MATEMATIČKI MODELI EFIKASNOSTI

3/2/2018

Gordana Savić, Milan Martić, Milena Popović

- Informacije o predmetu
  - Nastavnici
  - Pravila polaganja
  - Literatura
- Podsećanje
  - Linearno programiranje (LP)
  - Dualni problem LP

Informacije o predmetu

http://laboi.fon.bg.ac.rs

Osnovne studije

Izborni predmeti

Matematički modeli efikasnosti

http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page_id=53

Centar za analize efikasnosti

http://cea.fon.bg.ac.rs/ Sajt u izradi

Nastavnici

- Gordana Savić

  E:mail

  gordana.savic@fon.bg.ac.rs

  goca@fon.bg.ac.rs

  Konsultacije: C203

  Ponedeljak 12:15-13:15

- Milan Martić

  E:mail

  milan@fon.bg.ac.rs

  Konsultacije: C203

- Milena Popović

  E:mail

  milena.popovic@fon.bg.ac.rs

  Konsultacije: C309a

Pravila polaganja

1. Rad na času ili test 40 poena
2. Seminarski rad (studija slučaja) 60 poena

    Diplomski rad

Literatura

1. Krčevinac S., Čangalović M., Vujčić V., Martić M. i Vujošević M., "Operaciona istraživanja 1", FON, Beograd, 2006.,
2. Martić M., "Analiza obavijenih podataka sa primenama", FON, Beograd, 1999.,
3. Savić G., Komparativna analiza efikasnosti u finansijskom sektoru, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2012.
4. Cooper W, Seiford L, Tone K, “Introduction to Data Envelopment Analysis and its Applications, With DEA-Solver Software“, Springer, 2006

http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page_id=917

Podsećanje

Linearno programiranje (LP)

Dualni problem LP

Konstrukcija matematičkih modela

Realni sistem	Matematički model
Upravljačke odluke	Upravljačke promenljive
Kriterijum Cilj	Kriterijumska f-ja F-ja cilja
Ograničavajući faktori	Skup ograničenja tj. dopustivi skup
Optimalne upravljačke odluke	Optimalne upravljačke promenljive

Konstrukcija matematičkih modela

Matematički model	
Upravljačke promenljive	$x = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$
Kriterijumska f-ja F-ja cilja	$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x)$ $p.o.$
Skup ograničenja tj. dopustivi skup	$g_i(x) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} 0,\ \ i = 1,\ldots,m$

Linearno programiranje - LP

Linearno programiranje (LP)

- LP služi za modeliranje problema tzv. uslovne optimizacije u kojima treba naći *optimalno rešenje*, tj. ono rešenje za koje *se postiže* najbolja vrednost nekog cilja u skupu svih mogućih alternativnih rešenja problema, pri čemu svako rešanje iz ovog skupa zadovoljava zadate uslove (ograničenja).

- Pridev linearno označava da se cilj i ograničenja formalizuju linearnim jendačinama i nejednačinama.

- Termin "programiranje" se upotrebljava kao sinonim za planiranje.

Linearno programiranje (LP)

$$
\begin{array}{cccccc|c}
c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & & & \cdots & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
 & & & \cdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

p.o.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} b_m$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Linearno programiranje (LP)

$$
\begin{array}{cccccc}
c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\left|
\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
 & & & \dots & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
 & & & \dots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}
\right|
\quad
\begin{array}{c}
b_1 \\ b_2 \\ \\ b_i \\ \\ b_m
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
$$

$p.o.$

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} b_i, \quad i = 1, \dots m
$$

$$
x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots n
$$

Linearno programiranje (LP)

$$\begin{array}{cccccc}
c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 & & & \dots & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\
 & & & \dots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = C^T X$$

$p.o.$

$$A\ X \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} b$$

$$X \geq 0$$

Dualni problem LP – simetričan oblik

Primal

$$(\max)\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$p.o.$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

Dual

$$(\min)\ \phi(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$p.o.$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0$$

Primal

$$(\max) f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots m$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \ldots n$$

Dual

$$(\min) \phi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1, \ldots, n$$
$$y_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Primal

$$\left(\max\right) f(x) = C^T X$$

$p.o.$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Dual

$$\left(\min\right) \phi(y) = b^T Y$$

$p.o.$

$$A^T Y \geq C$$

$$Y \geq 0$$

Pravila za svođenje na simetričan oblik LP

- Problem minimizacije funkcije $f(x)$ može se svesti na problem maksimizacije funkcije $-f(x)$.
- Ograničenje tipa $\leq$ se, množenjem obe njegove strane sa -1, svodi na ekvivalentno ograničenje tipa $\geq$.
- Ograničenje oblika $=$ se može zameniti sa dva ograničenja $\leq$ i $\geq$.
- Ako za promenljivu x_j ne postoji nikakav uslov koji ograničava njen znak, tj. je neograničeno po znaku, tada se u problem uvodi smena $x_j = x_j^+ + x_j^-$, gde su $x_j^+ \geq 0$ i $x_j^- \leq 0$.
- Ako je promenljiva $x_j \leq 0$, tada se u problem uvodi smena $x'_j = -x_j$, gde je $x'_j \geq 0$.

$F(x)$

$\leq$

Simetrija primala i duala

- Dual duala je primal.

Formiranje duala – opšti oblik	
Primalni problem (ili dualni problem)	Dualni problem (ili Primalni problem)
max $f(x)$ (ili $\phi(y)$)	min $\phi(y)$ (ili $f(x)$)
Ograničenja primala (ili duala)	Promenljiva x_j (ili y_j)
tipa $\leq$	nenegativna
tipa $\geq$	nepozitivna
tipa $=$	neograničena po znaku
Promenljiva x_j (ili y_j)	Ograničenja duala (ili primala)
ненегативна	tipa $\leq$
непозитивна	tipa $\geq$
неограничена по знаку	tipa $=$

Svojstva

- **Slaba dualnost.**

  Ako je x dopustivno rešenje primala a y dopustivno rešenje duala tada je $f(x) \leq \phi(y)$.

  (primal: max $f(x)$, dual: min $\phi(y)$)

Svojstva

- Ako je funkcija cilja primala neograničena odozgo na njegovoj dopustivoj oblasti, tada je dopustiva oblast duala prazna.
- Ako je funkcija cilja duala neograničena odozdo na njegovoj dopustivoj oblasti, tada je dopustiva oblast primala prazna.

Svojstva

- **JAKA DUALNOST**

  Primal ima optimalno rešenje ako i samo ako dual ima optimalno rešenje, pri čemu su optimalne vrednosti funkcija cilja ova dva problema jednake.

Svojstva

- **JAKA DUALNOST**

  Primal ima optimalno rešenje ako i samo ako dual ima optimalno rešenje, pri čemu su optimalne vrednosti funkcija cilja ova dva problema jednake.