

# Поузданост система

## Блок дијаграми поузданости

## Повећање сложености производа

Модели трактора	Број критичних компоненти	Поузданост трактора (просечна поузданост компоненте 99,99%)	Годишњи број отказа на 1000 трактора
1935	1200	88,7%	113
1960	2250	79,9%	201
1970	2400	78,7%	213
1980	2600	77,1%	229
1990	2900	74,8%	252

Boeing 747 има 4.500.000 компоненти.

# Утицај сложености на поузданост производа

Број критичних компоненти	Поузданост индивидуалних компоненти			
	99,0%	99,9%	99,99%	99,999%
	Поузданост система (%)			
10	90,44	99,00	99,90	99,99
100	36,60	90,48	99,01	99,90
250	8,11	77,87	97,53	99,75
500	0,66	60,64	95,12	99,50
1000	<0,1	36,77	90,48	99,01
10000	<0,1	<0,1	36,79	90,48
100000	<0,1	<0,1	<0,1	36,79

# Булова алгебра - обнављање

- Вредности и променљиве могу бити само бинарне:
  - исправан/неисправан,
  - укључен/искључен,
  - истинит/лажан,
  - затворен/отворен,
  - да/не,
  - 1/0
- Принцип искључења трећег,
- Принцип одсуства контрадикције.
- Раселов парадокс “Ова реченица је погрешна.”

# Основни оператори Булове алгебре

- Оператор И (конјункција):  $x \wedge y$  ;  $x \cdot y$

“Ако пада киша и идем аутобусом, понећу кишобран.”

$x$  – пада киша,

$y$  – идем аутобусом,

$z$  – понећу кишобран

$$x \wedge y = z$$

- Таблица истинитости оператора И

$x$	$y$	$x \wedge y$
Т	Т	Т
Т	⊥	⊥
⊥	Т	⊥
⊥	⊥	⊥

$x$	$y$	$x \cdot y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

# Основни оператори Булове алгебре

- Оператор ИЛИ (дисјункција):  $x \vee y$ ;  $x+y$

“Ако пада киша или је прогнозирана киша, понећу кишобран.”

$x$  – пада киша,

$y$  – прогнозирана је киша,

$z$  – понећу кишобран

$$x \vee y = z$$

- Таблица истинитости оператора ИЛИ

$x$	$y$	$x \vee y$
Т	Т	Т
Т	⊥	Т
⊥	Т	Т
⊥	⊥	⊥

$x$	$y$	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Основни оператори Булове алгебре

- Опреатор НЕ (негација):  $\neg x$ ;  $\overline{x}$

–  $z$  - “Не идем аутомобилом.”

–  $x$  – идем аутомобилом

$$\overline{x} = z$$

- Таблица истинитости оператора НЕ

$x$	$\overline{x}$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

$x$	$\overline{x}$
1	0
0	1

# Сложени изрази

“Ако пада киша и не идем аутомобилом, понећу кишобран.”

$x$  – пада киша,

$y$  – идем аутомобилом ,

$z$  – понећу кишобран

$$x \wedge \neg y = z, \quad x \cdot \bar{y} = z$$

- Таблица истинитости

$x$	$y$	$z$
Т	Т	⊥
Т	⊥	Т
⊥	Т	⊥
⊥	⊥	⊥

$x$	$y$	$z$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0



# Основни закони Булове алгебре

- Скуп  $B = \{0, 1\}$ , са два бинарна оператора ( $+$  и  $\cdot$ ) и једним унарним оператором ( $\bar{\phantom{x}}$ ).

а) Неутрални елемент:

$$\begin{aligned}x \cdot 1 &= x \\x + 0 &= x\end{aligned}$$

б) Комплементарност:

$$\begin{aligned}x \cdot \bar{x} &= 0 \\x + \bar{x} &= 1\end{aligned}$$

в) Комутативност:

$$\begin{aligned}x \cdot y &= y \cdot x \\x + y &= y + x\end{aligned}$$

г) Асоцијативност:

$$\begin{aligned}x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\x + (y + z) &= (x + y) + z\end{aligned}$$

# Основни закони Булове алгебре

д) Дистрибутивност:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

ђ) Закон идемпотенције:

$$x \cdot x = x$$
$$x + x = x$$

е) Закон апсорпције:

$$x + (x \cdot y) = x$$
$$x \cdot (x + y) = x$$

ж) Де Морганови закони:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$
$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

# Структурна функција система

- Компоненте система  $C_1, C_2, \dots, C_J$

$$y_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако је компонента исправна} \\ 0 & \text{ако је компонента неисправна} \end{cases}$$

- Индикатор стања исправности система

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако је систем исправан} \\ 0 & \text{ако је систем неисправан} \end{cases}$$

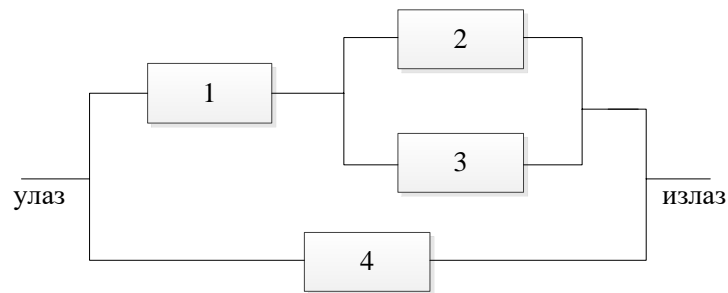
- Структурна функција система  $h(y)$  - изражава стање исправности система у зависности од стања исправности његових компоненти.

# Одређивање поузданости сложених система

- $r_j$  - поузданост (вероватноћа безотказног рада) компоненте  $C_j$ ,  $j=1, \dots, J$
- $q_j$  - непоузданост (вероватноћа отказа) компоненте  $C_j$ ,  $j=1, \dots, J$
- $R_s$  - поузданост (вероватноћа безотказног рада) система
- $Q_s$  - непоузданост (вероватноћа отказа) система

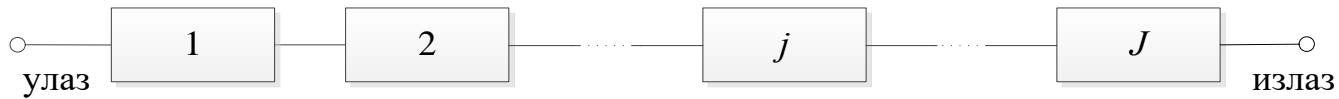
# Блок дијаграми поузданости

- *Reliability Block Diagram* – RBD
- Компоненте система представљене блоковима.
- Везе између блокова показују зависности између компоненти.
- Ако постоји бар један пут од улаза до излаза блок дијаграма, систем је успешан, у супротном систем је у отказу



# Серијски систем

- Систем је исправан ако су исправне све његове компоненте.

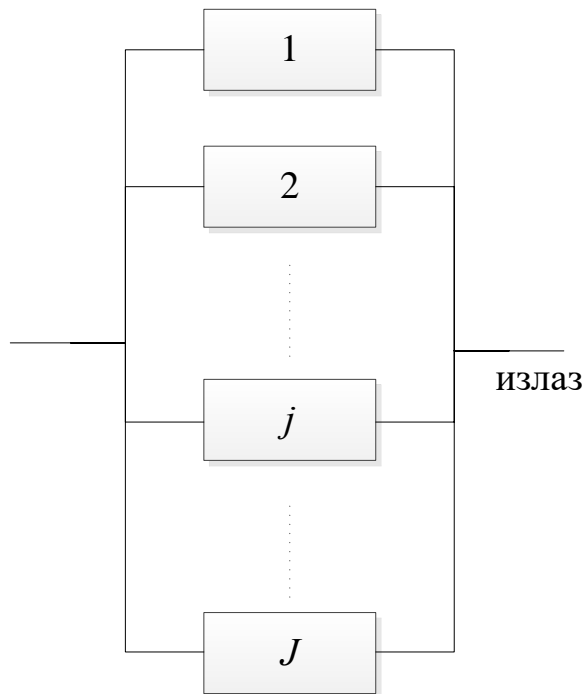


$$h(y) = \bigwedge_{j=1}^J y_j = \prod_{j=1}^J y_j$$

$$R_s = \prod_{j=1}^J r_j$$

# Паралелни систем

- Систем је исправан ако је исправна бар једна од његових компоненти.

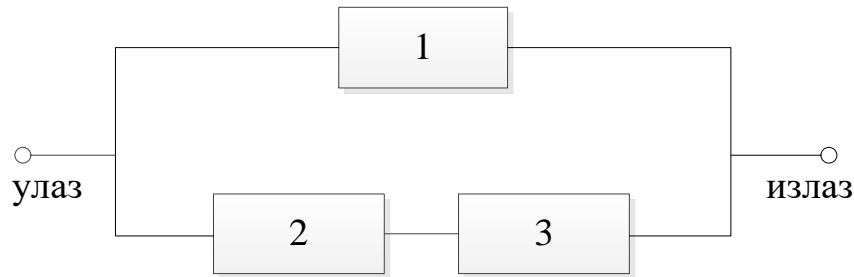


$$h(y) = \bigvee_{j=1}^J y_j = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - y_j)$$

$$R_S = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - r_j)$$

# Паралелно серијски систем

- Систем који је комбинован од серијских и паралелних веза.



$$\begin{aligned}r_1 &= 0,986 \\ r_2 &= 0,992 \\ r_3 &= 0,979\end{aligned}$$

$$h(y) = 1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_2 \cdot y_3) = y_1 + y_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$$

$$\begin{aligned}R_s &= r_1 + r_2 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \\ &= 0,986 + 0,992 \cdot 0,979 - 0,986 \cdot 0,992 \cdot 0,979 \\ &= 0,999596\end{aligned}$$

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$h(y)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



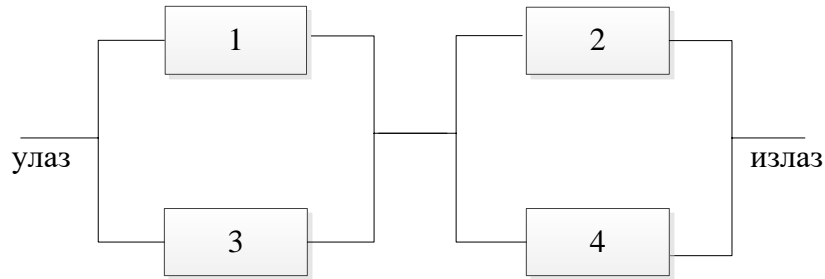
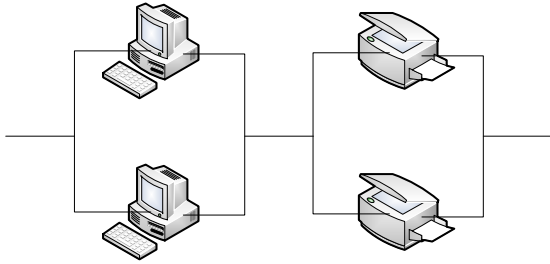
# Вежбање 1

Канцеларија поседује два рачунара и два штампача које може да повеже на један од два приказана начина.



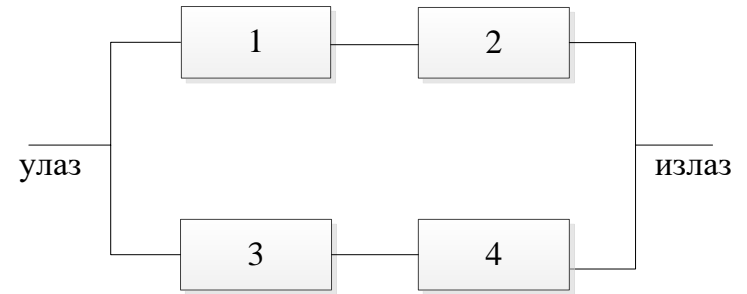
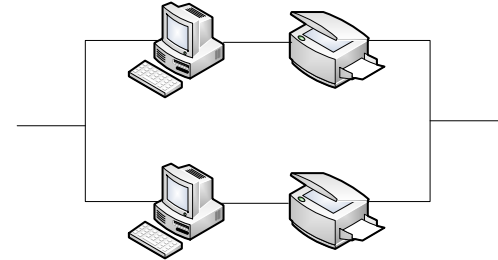
- Нацртати блок дијаграме оба система.
- Формулисати структурне функције оба система и, на основу таблица истинитости, утврдити који од система отказује у више случајева.
- Ако је поузданост рада сваког рачунара  $0,954$  а сваког штампача  $0,897$ , одредити који од ова два начина обезбеђује већу поузданост рада опреме у канцеларији.

# Вежбање 1



$$\begin{aligned}
 h_1(y) &= (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_3)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_4)) \\
 &= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\
 &\quad - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4
 \end{aligned}$$

$$R_{s1} = 0,987297$$



$$\begin{aligned}
 h_2(y) &= 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_3 \cdot y_4) \\
 &= y_1 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4
 \end{aligned}$$

$$R_{s2} = 0,979188$$

## Вежбање 2

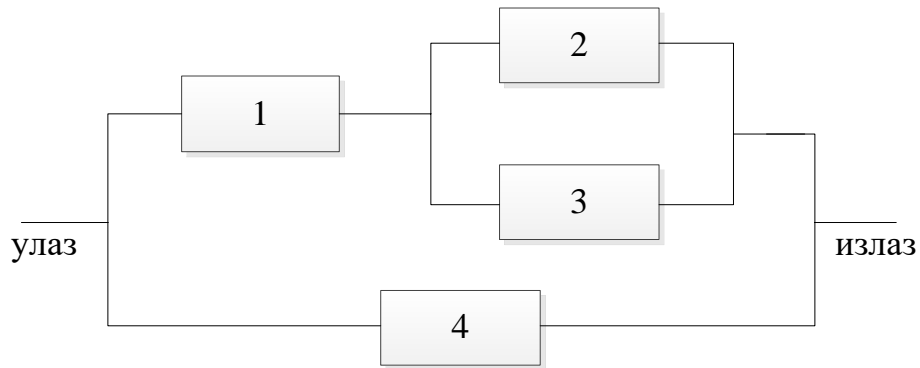
Пекара која је имала једну производну линију за производњу хлеба, набавила је нову машину. Стара производна линија се састоји из једне машине за мешење и две пећи. Производња на њој се обавља тако што се потребни састојци убаце у машину за мешење из које се добијају обликоване векне теста за хлеб. Након тога, векне се шаљу у једну од две пећи. Нова машина је савременија и у њу се убаце потребни састојци а на крају рада се добијају испечени хлебови.

- а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање производног погона пекаре.
- б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производног погона пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује и формирати таблицу истинитости за описани систем.
- б) Ако је поузданост машине за мешење једнака 0,965, обе пећи по 0,987 а нове машине 0,993, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.

1 - машина за мешење

2,3 – пећи

4 – нова машина



$$h(y) = 1 - (1 - y_1 \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_3))) \cdot (1 - y_4)$$

$$= y_4 + y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4$$

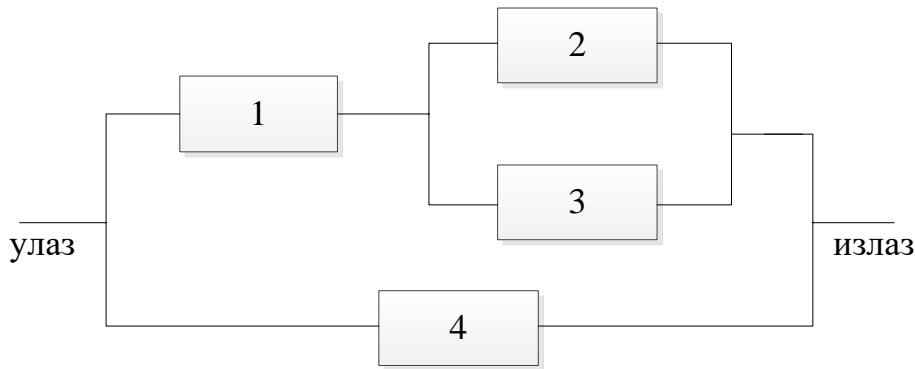
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$h(y)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$R_s = r_4 + r_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 0,999754$$

# Путеви и пресеци

- Пут је скуп компоненти чија исправност гарантује исправност система.
- Минимални пут је пут који у себи не садржи ни један други пут. Не може се редуковати а да и даље представља пут.
- Пресек је скуп компоненти које својом неисправношћу доводе до неисправности система.
- Минимални пресек је пресек који у себи не садржи ни један други пресек. Не може се редуковати а да и даље представља пресек.

## Путеви и пресеци: БДП, таблица истинитости, структурна функција



$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$h(y)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$h(y) = 1 - (1 - y_1 \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_3))) \cdot (1 - y_4)$$

$$= y_4 + y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4$$

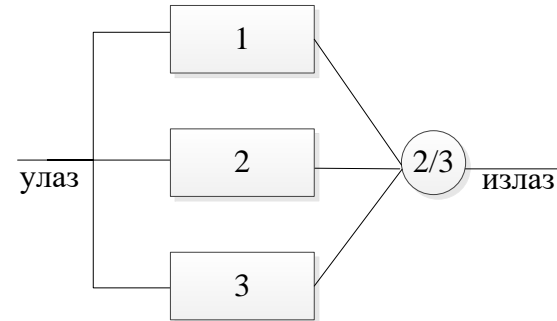
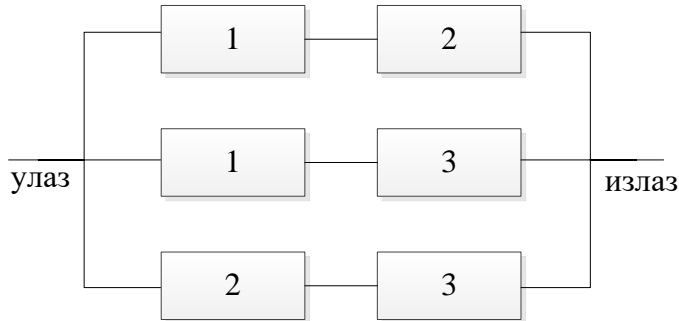
# Системи “ $k$ -од- $n$ : добар”

- Системи који се састоје од  $n$  идентичних компонента од којих је неопходно да бар  $k$  буде у исправном стању.

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{ако } \sum_{j=1}^J y_j \geq k \\ 0 & \text{ако } \sum_{j=1}^J y_j < k \end{cases}$$

$$R_s = P\left\{\sum_{j=1}^J y_j \geq k\right\} = \sum_{j=k}^J \binom{J}{j} r^j (1-r)^{J-j}$$

# Системи “2-од-3: добар”



$$h(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 1 & \text{ако } y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ 0 & \text{ако } y_1 + y_2 + y_3 < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2, y_3) &= y_1 y_2 \vee y_1 y_3 \vee y_2 y_3 = 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_1 \cdot y_3) \cdot (1 - y_2 \cdot y_3) \\ &= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \end{aligned}$$

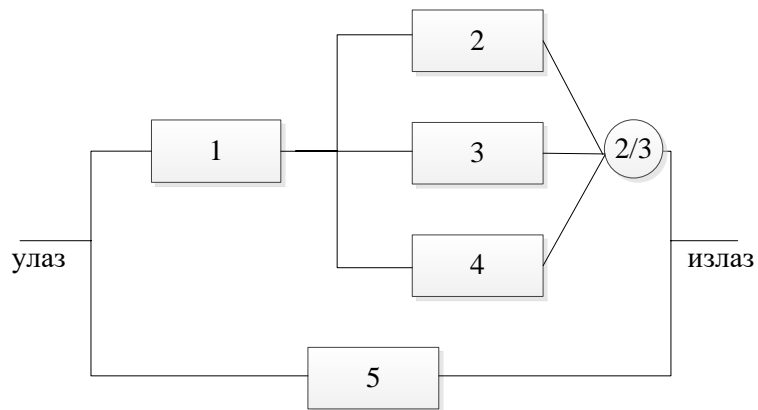
$$R_s = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$



## Вежбање 3

Посматрајмо пекару из примера 2. Нека се стара производна линија састоји из једне машине за мешење и три пећи, при чему је капацитет машине за мешење дупло већи од капацитета једне пећи. То значи да се производња на старој производној линији обавља тако што се потребни састојци убаце у машину за мешење из које се добијају обликоване векне теста за хлеб. Након тога, векне се шаљу у две од три пећи. Нова машина је савременија и у њу се убаце потребни састојци а на крају рада се добијају испечени хлебови.

- а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање производног погона пекаре.
- б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производног погона пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује.
- в) Ако је поузданост машине за мешење једнака 0,965, обе пећи по 0,987 а нове машине 0,993, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.



1 - машина за мешење

2,3,4 – пећи

5 – нова машина

$$\begin{aligned}
 h(y) = & 1 - (1 - y_1 \cdot (1 - (1 - y_2 \cdot y_3) \cdot (1 - y_2 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_4))) \cdot (1 - y_5) = \\
 & y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \\
 & - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5
 \end{aligned}$$

$$R_s = r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

$$-r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 = 0,999752$$

# Теорема декомпозиције

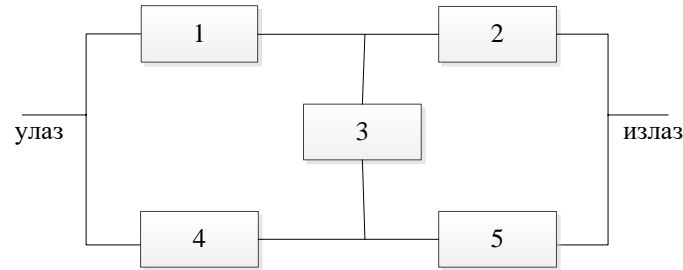
- Користи се код система који нису комбинација серијских и паралелних веза.

$$(1_j, y) = (y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_J)$$

$$(0_j, y) = (y_1, \dots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots, y_J)$$

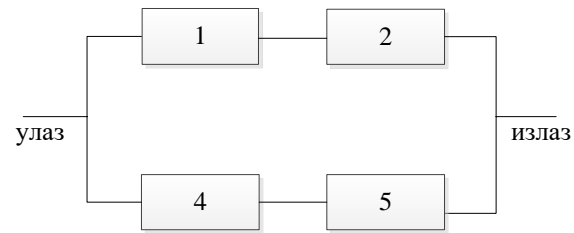
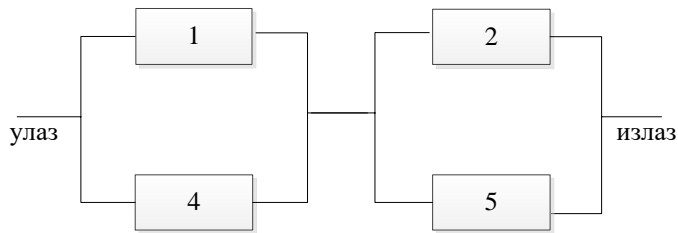
$$h(y) = y_j h(1_j, y) + (1 - y_j) h(0_j, y) \quad \text{за свако } y \text{ и свако } j=1, \dots, J$$

# Пример



$y_3=1$

$y_3=0$



$$h(1_3, y) = (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_4)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_5))$$

$$= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_5 + y_2 \cdot y_4 + y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5$$

$$h(0_3, y) = 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_4 \cdot y_5) = y_1 \cdot y_2 + y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5$$

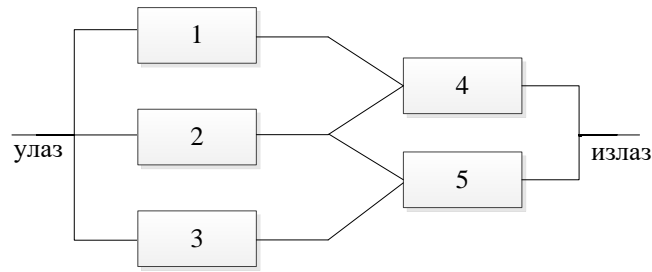
$$h(y) = y_3 h(1_3, y) + (1 - y_3) h(0_3, y)$$

$$= y_3 \cdot (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_4)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_5)) + (1 - y_3) \cdot (1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_4 \cdot y_5))$$

# Вежбање 4

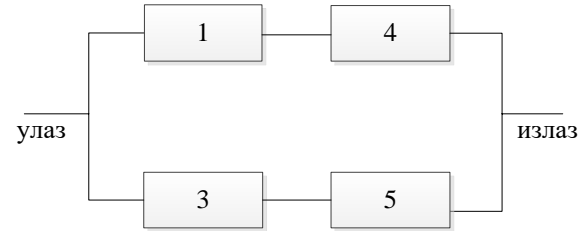
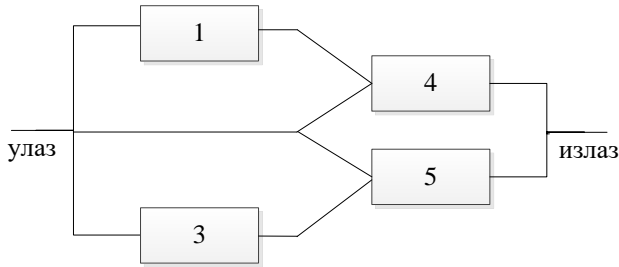
Нека се стара производна линија пекаре из примера 2 састоји из три машине за мешање (M1, M2 и M3) и две пећи (П1 и П2) и нека тесто из M1 може да се пече само у П1, тесто из M3 само у П2 а тесто из M2 може да се пече у обе пећи.

- а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање старе производне линије пекаре.
- б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производне линије пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује. Напомена: проблем посматрати само у смислу могућности пекаре да има било коју количину испечених хлебова.
- в) Ако је поузданост сваке машине за мешање једнака 0,965 а сваке пећи 0,987, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.



1 – машина М1,  
 2 – машина М2,  
 3 – машина М3,  
 4 – пећ П1,  
 5 – пећ П2

$y_2=1$        $y_2=0$



$$h(1_2, y) = (1 - (1 - y_4) \cdot (1 - y_5))$$

$$h(0_2, y) = 1 - (1 - y_1 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_5)$$

$$h(y) = y_2 h(1_2, y) + (1 - y_2) h(0_2, y)$$

$$= y_2 \cdot (1 - (1 - y_4) \cdot (1 - y_5)) + (1 - y_2) \cdot (1 - (1 - y_1 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_5))$$

$$= y_1 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_5 + y_3 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_5 - y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5$$

$$R_s = r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_5 + r_3 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 - r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 - r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$$

$$= 0,999758$$