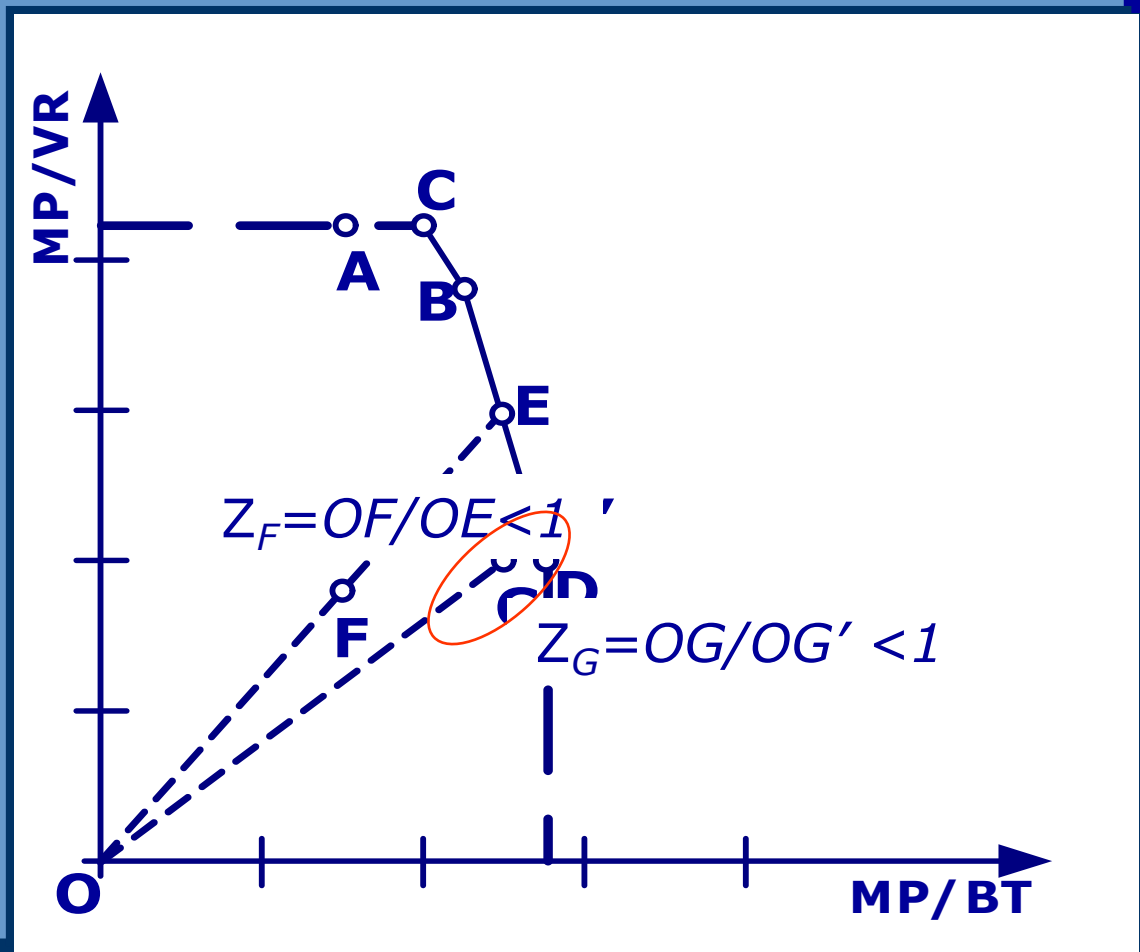
$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{težinska suma izlaza}}{\text{težinska suma ulaza}}$$

- Problem skaliranja
- Problem ponderisanja

# Dva ulaza - jedan izlaz

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori	
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR
A	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>
B	100	600	600	6	1
C	200	350	700	3.5	2
D	<b>100</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
E	100	100	300	3	3
F	120	200	600	5	3
G	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>

# Granica efikasnosti



# Primer

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori		Indeks efikasnosti
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR	
<b>A</b>	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>	<b>100.00%</b>
<b>B</b>	100	600	600	6	1	<b>100.00%</b>
<b>C</b>	200	350	700	3.5	2	69.73%
<b>D</b>	<b>100</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>100.00%</b>
<b>E</b>	100	100	300	3	3	84.62%
<b>F</b>	120	200	600	5	3	<b>100.00%</b>

# Merenje efikasnosti i DEA

- Charnes, Couper, Rhodes, "Measuring Efficiency of Decision Making Units", 1978
  - ne mora da postoji objektivan postupak za određivanje težinskih koeficijenata,
  - problem skaliranja je rešen tako što se efikasnost izražava kao broj između 0 i 1,
  - svaka jedinica ima slobodu da odredi vrednosti težinskih koeficijenata koje njoj najviše odgovaraju.

# Merenje efikasnosti i DEA

## Osobine DEA metode

- fokus je na pojedinačnim opservacijama nasuprot populacionim usrednjavanjima;
- ne zahteva se funkcionalna forma proizvodnog odnosa ulaz-izlaz;
- određuje se mera efikasnosti za svaku DMU u odnosu na korišćene ulaze i proizvedene izlaze;
- efikasne jedinice su Pareto optimalne;
- ukazuje se na potrebne promene ulaza i/ili izlaza sa kojima bi DMU ispod granice efikasnosti bila projektovana na granicu efikasnosti;

# Osnovni CCR DEA model

## Zadatak:

*Odrediti efikasnosti svih DMU u posmatranom skupu*

## Dimenzije problema i indeksi:

$n$  - broj DMU ( $j = 1, \dots, n$ )

$m$  - broj ulaza ( $i = 1, \dots, m$ )

$s$  - broj izlaza ( $r = 1, \dots, s$ )

# Osnovni CCR DEA model

## Zadati parametri

$x_{ij}$  - posmatrani iznos ulaza  $i$ -te vrste za DMU $j$

$$(x_{ij} > 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n),$$

$y_{rj}$  - posmatrani iznos izlaza  $r$ -te vrste za DMU $j$

$$(y_{rj} > 0, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n).$$



# Osnovni CCR DEA model

## Nepoznate

$h_k$  - relativna efikasnost  $k$  - te DMU;

$\mu_r$  - težinski koeficijent za izlaz  $r$ ;

$\nu_i$  - težinski koeficijent za ulaz  $i$ .

# Mera DEA efikasnosti

$$\frac{\text{virtuelni izlaz}}{\text{virtuelni ulaz}} = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}} \quad \text{za DMU}_k$$

# CCR DEA model (CRS pretpostavka)

$$\max h_k = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}}$$

*p.o*

$$\frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_1, \dots, u_s \geq 0$$

$$v_1, \dots, v_m \geq 0$$

# Linearni DEA model

$$(max) h_k = u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}$$

*p.o*

$$v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk} = 1$$

$$u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}$$

$$-(v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_1, \dots, u_s \geq 0$$

$$v_1, \dots, v_m \geq 0$$

# Dva ulaza - jedan izlaz

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori	
	Broj terminala (BT)	Vreme rada (VR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/VR
A	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>
B	100	600	600	6	1
C	200	350	700	3.5	2
D	<b>100</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
E	100	100	300	3	3
F	120	200	600	5	3
G	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>

# Osnovni CCR DEA model

$$(Max)h_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}$$

*p.o*

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

# Osnovni CCR DEA model

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}$$

*p.o*

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

# Dualni CCR DEA model

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$



# Ciljane vrednosti

$$X_k'' = Z_k^* X_k - s^{-*}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$Y_k'' = Y_k + s^{+*}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$