

# MATEMATIČKI MODELI EFIKASNOSTI

4/6/2020

Gordana Savić, Milan Martić, Milena Popović

- Informacije o predmetu
  - Nastavnici
  - Pravila polaganja
  - Sadržaj predmeta
  - Literatura
- Podsećanje
  - Linearno programiranje (LP)
  - Dualni problem LP
- **Merenje performansi-uvod**

# Informacije o predmetu

3

[Microsoft Teams: Matematički modeli efikasnosti](#)

<http://laboi.fon.bg.ac.rs>

Osnovne studije

Izborni predmeti

Matematički modeli efikasnosti

[http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page\\_id=53](http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page_id=53)

Centar za analize efikasnosti

<http://cea.fon.bg.ac.rs/> **Sajt u izradi**

# Nastavnici

4

- Gordana Savić

E:mail

[gordana.savic@fon.bg.ac.rs](mailto:gordana.savic@fon.bg.ac.rs)

- Milan Martić

E:mail

[milan.martic@fon.bg.ac.rs](mailto:milan.martic@fon.bg.ac.rs)

# Pravila polaganja

5

- |    |                                  |          |
|----|----------------------------------|----------|
| 1. | Rad na času ili test             | 30 poena |
| 2. | Seminarski rad (studija slučaja) | 70 poena |
|    | Diplomski rad                    |          |

# Sadržaj predmeta

6

- Mere i merenje performansi
- Razlomljeni DEA model
- DEA LP model (CRS i BCC)
- Dualni DEA model (CRS i BCC)
- Orijehtacija DEA modela
- Proširenja osnovnih DEA modela
- Procedura primene i analiza rešenja
- Primena na realnim primerima
- Studije slučaja (samostalni rad)

# Način rada

7

- Predavanja i vežbe, samostalan rad
- Studije slučaja uz korišćenje softvera
  - ▣ MS excel (solver)
  - ▣ DEA Solver Softver LV
  - ▣ EMS ...

# Literatura

8

1. Krčevinac S., Čangalović M., Vujčić V., Martić M. i Vujošević M., "Operaciona istraživanja 1", FON, Beograd, 2006.,
2. Martić M., "Analiza obavijenih podataka sa primenama", FON, Beograd, 1999.,
3. Savić G., Komparativna analiza efikasnosti u finansijskom sektoru, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2012.
4. Cooper W, Seiford L, Tone K, "Introduction to Data Envelopment Analysis and its Applications, With DEA-Solver Software", Springer, 2006

[http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page\\_id=917](http://laboi.fon.bg.ac.rs/?page_id=917)

<http://cea.fon.bg.ac.rs/>

Microsoft Teams/Matematički modeli efikasnosti



9

# Podsećanje

Linearno programiranje (LP)

Dualni problem LP

10

# Linearno programiranje - LP

# Linearno programiranje (LP)

11

- LP služi za modeliranje problema tzv. uslovne optimizacije u kojima treba naći *optimalno rešenje*, tj. ono rešenje za koje se postiže najbolja vrednost nekog cilja u skupu svih mogućih alternativnih rešenja problema, pri čemu svako rešenje iz ovog skupa zadovoljava zadate uslove (ograničenja).
- Pridev linearno označava da se cilj i ograničenja formalizuju linearnim jednačinama i nejednačinama.
- Termin “programiranje” se upotrebljava kao sinonim za planiranje.

# Linearno programiranje (LP)

12

## Promenljive i parametri

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ & & \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

## Matematički model

$$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

13

## Promenljive i parametri

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_2 & \dots & c_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ & & \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

## Matematički model

$$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

*p.o.*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_i, \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

# Linearno programiranje (LP)

14

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	
<hr/>						
$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	
$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	$b_2$
...						
$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	$b_i$
...						
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$b_m$

## Matematički model

$$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x) = C^T X$$

*p.o.*

$$AX \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b$$
$$X \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

15

## Promenljive i parametri

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_2 & \dots & c_n \end{array}$$
$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right| \leq \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{array}$$

## Matematički model – simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

# Dualni problem LP – simetričan oblik

16

## Primal

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$y_1 \longrightarrow a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

...

$$y_i \longrightarrow a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$y_m \longrightarrow a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

## Dual

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*



# Dualni problem LP – simetričan oblik

17

## Primal

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$y_1 \longrightarrow a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

...

$$y_i \longrightarrow a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$y_m \longrightarrow a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

## Dual

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*

$$x_1 \longrightarrow a_{11} y_1 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

...

# Dualni problem LP – simetričan oblik

18

## Primal

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$y_1 \longrightarrow a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

...

$$y_i \longrightarrow a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$y_m \longrightarrow a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

## Dual

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*

$$x_1 \longrightarrow a_{11} y_1 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

...

$$x_j \longrightarrow a_{1j} y_1 + \dots + a_{ij} y_i + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$$

...

# Dualni problem LP – simetričan oblik

19

## Primal

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$y_1 \longrightarrow a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

...

$$y_i \longrightarrow a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$y_m \longrightarrow a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

## Dual

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*

$$x_1 \longrightarrow a_{11} y_1 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

...

$$x_j \longrightarrow a_{1j} y_1 + \dots + a_{ij} y_i + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$$

...

$$x_n \longrightarrow a_{1n} y_1 + \dots + a_{in} y_i + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_1, \dots, y_i, \dots, y_m \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

20

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$			
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$			
$\geq$	$\geq$		$\geq$		$\geq$			
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$	$\leq$	$b_1$	$y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$	$y_2$
		$\dots$						
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i$	$y_i$
		$\dots$						
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$	$y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

21

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$		
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$		
$\geq$	$\geq$	$\dots$	$\geq$	$\dots$	$\geq$		
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$	$\leq$	$b_1$ $y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$ $y_2$
		$\dots$					
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i$ $y_i$
		$\dots$					
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$ $y_m$

## Matematički model – dual simetričan oblik

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*

$$a_{11} y_1 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$\dots$

$$a_{1j} y_1 + \dots + a_{ij} y_i + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$$

$\dots$

$$a_{1n} y_1 + \dots + a_{in} y_i + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_1, \dots, y_i, \dots, y_m \geq 0$$

## Primal

$$(\max) f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

*p.o.*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

## Dual

$$(\min) \phi(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

*p.o.*

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

**Primal**

$$(\max) f(x) = C^T X$$

*p.o.*

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

**Dual**

$$(\min) \phi(y) = b^T Y$$

*p.o.*

$$A^T Y \geq C$$

$$Y \geq 0$$

# Pravila za svodenje na simetričan oblik LP

24

- Problem minimizacije funkcije  $f(x)$  može se svesti na problem maksimizacije funkcije  $-f(x)$ .
- Ograničenje tipa  $\leq$  se, množenjem obe njegove strane sa  $-1$ , svodi na ekvivalentno ograničenje tipa  $\geq$ .
- Ograničenje oblika  $=$  se može zameniti sa dva ograničenja  $\leq$  i  $\geq$ .
- Ako za promenljivu  $x_j$  ne postoji nikakav uslov koji ograničava njen znak, tj. je neograničeno po znaku, tada se u problem uvodi smena  $x_j = x_j^+ + x_j^-$ , gde su  $x_j^+ \geq 0$  i  $x_j^- \leq 0$ .
- Ako je promenljiva  $x_j \leq 0$ , tada se u problem uvodi smena  $x'_j = -x_j$ , gde je  $x'_j \geq 0$ .



# Simetrija primala i duala

25

- Dual duala je primal.

Formiranje duala – opšti oblik	
Primalni problem (ili dualni problem)	Dualni problem (ili Primalni problem)
$\max f(x)$ (ili $\phi(y)$ )	$\min \phi(y)$ (ili $f(x)$ )
Ograničenja primala (ili duala)	Promenljiva $x_j$ (ili $y_j$ )
tipa $\leq$	nenegativna
tipa $\geq$	nepozitivna
tipa $=$	neograničena po znaku
Promenljiva $x_j$ (ili $y_j$ )	Ograničenja duala (ili primala)
nenegativna	tipa $\geq$
nepozitivna	tipa $\leq$
neograničena po znaku	tipa $=$

# Linearno programiranje (LP)

26

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$			
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$			
$\geq$	$\geq$	$\dots$	$\geq$	$\dots$	$\geq$			
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$	$\geq$	$b_1$	$y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$	$y_2$
		$\dots$						
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i$	$y_i$
		$\dots$						
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$	$y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

27

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$		
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$		
$\geq$	$\geq$	$\dots$	$\geq$	$\dots$	$\geq$		
$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\dots$	$-a_{1j}$	$\dots$	$-a_{1n}$	$\leq$	$-b_1$ $y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$ $y_2$
		$\dots$					
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i$ $y_i$
		$\dots$					
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$ $y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$-a_{11}x_1 - \dots - a_{1j}x_j - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

# Simetrija primala i duala

□ Dual duala je primal.

Formiranje duala – opšti oblik	
Primalni problem (ili dualni problem)	Dualni problem (ili Primalni problem)
$\max f(x)$ (ili $\phi(y)$ )	$\min \phi(y)$ (ili $f(x)$ )
Ograničenja primala (ili duala)	Promenljiva $x_j$ (ili $y_j$ )
tipa $\leq$	nenegativna
tipa $\geq$	nepozitivna
tipa $=$	neograničena po znaku
Promenljiva $x_j$ (ili $y_j$ )	Ograničenja duala (ili primala)
nenegativna	tipa $\leq$
nepozitivna	tipa $\geq$
neograničena po znaku	tipa $=$

# Linearno programiranje (LP)

29

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$		
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$		
$\geq$	$\geq$		$\geq$		$\geq$		
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$	$=$	$b_1$ $y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$ $y_2$
		$\dots$					
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i$ $y_i$
		$\dots$					
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$ $y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

30

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$		
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$		
$\geq$	$\geq$		$\geq$		$\geq$		
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$	$\geq$	$b_1 \quad y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2 \quad y_2$
		$\dots$					
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$	$\leq$	$b_i \quad y_i$
		$\dots$					
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m \quad y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \begin{matrix} \geq b_1 \\ \leq b_1 \end{matrix}$$

...

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

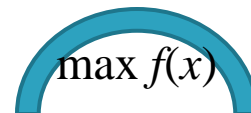
# Svojstva

31

## □ SLABA DUALNOST.

Ako je  $x$  dopustivno rešenje primala a  $y$  dopustivno rešenje duala tada je  $f(x) \leq \phi(y)$ .

(primal:  $\max f(x)$ , dual:  $\min \phi(y)$ )



# Svojstva

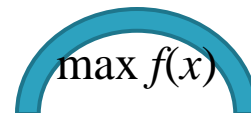
32

## ▣ JAKA DUALNOST

Primal ima optimalno rešenje ako i samo ako dual ima optimalno rešenje, pri čemu su optimalne vrednosti funkcija cilja ova dva problema jednake  $f(x) = \phi(y)$ .



$\min \phi(y)$



$\max f(x)$



**Primal**

$$(\max) f(x) = C^T X$$

*p.o.*

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$



$$C^T X = b^T Y$$

**Dual**

$$(\min) \phi(y) = b^T Y$$

*p.o.*

$$A^T Y \geq C$$

$$Y \geq 0$$

# Svojstvo komplementarne dopunjivosti

34

$$s_i^* \cdot y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad x_j^* \cdot z_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

( $s_i^*$  izravnavajuća promenljiva uvedena u  $i$ -to ograničenje)

$$(\max) f(x) = C^T X \qquad (\min) \phi(y) = b^T Y$$

*p.o.*

*p.o.*

$$AX + s = b$$

$$X, s \geq 0$$

$$A^T Y - z = C$$

$$Y, z \geq 0$$

$$AX + s = b \Rightarrow s = b - Ax$$

$$A^T Y + z \leq C \Rightarrow z = C - A^T Y$$

$$C^T X = b^T Y$$

# Linearno programiranje (LP)

35

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	$s_1$	$s_2$	$s_i$	$s_m$	
$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	$c_{n+1}$	$c_{n+2}$	$c_{n+i}$	$c_{n+m}$	
=	=		=		=	=	=	=	=	
$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	1	0	0	0	$=b_1$ $y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	0	1	0	0	$=b_2$ $y_2$
		...								
$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	0	0	...	1	$=b_i$ $y_i$
		...								
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	0	0	0	1	$=b_m$ $y_m$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n, s_1, \dots, s_i, \dots, s_m \geq 0$$

# Simpleks metoda – tabelarni oblik ( $k$ -ta iteracija, $k=0,1,\dots$ )

36

$$(\max) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$

⋮

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, s_1, \dots, s_m \geq 0$$

Bazne promenljive		Vrednosti baznih promenljivih		$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	$c_{n+1}$	$c_{n+2}$	...	$c_{n+m}$
Baza	KŠČ	$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	$c_{n+1}$	$c_{n+2}$	...	$c_{n+m}$		
$c_i$	$(X_B)$	$(b)$	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	$s_1$	$s_2$	...	$s_m$	
$c_{n+1}$	$s_1^k$	$b_1^k$	$a_{11}^k$	$a_{12}^k$	...	$\underline{a_{1j}^k}$	...	$a_{1n}^k$	1	0	...	0	
$c_{n+2}$	$s_2^k$	$b_2^k$	$a_{21}^k$	$a_{22}^k$	...	$\underline{a_{2j}^k}$	...	$a_{2n}^k$	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$c_{n+i}$	$\underline{s_i^k}$	$b_i^k$	⋮	...	...	$\underline{a_{ij}^k}$	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$c_{n+m}$	$s_m^k$	$b_m^k$	$a_{m1}^k$	$a_{m2}^k$	...	$\underline{a_{mj}^k}$	...	$a_{mn}^k$	0	0	...	1	
	$-f$	$-f(x)$	$c_1^k$	$c_2^k$	...	$\underline{c_j^k}$	...	$c_n^k$	0	0	...	0	

Keoficijenti  $f$ -je cilja u  
nultoj iteraciji ( $k=0$ )

Promenljive

Keoficijenti  $f$ -je cilja u  
 $k$ -toj iteraciji

# Linearno programiranje (LP)

37

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	$s_1$	$s_2$	$s_i$	$s_m$		
$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	0	0	0	0		
=	=		=		=	=	=	=	=		
$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	1	0	0	0	$=b_1$	$y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	0	1	0	0	$=b_2$	$y_2$
		...									
$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	0	0	...	1	$=b_i$	$y_i$
		...									
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	0	0	0	1	$=b_m$	$y_m$

$$X_B = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_m\} = \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_m\}$$

$$X_N = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\} = \{0, \dots, 0, \dots, 0\}$$

## Matematički model – primal simetričan oblik

$$(\max) f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

*p.o.*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

...

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_j, \dots, x_n, s_1, \dots, s_i, \dots, s_m \geq 0$$

$$\{y_1, \dots, y_i, \dots, y_m\} = \{0, \dots, 0, \dots, 0\}$$

$$\{z_1, \dots, z_j, \dots, z_n\} \geq 0$$

# Linearno programiranje (LP)

38

## Promenljive i parametri

$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	$s_1$	$s_2$	$s_i$	$s_m$		
$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	0	0	0	0		
=	=		=		=	=	=	=	=		
$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	1	0	0	0	$=b_1$	$y_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	0	1	0	0	$=b_2$	$y_2$
		...									
$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	0	0	...	1	$=b_i$	$y_i$
		...									
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	0	0	0	1	$=b_m$	$y_m$

## Matematički model – dual simetričan oblik

$$(\min) \phi(y) = b_1 y_1 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$$

*p.o.*

$$a_{11} y_1 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1} y_m - z_1 = c_1$$

...

$$a_{1j} y_1 + \dots + a_{ij} y_i + \dots + a_{mj} y_m - z_j = c_j$$

...

$$a_{1n} y_1 + \dots + a_{in} y_i + \dots + a_{mn} y_m - z_n = c_n$$

$$y_1, \dots, y_i, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n \geq 0$$

$$X_B = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_m\} = \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_m\}$$

$$X_N = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\} = \{0, \dots, 0, \dots, 0\}$$

$$\{y_1, \dots, y_i, \dots, y_m\} = \{0, \dots, 0, \dots, 0\}$$

$$\{z_1, \dots, z_j, \dots, z_n\} \geq 0$$

# Primal-Dual

## primer

39

- Jedan proizvođač proizvodi tri proizvoda (P1, P2, P3) i prodaje ih po jediničnoj ceni 6, 9 i 24n.j. respektivno.
- Preduzeće u sledećih mesec dana nabavlja 5 i 2t sirovina S1 i S2. Utrošak po jedinici proizvoda je dat tabelarno:

Utrošak	P1	P2	P3
S1	1	0	3
S2	0	1	2

- Odrediti koliko treba da se proizvede P1, P2 i P3 ako želi da se maksimizira ukupna prodajna cena.

# Primer

Utrošak	P1	P2	P3
S1	1	0	3
S2	0	1	2
PC	6	9	24

40

## Realni sistem

### Upravljačke odluke:

količina proizvoda P1, P2 i P3 respektivno

**Kriterijum upravljanja:** Ukupna PC

**Cilj:** max

### Ograničavajući faktori:

Količina S1

Količina S2

## Matematički model

$x_1, x_2, x_3$

$$\max \phi(y) = 6x_1 + 9x_2 + 24x_3$$

*p.o.*

$$x_1 + x_3 \leq 5$$

$$x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



# Primer

41

## Realni sistem

### Upravljačke odluke:

količina proizvoda P1, P2 i P3 respektivno

**Kriterijum upravljanja:** Ukupna PC

**Cilj:** max

### Ograničavajući faktori:

Količina S1

Količina S2

## Matematički model

$x_1, x_2, x_3$

$$\max \phi(y) = 6x_1 + 9x_2 + 24x_3$$

*p.o.*

$$x_1 + x_3 + s_1 = 5$$

$$x_2 + 2x_3 + s_2 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

<b>T3</b>	Optimalno		6	9	24	0	0
$c_i$	Baza	KSČ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$
6	$x_1$	5	1	0	3	1	0
9	$x_2$	2	0	1	2	0	1
	$-f$	-48	0	0	-12	-6	-9

$$\max \phi(y) = 6x_1 + 9x_2 + 24x_3$$

*p.o.*

$$x_1 + x_3 + s_1 = 5$$

$$x_2 + 2x_3 + s_2 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

$$c_j^k = y_j^k$$

$$X_B^* = \{x_1^*, x_2^*\} = \{5, 2\}$$

$$f(X^*) = 48$$

# Primer

43

## Primal

$x_1, x_2, x_3$

$$\max \phi(x) = 6x_1 + 9x_2 + 24x_3$$

*p.o.*

$$y_1 \rightarrow x_1 + x_3 \leq 5$$

$$y_2 \rightarrow x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## Dual

$y_1, y_2$

$$\min \phi(y) = 5y_1 + 2y_2$$

*p.o.*

$$x_1 \rightarrow y_1 \geq 6$$

$$x_2 \rightarrow y_2 \geq 9$$

$$x_3 \rightarrow y_1 + 2y_2 \geq 24$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

# Dual

44

## Realni sistem

### Upravljačke odluke:

Ukupna cena sirovina S1, S2 respektivno

**Kriterijum upravljanja:** Ukupni trošak

**Cilj:** min

### Ograničavajući faktori:

Cena sirovina za P1

Cena sirovina za P2

Cena sirovina za P3

## Matematički model

$y_1, y_2$

$$\min \phi(y) = 5y_1 + 2y_2$$

*p.o.*

$$x_1 \rightarrow y_1 \geq 6$$

$$x_2 \rightarrow y_2 \geq 9$$

$$x_3 \rightarrow y_1 + 2y_2 \geq 24$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

# Optimalno rešenje duala

45

<b>T2</b>	Baza	KSČ	5	2	0	0	0
$c_j$	$(Y_B)$	$(c_j)$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
5	$y_1$	6	1	0	1	0	0
0	$z_2$	12	0	0	0	1	1
2	$y_2$	9	0	1	0	-1	0
	$-\phi$	-48	0	0	-5	-2	0

$$\min \phi(y) = 5y_1 + 2y_2$$

*p.o.*

$$x_1 \rightarrow y_1 - z_1 = 6$$

$$x_2 \rightarrow y_2 - z_2 = 9$$

$$x_3 \rightarrow y_1 + 2y_2 - z_3 = 24$$

$$y_1, y_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

$$Y_B^* = \{y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{6, 9, 0, 0, 12\}$$

$$f(X^*) = 48$$

# Primal-dual (Ekonomaska interpretacija)

46

- Ako bi se raspoloživa količina  $i$ -tog resursa povećala za  $\varepsilon$ , tada bi se maksimalni profit  $f(x^*)$  povećao za  $\varepsilon y_i^*$ . (marginalna dobit)
- $y_i^*$  - “cena u senci”.

# Primal-dual (Ekonomaska interpretacija)

47

## Primal

<b>T3</b>	Baza	KSČ	6	9	24	0	0
$c_i$	$(X_B)$	$(b_i)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$
6	$x_1$	5	1	0	3	1	0
9	$x_2$	2	0	1	2	0	1
	$-f$	-48	0	0	-12	-6	-9
			↑	↑	↑	↑	↑
			$z_1$	$z_2$	$z_3$	$y_1$	$y_2$

## Dual

<b>T2</b>	Baza	KSČ	5	2	0	0	0
$c_i$	$(Y_B)$	$(c_j)$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
5	$y_1$	6	1	0	1	0	0
0	$z_3$	12	0	0	0	1	1
2	$y_2$	9	0	1	0	-1	0
	$-\phi$	-48	0	0	-5	-2	0
			↑	↑	↑	↑	↑
			$s_1$	$s_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$

- Ako se vrednost prvog ograničenja poveća za 1, vrednost funkcije cilja se povećava za 6 ( $y_1=6$ )
- Ako se vrednost drugog ograničenja poveća za 1, vrednost funkcije cilja se povećava za 9 ( $y_2=9$ )

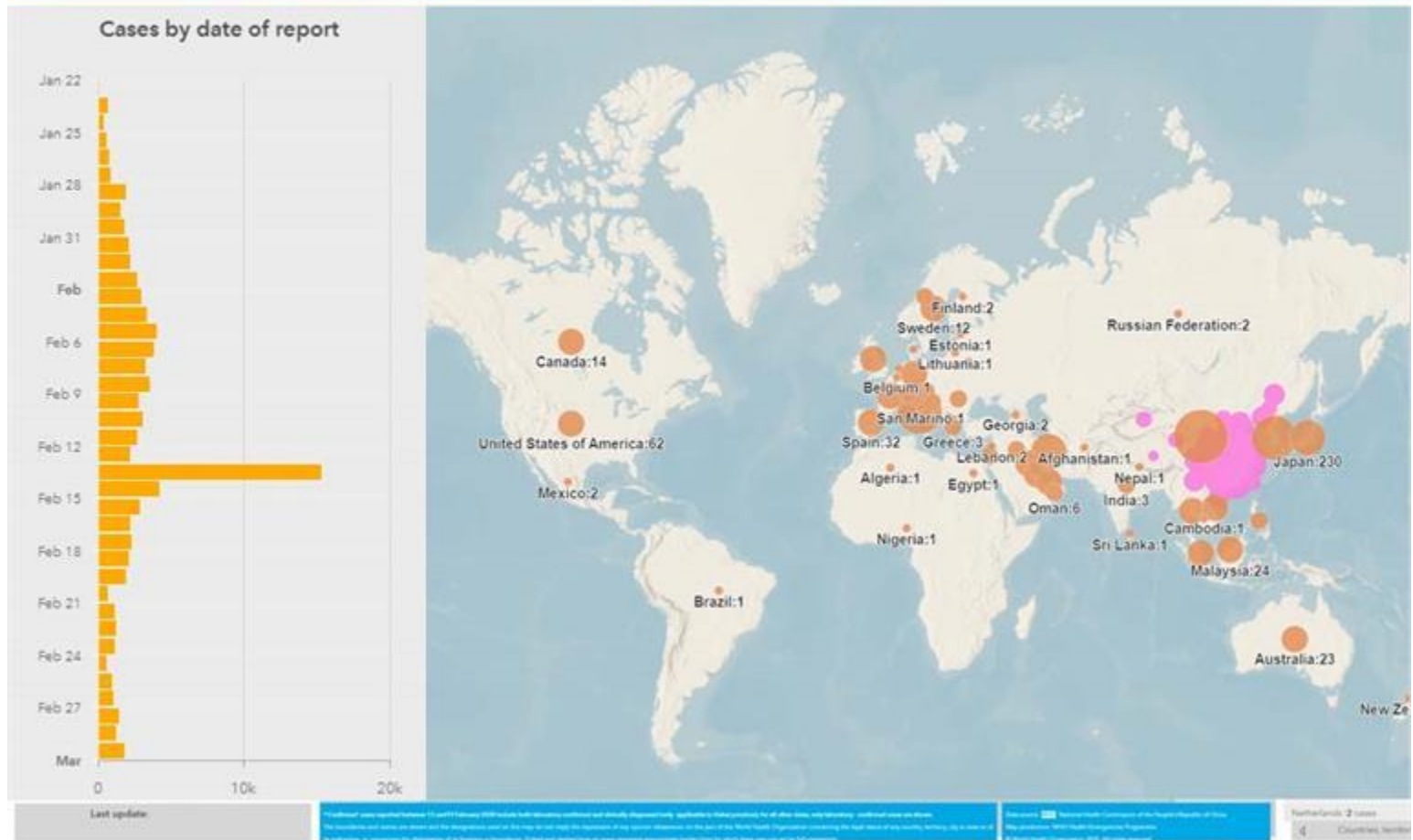
48

# Merenje performansi



Country,	Total	New	Total	New	Total	Active	Serious,	Tot Cases/	Deaths/
3.4.2020.	Cases	Cases	Deaths	Deaths	Recovered	Cases	Critical	1M pop	1M pop
<a href="#">USA</a>	273,777	28,900	7,028	958	12,044	254,705	5,787	827	21
<a href="#">Italy</a>	119,827	4,585	14,681	766	19,758	85,388	4,068	1,982	243
<a href="#">Spain</a>	119,199	7,134	11,198	850	30,513	77,488	6,416	2,549	240
<a href="#">Germany</a>	91,159	6,365	1,275	168	24,575	65,309	3,936	1,088	15
<a href="#">China</a>	81,620	31	3,322	4	76,571	1,727	379	57	2
<a href="#">France</a>	64,338	5,233	6,507	1,120	14,008	43,823	6,662	986	100
<a href="#">Iran</a>	53,183	2,715	3,294	134	17,935	31,954	4,035	633	39
<a href="#">UK</a>	38,168	4,450	3,605	684	135	34,428	163	562	53
<a href="#">Turkey</a>	20,921	2,786	425	69	484	20,012	1,251	248	5
<a href="#">Switzerland</a>	19,606	779	591	55	4,846	14,169	348	2,265	68
<a href="#">Belgium</a>	16,770	1,422	1,143	132	2,872	12,755	1,205	1,447	99
<a href="#">Netherlands</a>	15,723	1,026	1,487	148	250	13,986	1,324	918	87
<a href="#">Canada</a>	12,375	1,092	208	35	2,186	9,981	120	328	6
<a href="#">Austria</a>	11,506	377	168	10	2,022	9,316	245	1,278	19
<a href="#">S. Korea</a>	10,062	86	174	5	6,021	3,867	55	196	3
<a href="#">Portugal</a>	9,886	852	246	37	68	9,572	245	970	24
<a href="#">Brazil</a>	9,056	1,012	359	35	127	8,570	296	43	2
<a href="#">Israel</a>	7,428	571	40	4	338	7,050	113	858	5
<a href="#">Sweden</a>	6,131	563	358	50	205	5,568	469	607	35
<a href="#">Norway</a>	5,370	223	59	9	32	5,279	96	991	11
<a href="#">Australia</a>	5,350	36	28	3	585	4,737	85	210	1
<a href="#">Ireland</a>	4,273	424	120	22	5	4,148	109	865	24
<a href="#">Serbia</a>	1,476	305	39	8	54	1,383	81	169	4
<a href="#">Panama</a>	1,475		37		10	1,428	50	342	9
<a href="#">Iceland</a>	1,364	45	4		309	1,051	12	3,997	12
<a href="#">Colombia</a>	1,267	106	25	6	55	1,187	50	25	0.5
<a href="#">Argentina</a>	1,265		39	3	266	960		28	0.9
<a href="#">UAE</a>	1,264	240	9	1	108	1,147	2	128	0.9
<a href="#">Algeria</a>	1,171	185	105	19	62	1,004		27	2
<a href="#">Singapore</a>	1,114	65	5	1	282	827	24	190	0.9
<a href="#">Croatia</a>	1,079	68	8	1	92	979	39	263	2

Country,	Total	New	Total	New	Total	Active	Serious,	Tot Cases/	Deaths/
3.4.2020.	Cases	Cases	Deaths	Deaths	Recovered	Cases	Critical	1M pop	1M pop
<a href="#">USA</a>	244,877	29,874	6,071	969	10,403	228,403	5,421	740	18
<a href="#">Italy</a>	115,242	4,668	13,915	760	18,278	83,049	4,053	1,906	230
<a href="#">Spain</a>	112,065	7,947	10,348	961	26,743	74,974	6,092	2,397	221
<a href="#">Germany</a>	84,794	6,813	1,107	176	22,440	61,247	3,936	1,012	13
<a href="#">China</a>	81,589		3,318		76,408	1,863	429	57	2
<a href="#">France</a>	59,105	2,116	5,387	1,355	12,428	41,290	6,399	905	83
<a href="#">Iran</a>	50,468	2,875	3,160	124	16,711	30,597	3,956	601	38
<a href="#">UK</a>	33,718	4,244	2,921	569	135	30,662	163	497	43
<a href="#">Switzerland</a>	18,827	1,059	536	48	4,013	14,278	348	2,175	62
<a href="#">Turkey</a>	18,135	2,456	356	79	415	17,364	1,101	215	4
<a href="#">Belgium</a>	15,348	1,384	1,011	183	2,495	11,842	1,144	1,324	87
<a href="#">Netherlands</a>	14,697	1,083	1,339	166	250	13,108	1,053	858	78
<a href="#">Canada</a>	11,283	1,552	173	59	1,979	9,131	120	299	5
<a href="#">Austria</a>	11,129	418	158	12	1,749	9,222	227	1,236	18
<a href="#">S. Korea</a>	9,976	89	169	4	5,828	3,979	55	195	3
<a href="#">Portugal</a>	9,034	783	209	22	68	8,757	230	886	20
<a href="#">Brazil</a>	8,044	1,164	324	82	127	7,593	296	38	2
<a href="#">Israel</a>	6,857	765	36	10	338	6,483	107	792	4
<a href="#">Sweden</a>	5,568	621	308	69	103	5,157	429	551	30
<a href="#">Australia</a>	5,314	266	25	2	585	4,704	50	208	1
<a href="#">Norway</a>	5,147	270	50	6	32	5,065	96	949	9
<a href="#">Czechia</a>	3,858	269	44	5	67	3,747	72	360	4
<a href="#">Ireland</a>	3,849	402	98		5	3,746	109	779	20
<a href="#">Serbia</a>	1,171	111	31	3	42	1,098	81	134	4
<a href="#">Colombia</a>	1,161	96	19	2	55	1,087	50	23	0.4
<a href="#">Singapore</a>	1,049	49	4	1	266	779	24	179	0.7
<a href="#">UAE</a>	1,024	210	8		96	920	2	104	0.8
<a href="#">Croatia</a>	1,011	48	7	1	88	916	34	246	2



Covid 19 – Situation dashboard (WHO)

# Efikasnost zdravstvenih sistema

52

DMU	2010	2015	DMU	2010	2015
AUS	0.739	0.683	NZL	0.720	0.572
AUT	0.750	0.693	NOR	0.883	0.835
BEL	0.795	0.665	POL	0.864	0.837
CAN	0.779	0.643	PRT	<b>1.000</b>	0.861
CZE	0.958	0.797	SVK	0.659	0.620
DNK	0.786	0.616	ESP	0.939	<b>1.000</b>
FIN	0.977	0.976	SWE	0.986	0.818
FRA	0.805	0.620	CHE	0.749	0.599
DEU	0.791	0.664	TUR	0.947	<b>1.000</b>
GRC	0.890	0.931	GBR	0.818	0.739
HUN	0.733	0.688	USA	0.608	0.491
ISL	<b>1.000</b>	0.856	EST	<b>1.000</b>	0.953
IRL	0.826	0.679	ISR	0.948	0.977
ITA	0.935	0.889	SVN	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>
JPN	<b>1.000</b>	0.935	CHN	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>
KOR	<b>1.000</b>	0.973	LVA	0.830	0.850
LUX	0.815	0.743	LTU	0.745	0.625
MEX	0.884	<b>1.000</b>	RUS	0.590	0.511
NLD	0.782	0.667	ZAF	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>

## Indikatori

- Ulaganje u zdravstvo
- Broj kreveta
- Broj lekara
- Broj medicinskog osoblja
  
- Stopa preživljavanja odojčadi
- Očekivane godine života

Radojicic, M., Jeremic, V., & Savic, G. (2019). Going beyond health efficiency: What really matters?. *The International journal of health planning and management*.

53

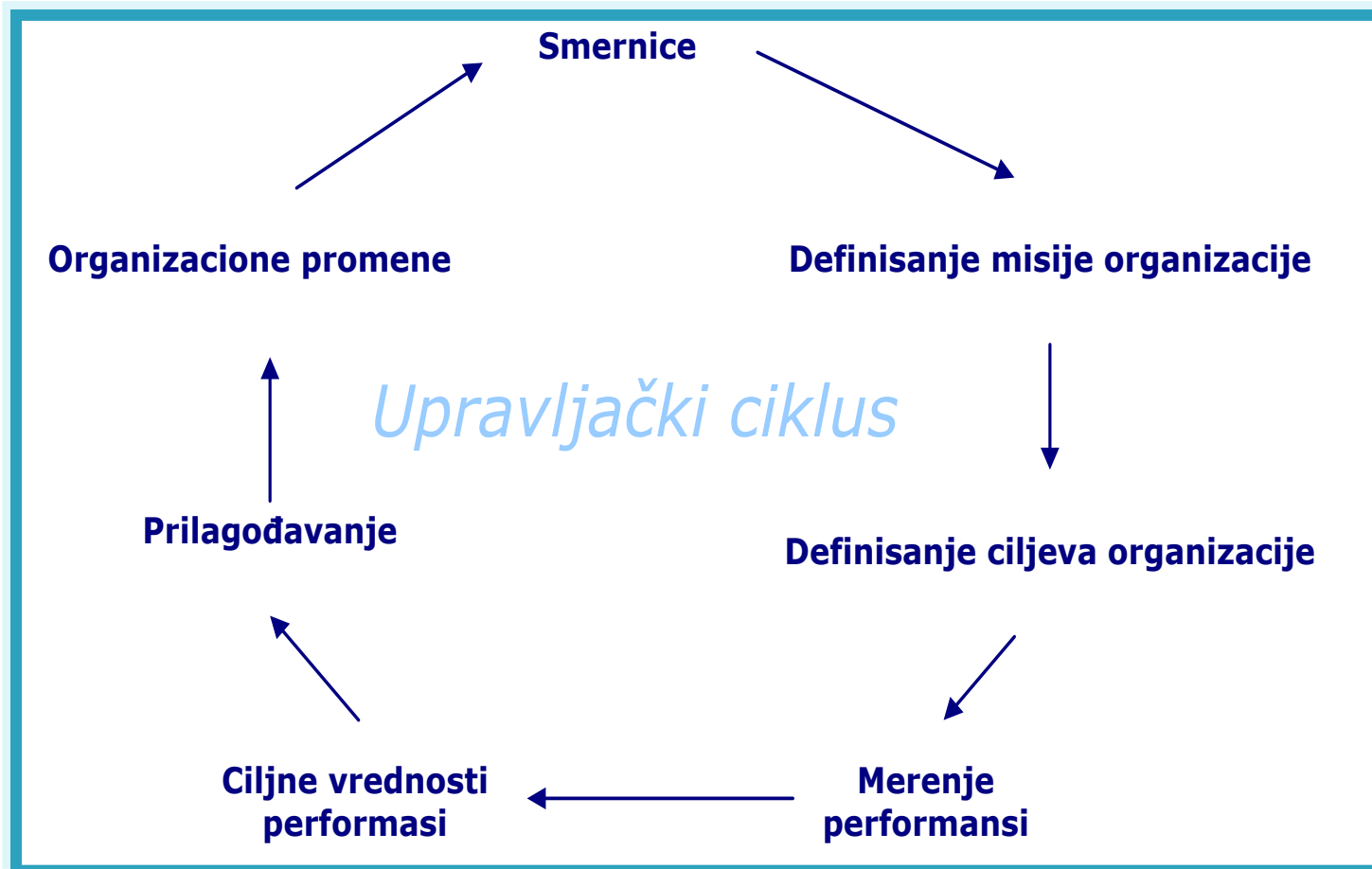
# Merenje performansi

# Merenje performansi

54

- Merenje performansi je postupak za prikupljanja podataka, analize i izveštavanja o dostignućima pojedinca, grupe ili organizacije:
  - ▣ upoređivanje sa strateškim ciljevima ili
  - ▣ da li su rezultati u skladu sa planiranim.

# Merenje performansi



# Merenje performansi

56

- Uspostavljanje sisteme za merenje performansi doprinosi poboljšanju poslovanja
- Daje informacije o tome **šta se dešava** i predstavlja osnovu za **definisanje ciljeva** čije dostizanje može pomoći u ostvarivanju strategija



# Sistem za merenje performansi

57

- U idealnoj situaciji, dobar sistem za merenje performansi bi trebalo da aktivno utiče na unapređenje performansi:
  - Meri ono što je važno
  - Utvrđivanje uzroke promena u performansama
  - Obezbeđuje korektivne mere
- Izabrati **mere performansi** koje su povezane sa uzročnicima uspeha u konkretnom preduzeću (organizaciji) ili sektoru.

# Sistem za merenje performansi

58

- Fokusirati se na ciljeve tj. “ključne oblasti poslovanja” - (KEY RESULT AREAS – KRA)
- KRA su one oblasti ili delovi organizacije koje bi kontinuirano trebalo unapređivati

# Mere performansi

59

- U procesu merenja je bitno definisanje mera koje će biti korišćene za procenu merljivih i nemerljivih performansi.
- Mere bi trebalo da budu direktno vezane sa uzročnicima “*drivers*” poslovanja
- Neke mere se mogu direktno izmeriti dok se drugi procenjuju opserviranjem

- Dobre mere bi trebalo da imaju sledeće karakteristike (Performance Measure Guide, 2009):
- *Relevantnost*
  - *Razumljivost*
  - *Pravovremenost*
  - *Uporedivost*
  - *Pouzdanost*
  - *Isplativost*

# Mere performansi

61

- Ključni indikatori rezultata - **kako je urađeno**
- Indikatori rezultata – **šta je urađeno**
- Indikatori performansi – **šta da se radi**
- Ključni indikatori performansi – **ŠTA DA SE RADI DA SE ZNAČAJNO UNAPREDI POSLOVANJE**

(KEY PERFORMANCE INDICATORS Developing, Implementing, and Using Winning KPIs, David Parmenter, 2010)

62

# Ključni indikatori performansi

Ključni indikatori performansi

# Ključni indikatori performansi

63

## ➤ Key Performance Indicators “KPI’s”

- ▣ “**Indikator**” je mera o kojoj se izveštava
- ▣ “**Performansa**” je rezultat ili aktivnost koja se uklapa u strateške ciljeve.
- ▣ “**Ključna**” znači da je to kritična mera odabrana u cilju određivanja šta da se radi.
- ▣ Mere se biraju tako da pokriju i ulazne i izlazne performanse posmatranog sistema

# Ključni indikatori performansi

64

- ❖ Ključni indikatori performansi (*Key Performance Indicators-KPI's*) predstavljaju **pokazatelje (mere)** koji se koriste **u poslovanju** kako bi se **pratili i planirali rezultati** koji se ostvaruju.
- ❖ KPI-evi podrazumevaju i finasijske i nefinasijske pokazatelje; merljive i nemerljive; indikatore vremena, tačnosti, opsega, investicija i dr.



# Ključni indikatori performansi

**KPI mora biti vezan za cilj kompanije**



# KPI

66



# KPI- Banke

67

- Stopa prinosa na kapital
- Stopa rasta neto dobiti
- Stopa rasta ukupnih prihoda

Canadian Bank Scorecard

# KPI

68

Bankarstvo	Nafta	Maloprodaja	Telekomunikacije	Zdravstvo
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Stopa prinosa na kapital</li><li>▪ Stopa rasta neto dobiti</li><li>▪ Stopa rasta ukupnih prihoda</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ CAPEX</li><li>▪ Iskorišćenost kapaciteta</li><li>▪ Veličina dokazanih rezervi</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Zadovoljstvo kupaca</li><li>▪ Prodaja po m<sup>2</sup></li><li>▪ Prosečna veličina korpe</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ CAPEX %</li><li>▪ ARPU (Average Revenue Per User)</li><li>▪ Chun rate (% odlaska kupaca)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Ulaganje u zdravstvo</li><li>▪ Broj kreveta</li><li>▪ Broj lekara</li><li>▪ Broj medicinskog osoblja</li><li>▪ Broj bolničkih dana</li><li>▪ Broj umrlih</li><li>▪ Stopa preživljavanja odojčadi</li><li>▪ Očekivane godine života</li></ul>

69

# Modeli upravljanja performansama

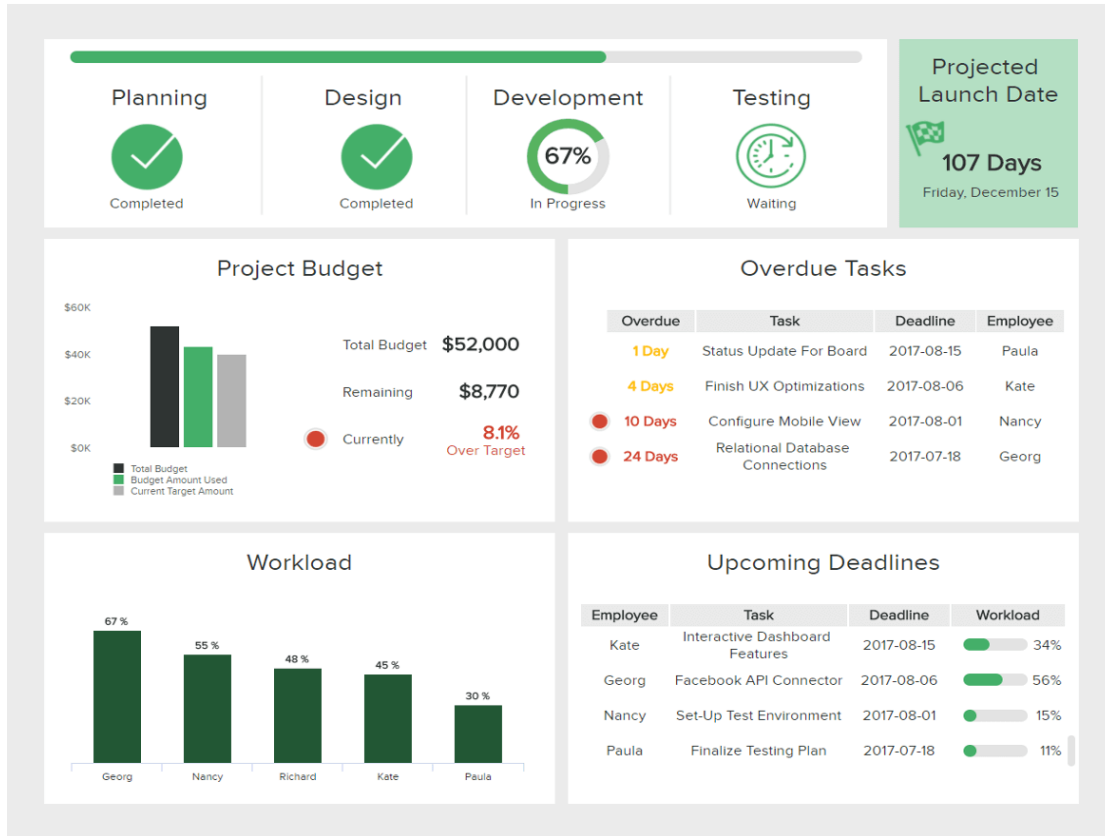
# Dashboard

70



# Dashboard

71



# Benčmarking

Benčmarking procesa,

Benčmarking na osnovu performansi i

Strateški benčmarking

Merenje performansi - efikasnosti

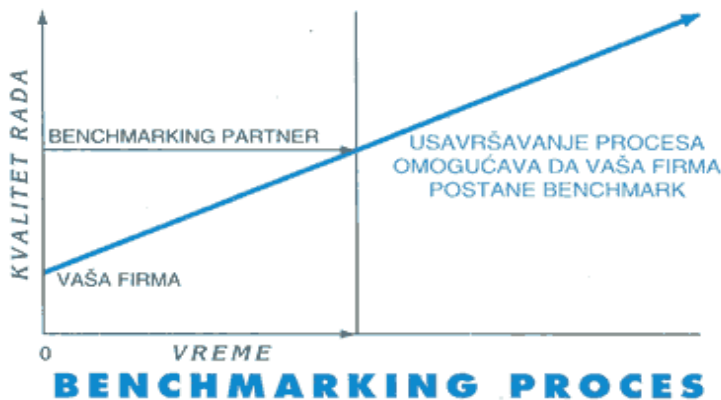


# Benčmarking

73

- ❖ Benčmarking se definiše kao instrument analize i planiranja koji se temelji na upoređivanju vlastite organizacije sa “najboljima u klasi” konkurentskih organizacija, ali i organizacija u drugim delatnostima.

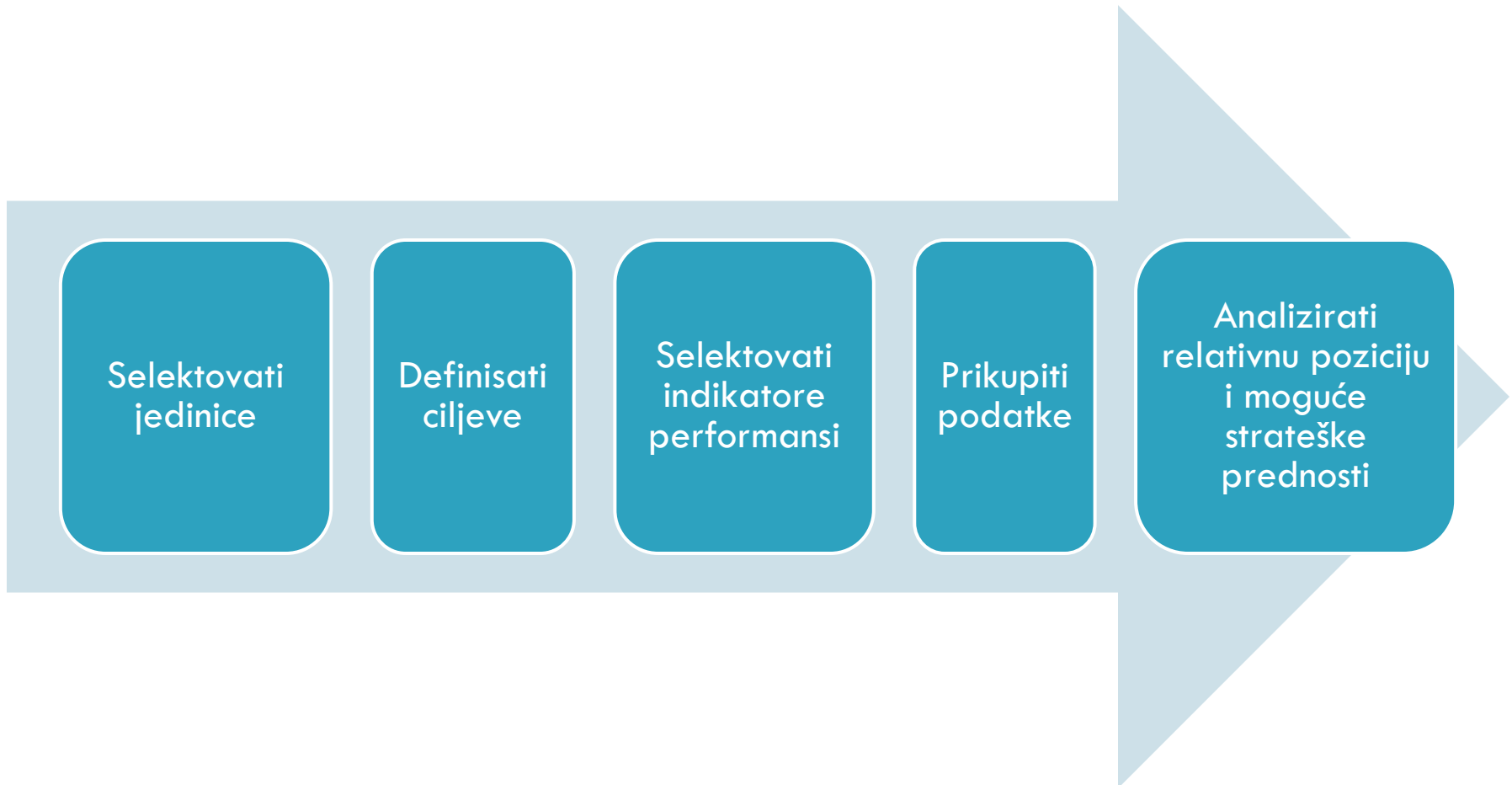
□ (*International Group of Controlling IGC*)



**Traganje  
za “najboljom praksom”**

# Merenje performansi –benčmarking

74



# Merenje performansi - benčmarking

75

- Bogetoft P., “Performance benchmarking - Measuring and managing performance”, 2012, Springer

2010 god.

- **Benchmarking (67%)**
- Uspostavljanje misije i vizije (63%)
- CRM (58%)
- Outsourcing (55%)
- Balanced Scorecard (47%)

# Merenje performansi - benčmarking

76

- Interni
- Eksterni
  
- Statički
- Dinamički

# Merenje performansi

## Ključni indikatori performansi

### □ Nedostaci:

- Male firme se porede sa velikim (pretpostavka konstantnog prinosa na obim)
- Parcijalni evaluator – jedan KPI ne može da reflektuje performanse firme koja koristi višestruke ulaze za dobijanje vušestrukih izlaza

Organizacija	Broj pacijenata Lečenje	Broj pacijenata Preventiva	Broj pacijenata	Troškovi lečenja	Troškovi preventive	Ukupni troškovi
A	20	40	60	10	10	20
B	3	80	83	2	21	23
C	2	10	12	5	15	20

# Merenje performansi

## Ključni indikatori performansi

### □ Nedostaci:

#### ■ Fox paradox

Organizacija	Broj pacijenata Lečenje	Broj pacijenata Preventiva	Broj pacijenata	Troškovi lečenja	Troškovi preventive	Ukupni troškovi
A	20	40	60	10	10	20
B	3	80	83	2	21	23
C	2	10	12	5	15	20

Organizacija	<u>Troškovi lečenja</u> pacijent	<u>Troškovi preventive</u> pacijent	<u>Ukupni troškovi</u> pacijent
A	$10/20=0.50$	$10/40=0.25$	$20/60=0.33$
B	$2/3=0.66$	$21/80=0.26$	$23/83=0.29$

# Merenje performansi

## Ključni indikatori performansi

### □ Nedostaci:

#### ■ Fox paradox

Organizacija	Broj pacijenata Lečenje	Broj pacijenata Preventiva	Broj pacijenata	Troškovi lečenja	Troškovi preventive	Ukupni troškovi
A	20	40	<b>60</b>	10	10	<b>20</b>
B	3	80	<b>83</b>	2	21	<b>23</b>
C	2	10	<b>12</b>	5	15	<b>20</b>

Organizacija	<u>Troškovi lečenja</u> pacijent	<u>Troškovi preventive</u> pacijent
A	$10/20=0.50$	$10/40=0.25$
B	$2/3=0.66$	$21/80=0.26$

# Merenje performansi

80

- Višestruki ulazi
- Višestruki izlazi
- Nepoznati prioriteti
  
- *Holistički pristup*



81

# Merenje efikasnosti

# Merenje efikasnosti

82

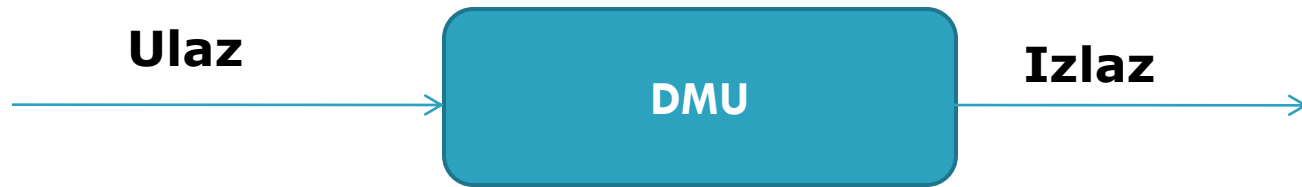
- *efficacitas* = uspešnost
- Efikasnost je sposobnost da se minimiziraju ulaganja u ostvarivanju ciljeva preduzeća.

“raditi stvari na pravi način”

- Efektivnost je sposobnost da se odrede i dostignu pravi ciljevi.

“raditi prave stvari”

# Merenje performansi



$$\text{Efikasnost} = \text{izlaz} / \text{ulaz}$$

# Ko je bolji?

## Majka

- Kuvanje
- Živeti sa
- Ljubaznost
- Lepota

## Žena

- Kuvanje
- Živeti sa
- Ljubaznost
- Lepota

**Neuporedivo**

Abraham Duarte (BALCOR 2013)

# Ko je bolji?

## Majka

- Kuvanje
- Živeti sa
- Ljubaznost
- Lepota

## Žena

- Kuvanje
- Živeti sa
- Ljubaznost
- Lepota

**Neuporedivo**

Abraham Duarte (BALCOR 2013)

# Merenje efikasnosti

86



Kako da se porede jedinice na bazi više ulaznih i izlaznih performansi?

# Merenje efikasnosti

87

	Kapital - <b>I1</b> (mil RSD)	Rad - <b>I2</b> (mil RSD)	Profit - <b>O1</b> (mil RSD)	Br. Proizvoda <b>- O2</b>	Efikasnost
A	9	3	12	10000	<b>?</b>
B	3	2	6	5800	
C	6	4	12	7000	
<b>Tež</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>EWSM</b>

# Merenje efikasnosti- Nepoznate preference

88

- Višestruki ulazi
- Višestruki izlazi
- Nepoznati prioriteti
  
- *Holistički pristup – Farel (1957)*



# Merenje performansi (Farel, 1954)

- Efikasnost = izlaz / ulaz



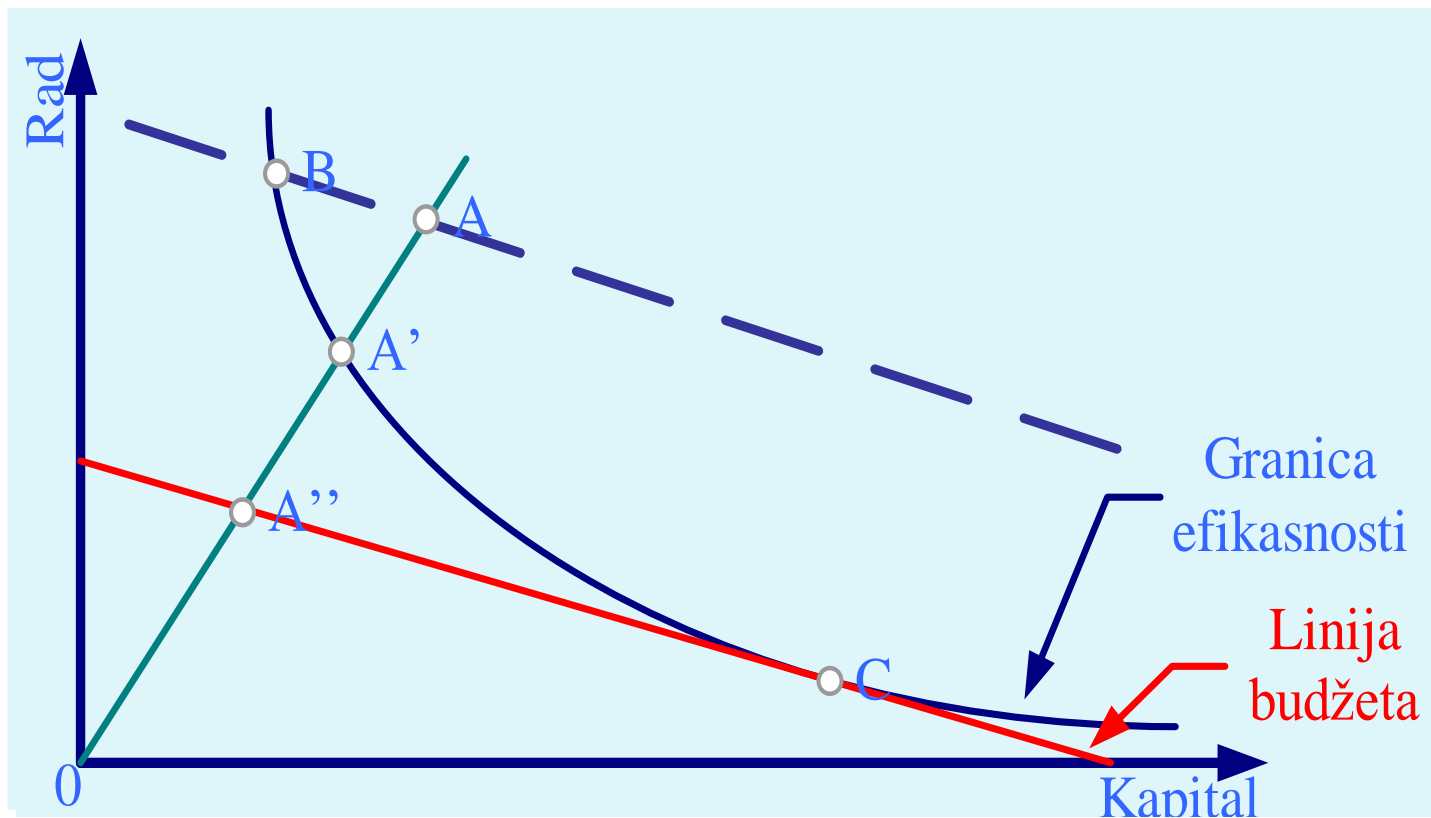
## Mere efikasnosti

**tehničku efikasnost (TE),**

**alokativnu efikasnost (AE) i**

**ukupnu efikasnost – troškovna efikasnost (UE).**

# Tipovi efikasnosti



# Tipovi efikasnosti

91

1	2	3	4	10	11	12	8
<b>DMU</b>	Ulaz #	Jedinična cena €	Izlaz €	Izlaz /Ukupni troškovi (4/(2*3))	Troškovna efikasnost	Alokativna efikasnost (11/8)	Relativna tehnička efikasnost
<b>A</b>	50	500	100000	40	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>B</b>	5	600	67500	33.75	<b>0.5625</b>	<b>0.9</b>	<b>0.675</b>

# Efikasnost (bankarske filijale)

Jedinica	Ulazi		Izlazi
	Broj radnika (BR)	Broj terminala (BT)	Mesečni prihod (MP)
A	50	75	210
B	50	75	150
C	60	40	190

# Efikasnost

## Parcijalni indikator

- MP/BR
- MP/BT

## Agregirane mere

Agregirani izlaz

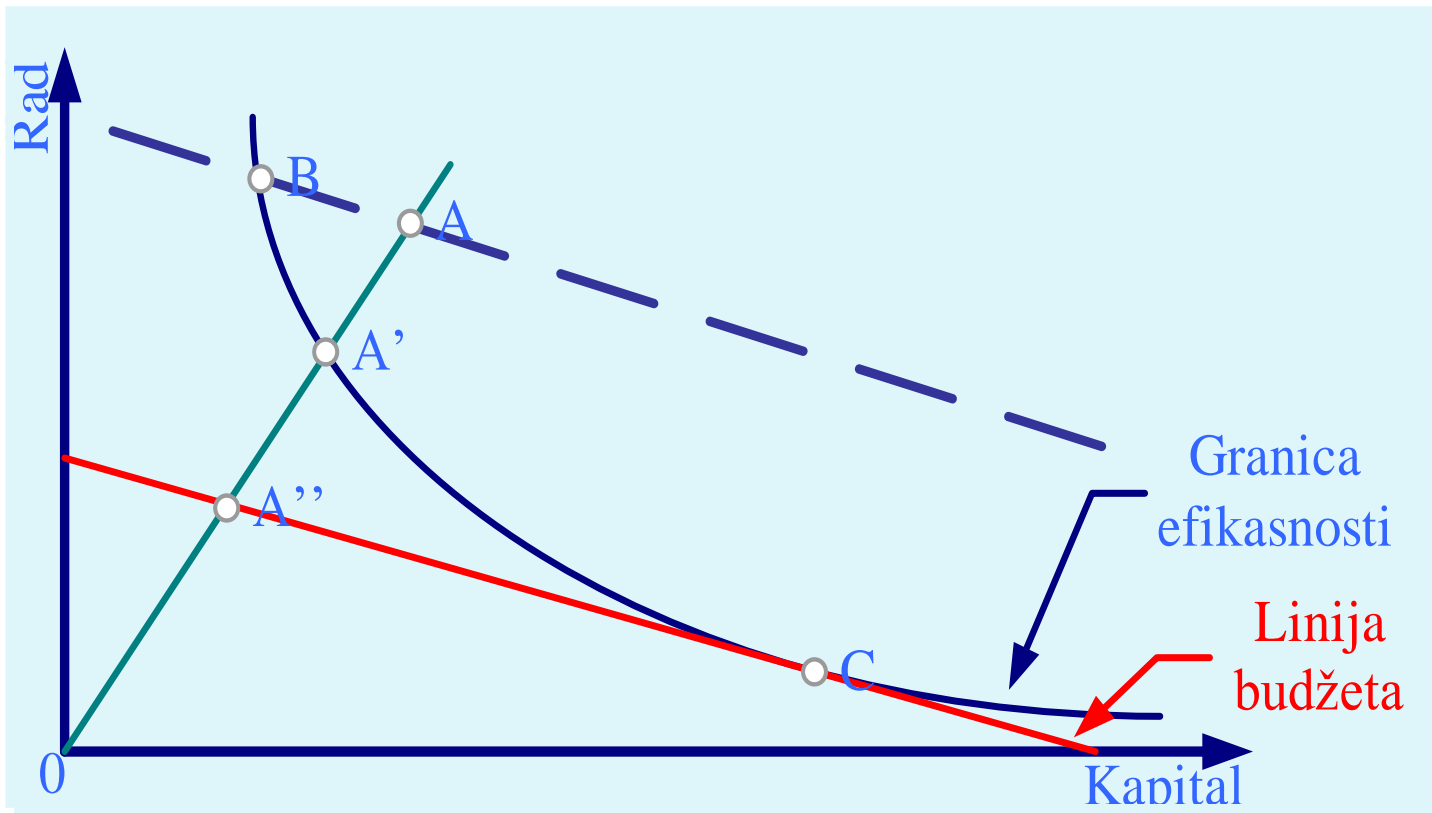
Agregirani ulaz

# Excel primer

94

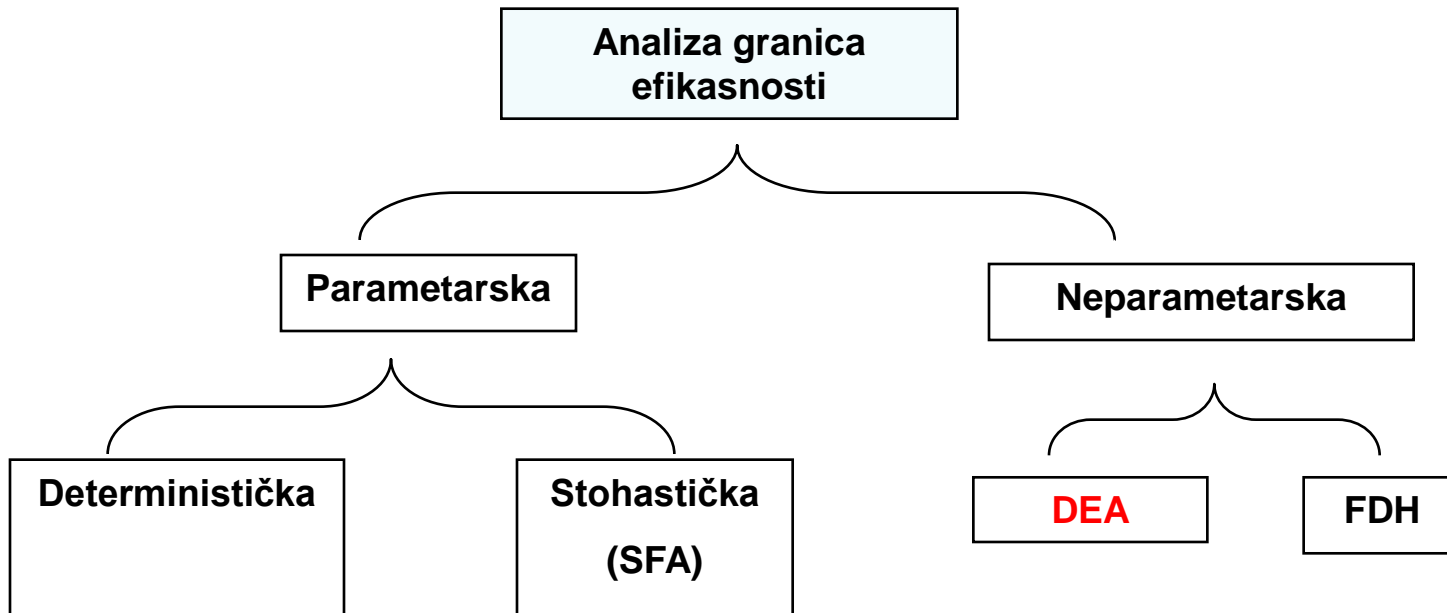


# Granica efikasnosti



- Tipovi efikasnosti

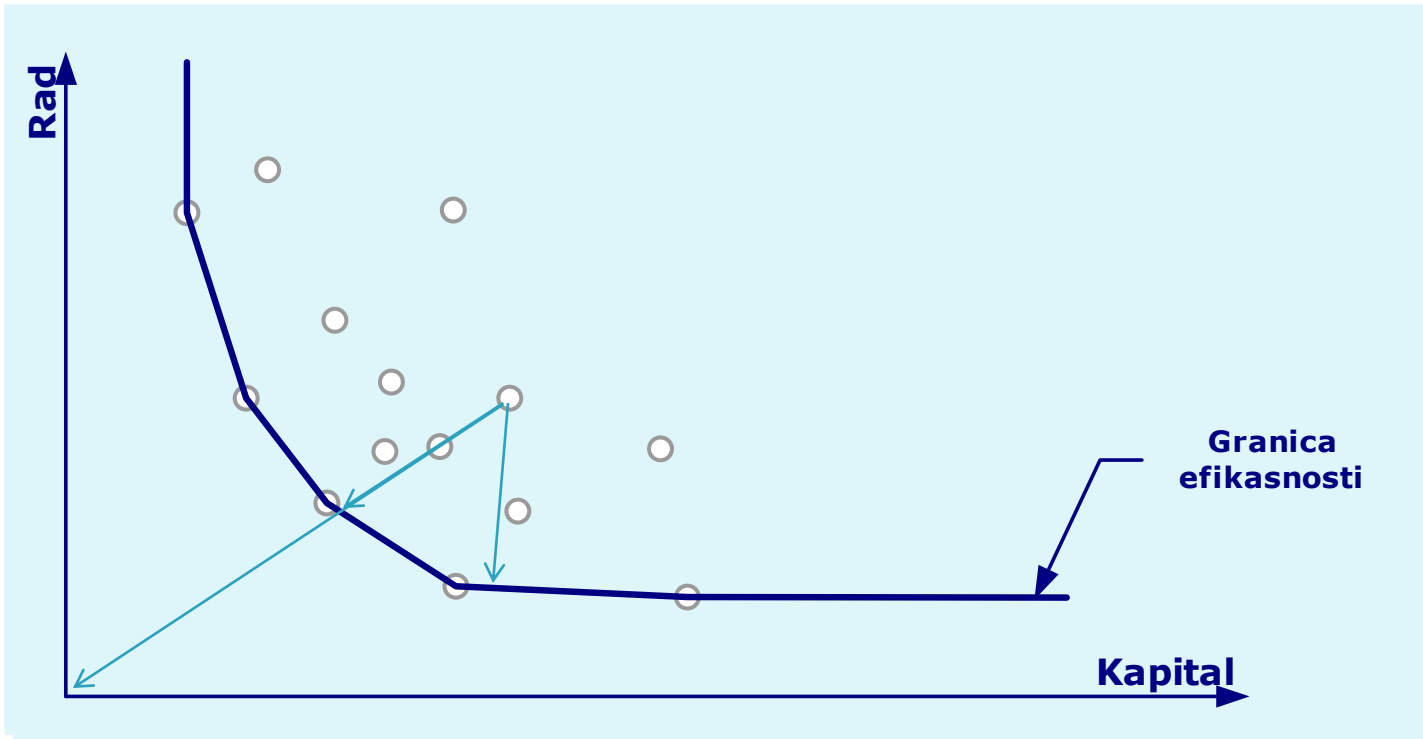
# Tehnička efikasnost





# Merenje perofmansi

- Farell, "The Measurement of Productive Efficiency", 1957



- Radijalna mera
- Proizvodna granica je obvojnica ili izokvanta

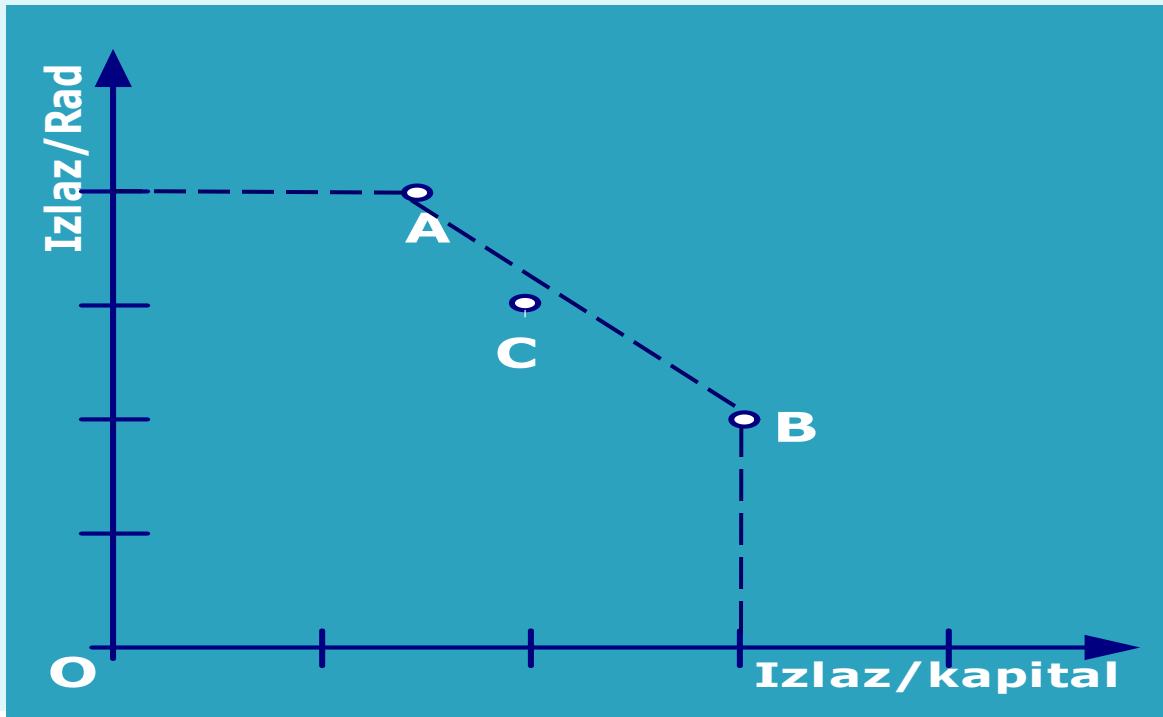
# DATA ENVELOPMENT ANALYSES - DEA

- Neparametarska tehnika za merenje efikasnosti jedinica o kojima se odlučuje
- (Decision making units - DMUs)
- 1978, Charnes, Cooper and Rodes
- Farelova definicija efikasnosti

# Proizvodna efikasnost

- Koopmans (1951): “Dopustivi ulazno-izlazni vektor će biti efikasan ako je nemoguće povećati bilo koji izlaz i/ili smanjiti bilo koji ulaz bez simultanog smanjenja nekog drugog izaza i/ili ulaza”
- Farrell (1957): Pareto optimalnost, Koopmans (1951) i Debreu (1951). Posmatrali su potunu efikasnost nekog sistema, razlažući ga na povezane aktivnosti (Koopmans), ili ‘proizvodne jedinice’ (Debreu). Farel je uveo tehniku za posmatranje celog sistema kao jedne jedinice, za koju su poznati ulazi i izlazi i može se porediti sa ostalima u industriji.

	Kapital	Rad	Izlaz
A	9	3	12
B	3	2	6
C	6	4	12



# Dva ulaza - jedan izlaz

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori	
	Broj terminala (BT)	Broj radnika (BR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/BR
A	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>
B	100	600	600	6	1
C	200	350	700	3.5	2
D	<b>100</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
E	100	100	300	3	3
F	120	200	600	5	3
G	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>

# Merenje performansi

## - Analiza obavljanja podataka

102

$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{težinska suma izlaza}}{\text{težinska suma ulaza}}$$

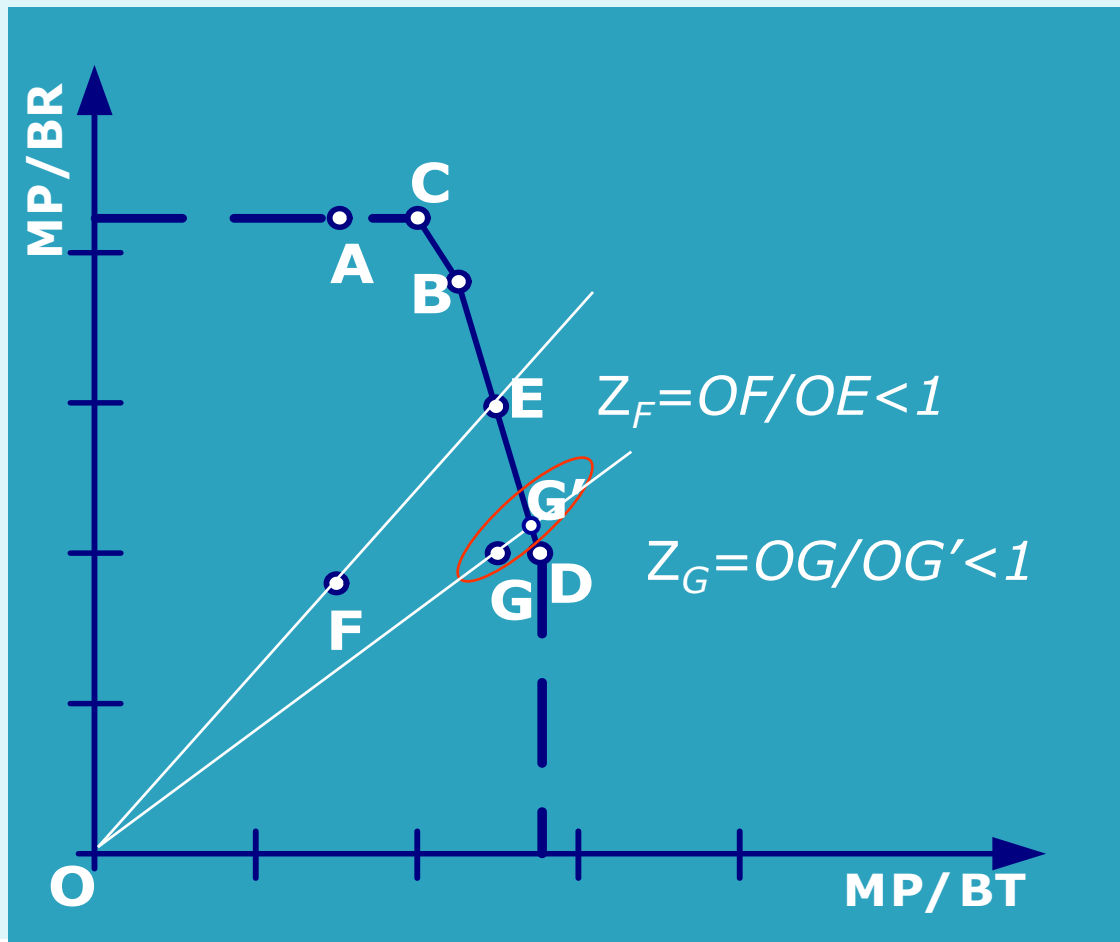
- Problem skaliranja
- Problem ponderisanja

# Primer

DMUs	Ulazi		Izlazi	Parcijalni indikatori		Indeks efikasnosti
	Broj terminala (BT)	Broj radnika (BR)	Mesečni prihod (MP)	MP/BT	MP/BR	
<b>A</b>	<b>200</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>1.5</b>	<b>4</b>	100.00%
<b>B</b>	<b>100</b>	<b>600</b>	<b>600</b>	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>100.00%</b>
<b>C</b>	200	350	700	3.5	2	69.73%
<b>D</b>	<b>100</b>	<b>75</b>	<b>300</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>100.00%</b>
<b>E</b>	100	100	300	3	3	84.62%
<b>F</b>	<b>120</b>	<b>200</b>	<b>600</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>100.00%</b>

# Granica efikasnosti

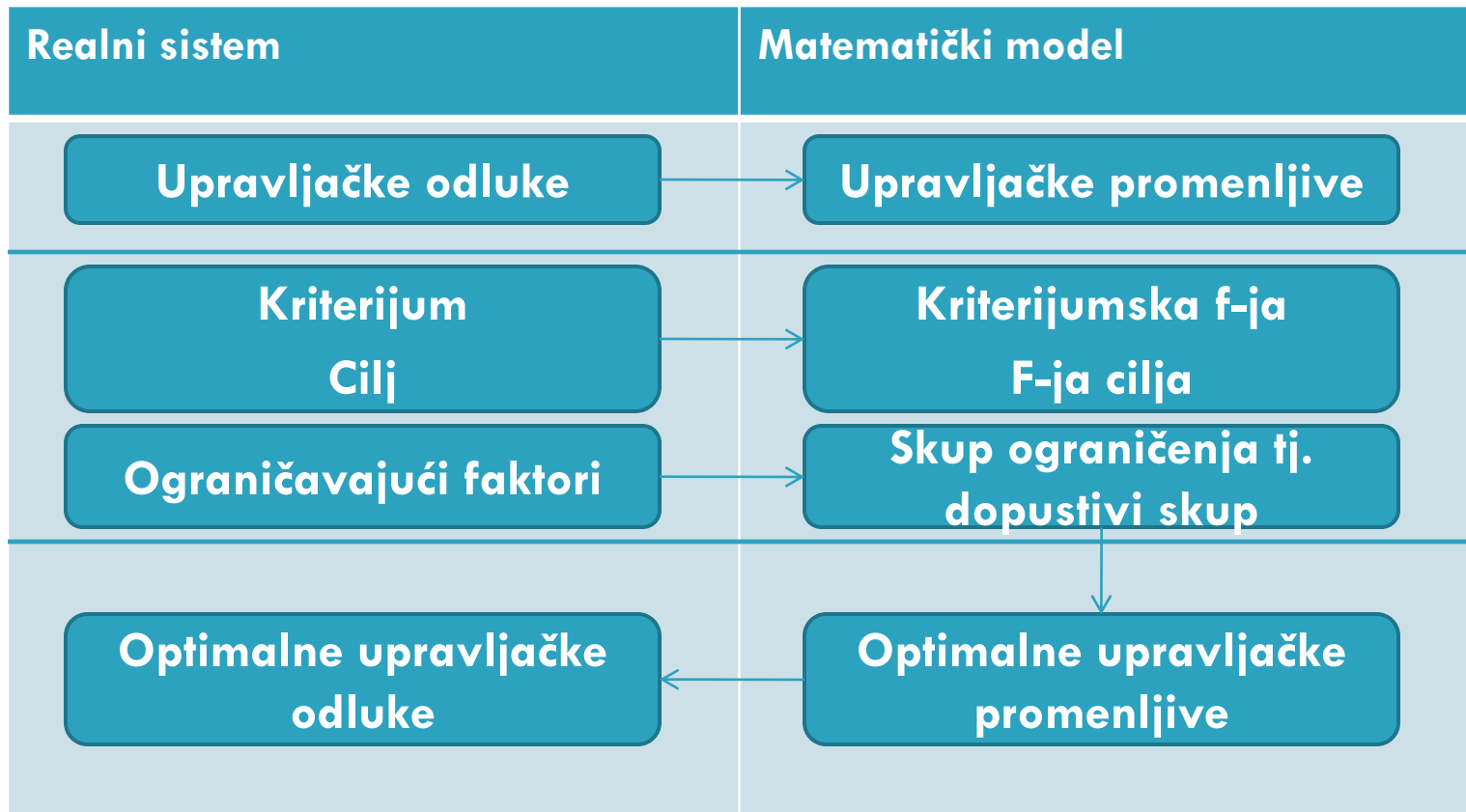
104





# Konstrukcija matematičkih modela

105



# Konstrukcija matematičkih modela

106

Matematički model	
<b>Upravljačke promenljive</b>	$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
<b>Kriterijumska f-ja</b> <b>F-ja cilja</b>	$\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} f(x)$ <p><i>p.o.</i></p>
<b>Skup ograničenja tj.</b> <b>dopustivi skup</b>	$g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} 0, \quad i = 1, \dots, m$