1. UVOD U OPTIMIZACIJU

Problemi nalaženja optimalnog rešenja, zadaci optimizacije, sreću se i rešavaju u svakodnevnom životu. Na njih se nailazi skoro svuda, u tehničkim i ekonomskim sistemima, u porodici, preduzeću, sportskom klubu itd. Po prirodi su veoma raznovrsni. Problem može biti: plan proizvodnje, raspored porodičnog budžeta na dobra i usluge potrebne porodici, plan održavanja termoagregata nacionalnog elektroenergetskog sistema, izbor računarske konfiguracije za firmu, planiranje transporta, nalaženje puteva u telekomunikacionoj mreži i mnogo toga drugog. Zajedno u svim tim zadacima je čovekovo implicitno nastojanje da pronađe rešenje koje u najvećoj mogućoj meri zadovoljava njegove želje, odnosno rešenje koje mu stvara najveću korisnost.

Predmet ovih razmatranja su prevashodno oni problemi za koje postoje manje ili više dobro razrađeni matematički modeli ili za koje se takvi modeli mogu napraviti. Konkretnije, predmet su modeli i metode optimizacije za izabrane klase problema koji se često sreću u praksi a matematički su relativno dobro obrađeni. Pri tome treba uzeti u obzir da se u teoriji optimizacije prevashodno traži rešenje postavljenog optimizacionog zadatka i ne razmatra pitanje koliko postojeći matematički model odgovara realnom zadatku. Sa aspekta praktičnog primenjivanja rezultata upravo provera da li je matematički model dobra aproksimacija realnog problema može da bude od krucijalnog značaja.

U ovom delu teksta daje se postavka zadatka optimizacije, izlažu neke od mogućih klasifikacija zadataka i iznose osnovni klasični pristupi optimizaciji u nelinearnom programiranju.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU

1.1. Formulacija zadatka

Teorija optimizacije se bavi razvojem modela i metoda kojima se nalaze *optimalna rešenja* matematički formulisanih problema. Bilo koje rešenje problema obeležavamo sa $\boldsymbol{x}$. Po pravilu, $\boldsymbol{x}$ predstavlja n-torku $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. Komponente rešenja x_j, $j = 1 ...,n$, nazivamo *upravljačke promenljive* ili *promenljive odluke*. Ustaljeno je da se optimalno rešenje obeležava sa $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,..., x_n^*)$.

Optimalno znači najbolje. Da bi se za neko rešenje reklo da je najbolje, treba imati meru kojom se određuje njegov kvalitet i koja omogućava njegovo poređenje sa drugim mogućim rešenjima. U matematičkom modelu radi toga mora da postoji funkcija kojom se svakom rešenju pridružuje odgovarajuća vrednost koja predstavlja njegovu meru kvaliteta. Ta funkcija pokazuje efikasnost izvršenja zadatka radi postizanja cilja i naziva se *kriterijum, kriterijumska funkcija, funkcija cilja* ili *indeks* ili *mera performanse*. Uobičajeno se označava sa $f(\boldsymbol{x})$. Zadatak optimizacije je nalaženje rešenja koje daje ekstremnu vrednost kriterijuma, najveću - zadatak maksimizacije, ili najmanju - zadatak minimizacije, kao i određivanje odgovarajuće vrednosti kriterijuma.

Promenljive koje treba odrediti obično su uslovljene međusobnim relacijama i ograničenjima. Matematički izrazi kojima se predstavljaju ova ograničenja nazivaju se zajedničkim imenom *skup ograničenja*. Svako rešenje koje zadovoljava postojeća ograničenja naziva se *dopustivim*. Dopustiva rešenja formiraju skup dopustivih rešenja ili *dopustvi skup D*. Dopustivi skup D je određen sistemom ograničenja koje su obično tipa nejednačina

$$D = \{ \boldsymbol{x} \in R^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1,...,m \} \tag{1.1}$$

gde je i - indeks ograničenja, m - ukupan broj ograničenja, i $g_i(\boldsymbol{x})$ - funkcije ograničenja.

Opšti zadatak optimizacije može se postaviti na sledeći način. Dat je skup mogućih upravljačkih promenljivih $D \subset R^n$ i kriterijumska funkcija $f(\boldsymbol{x})$. Treba naći $\boldsymbol{x} \in D$ za koje funkcija $f(\boldsymbol{x})$ dostiže optimalnu (maksimalnu ili minimalnu, odnosno ekstremnu) vrednost, tj. treba rešiti sledeći zadatak

$$\underset{x \in D}{\text{opt}}\, f(x)\,. \tag{1.2}$$

U daljem tekstu mi ćemo se implicitno baviti problemima maksimizacije, odnosno zadacima nalaženja maksimuma funkcije $f(\boldsymbol{x})$, što ne umanjuje opštost razmatranja jer se problemi minimizacije $f(\boldsymbol{x})$ mogu rešavati kao zadaci maksimizacije funkcije $-f(\boldsymbol{x})$.

Postoje i drugi načini pisanja zadatka optimizacije, kao na primer

$$\max \{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D \}.$$

Kao ilustraciju, navodimo sledeću uobičajenu postavku zadatka linearnog programiranja (LP):

Naći $\boldsymbol{x}$ koje maksimizira linearnu formu

$$z = \boldsymbol{cx} \tag{1.3}$$

pri ograničenjima (p.o.)

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \qquad (1.4)$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

gde su koeficijenti u matematičkom modelu dati matricama:
$\boldsymbol{c} = \| c_j \|_{1\times n}$, $\boldsymbol{A} = \| a_{ij} \|_{m\times n}$, $\boldsymbol{b} = \| b_i \|_{m\times 1}$.

Koeficijenti u matematičkom modelu nazivaju se i parametrima modela ili parametrima sistema a u opštem slučaju mogu da se označe kao jedinstveni skup parametara A.

Optimalno rešenje $\boldsymbol{x}^*$ optimizacionog zadatka je ono za koje važi

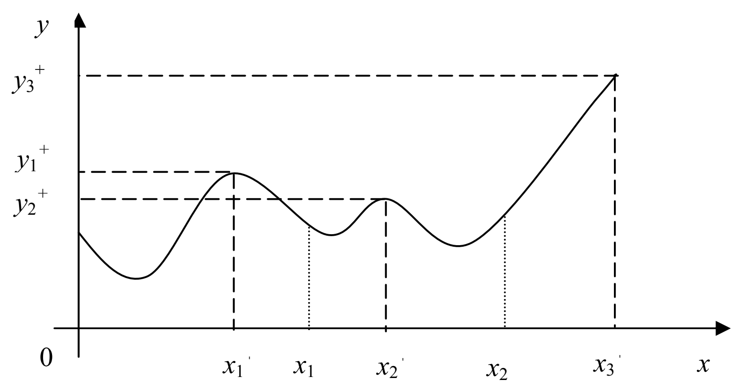
$$f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x} \in D. \qquad (1.5)$$

Vrednost kriterijuma $f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$ koja odgovara optimalnom rešenju naziva se *optimalna vrednost* ili *optimum*.

Ima autora koji pod optimalnim rešenjem ili optimumom podrazumevaju par $(\boldsymbol{x}^*, f^*)$, što se može smatrati pitanjem konvencije.

Data definicija optimuma naziva se i *globalnim* optimumom, a postavljeni zadatak zadatkom globalne optimizacije. Osnovni zadatak u teoriji optimizacije jeste razvoj metoda za rešavanje zadataka globalne optimizacije. Koliko se uspešno može odgovoriti postavljenom zadatku zavisi od osobina kriterijumske funkcije, tipa ograničenja i primenjene metode. Pritom postoji rizik da se primenom nekih metoda optimizacije na određene zadatke kao rešenje dobije takozvani lokalni optimum. Ovo ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 1.1: Pretpostavimo da treba naći ono x za koje funkcija prikazana na slici 1.1. postiže maksimum.



Slika 1.1. *Lokalni i globalni optimum*

Na intervalu $0 \leq x \leq x_1$ maksimum se postiže u tački x_1^+ i iznosi $y_1^+ = f(x_1^+)$. Kada se posmatra samo interval $x_1 \leq x \leq x_2$, optimalna vrednost $y_2^+ = f(x_2^+)$ se postiže u x_2^+, dok je za interval $0 \leq x \leq x_2$ maksimalna vrednost funkcije u tački x_1^+. Međutim, kada se posmatra ceo prikazani interval $[0,\ x_3^+]$, maksimalna vrednost funkcije je u tački x_3^+ koja je granica intervala. Kažemo da u tačkama x_1^+ i x_2^+ funkcija ima lokalne maksimume, dok se globalni maksimum postiže u tački $x^* = x_3^+$.
♦

Prethodni primer ukazuje na potrebu za definicijom lokalnog optimuma, odnosno optimuma koji važi samo na određenom ograničenom intervalu posmatranja.

Neka je $f : R^n \rightarrow R$, $\boldsymbol{x} \in D \subset R^n$. Funkcija $f(\boldsymbol{x})$ *ima lokalni maksimum* u tački $\boldsymbol{x}^+$ ako za sve tačke definisane δ–okoline $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^+| < \delta$ važi

$f(\boldsymbol{x}^+) \geq f(\boldsymbol{x})$.

Ovom definicijom završavamo osnovnu formulaciju opšteg zadatka optimizacije. Govoreći isključivo sa matematičkog aspekta teorije optimizacije, posmatrani zadatak je apstrakcija i nije bitno da li je izmišljen ili predstavlja dobar model nekog realnog problema.

1.2. Klasifikacije problema

Za potrebe klasifikacije problema mogu se koristiti različiti kriterijumi. Ovde ćemo navesti samo nekoliko osnovnih klasifikacija.

Zavisno od toga da li postoje ograničenja na promenljive, razlikuju se problemi:

- *uslovne* optimizacije, odnosno optimizacije u prisustvu ograničenja,
- *bezuslovne* optimizacije kada promenljive x_j nisu međusobno uslovljene jednačinama i/ili nejednačinama.

U zavisnosti od toga da li su parametri u optimizacionom problemu poznati, slučajnog karaktera ili neodređeni, razlikuju se

- *deterministički* zadaci
- zadaci *stohastičke* optimizacije
- zadaci optimizacije u uslovima *neodređenosti*.

Ovde ćemo se baviti pretežno determinističkim zadacima koji odgovaraju sistemima i problemima u kojima su parametri i procesi determinističke prirode. Samo u najkraćim crtama opisujemo neke od osobina problema stohastičke optimizacije.

U stohastičkim sistemima parametri sistema ili posmatrani proces imaju slučajan karakter opisan metodama iz teorije verovatnoće i statistike.

Postoje dve velike grupe metoda stohastičke optimizacije: *implicitne* i *eksplicitne* metode.

Implicitne metode se mogu primenjivati samo za diskretne stohastičke probleme u kojima je broj mogućih rešenja relativno mali, tj. takav da se svako rešenje može analizirati. U primeni ovih metoda razlikuju se sledeća tri osnovna koraka:

1. Odrede se sve moguće realizacije slučajnih veličina;
2. Urade se determinističke optimizacije za svaku realizaciju;
3. Analiziraju se rezultati i izabere rešenje.

Tipična primena ovih metoda je na probleme odlučivanja u uslovima neizvesnosti i rizika koji su modelirani stablom odlučivanja.

Eksplicitne metode stohastičkog programiranja se primenjuju za diskretne i kontinualne stohastičke probleme. Pritom se može desiti da stohastičku prirodu ima kriterijumska funkcija i/ili funkcije ograničenja. Optimizacioni zadatak se može postaviti na različite načine.

Kada su parametri u kriterijumskoj funkciji stohastičke prirode, uobičajena su sledeća dva pristupa.

a) Treba odrediti $\boldsymbol{x}$ tako da se dobije maksimum matematičkog očekivanja kriterijumske funkcije

$$\max_{x \in D} \mathrm{E}\,[f(\boldsymbol{x})]\,. \tag{1.6}$$

b) Treba odrediti $\boldsymbol{x}$ tako da se dobije maksimum verovatnoće da je kriterijumska funkcija veća od neke zadate vrednosti

$$\max_{x \in D} \Pr\,[\, f(\boldsymbol{x}) \ge f_0 \,] \tag{1.7}$$

U slučaju da parametri u funkcijama ograničenja imaju slučajan karakter nije izvesno da se izborom upravljačkih promenljivih može obezbediti da ona uvek budu zadovoljena. Zato se formuliše novi zadatak optimizacije u kome se traži da je verovatnoća da će ograničenje biti zadovoljeno veća od neke zadate vrednosti.

Primer 1.2. Posmatrajmo zadatak linearnog programiranja u kome su parametri u sistemu ograničenja stohastičke prirode. Treba odrediti $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ tako da se maksimizira funkcija

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,, \quad i = 1,..,m$$

$$x_j \ge 0\,, \qquad j = 1,..,n.$$

U ovom slučaju se originalni zadatak transformiše u novi zadatak pri čemu se nova ograničenja formulišu na osnovu zahteva da originalna ograničenja budu zadovoljena sa određenim zadatim verovatnoćama α_i, $i = 1,\ldots,m$. To znači da treba odrediti $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ tako da se maksimizira funkcija

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\Pr\,[\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,] \ge \alpha_i\,,\ i = 1,...,m$$

gde su $\alpha_i \in (0,1)$ zadate vrednosti.

Kada su slučajne veličine samo desne strane nejednačina u sistemu ograničenja, tj. kada su slučajne prirode samo parametri b_i, $i = 1,...,m$, i to tako da su opisani normalnim raspodelama sa parametrima $\mu_i = \mathrm{E}\,[b_i]$ i $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\ [b_i]$, tada se postavljeni zadatak LP zamenjuje sledećim determinističkim zadatkom. Treba odrediti $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ tako da se maksimizira funkcija

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \mu_i + K_{a_i}\sigma_i \quad ,\ i = 1,...,m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n,$$

gde se faktor poverenja K_{a_i} određuje iz uslova

$$\Pr\,\{K_{a_i} \le \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\} = \alpha_i.$$

Kada su a_{ij} slučajne veličine, deterministički ekvivalent ima složenu nelinearnu matematičku formu.♦

Neizvesnost u razmatranim problemima može biti tretirana i drugim metodama a ne samo onim koji počivaju na teoriji verovatnoće. Krajem osamdestih i početkom devedesetih godina XX veka posebno se izučavaju metode tretiranja neizvesnosti pomoću teorije *rasplinutih* (*fazi*) *skupova* [5].

Sledeća podela problema optimizacije je na

- *kontinualne* i
- *diskretne*.

U kontinualnim problemima upravljačke promenljive uzimaju vrednosti iz skupa realnih problema. U diskretnim problemima postoji dodatno ograničenje da upravljačke promenljive mogu da uzmu samo određene diskretne vrednosti iz skupa realnih brojeva. Obično se radi o skupu celih brojeva, o skupu prirodnih brojeva i nule, ili o binarnom skupu $\{0,1\}$.

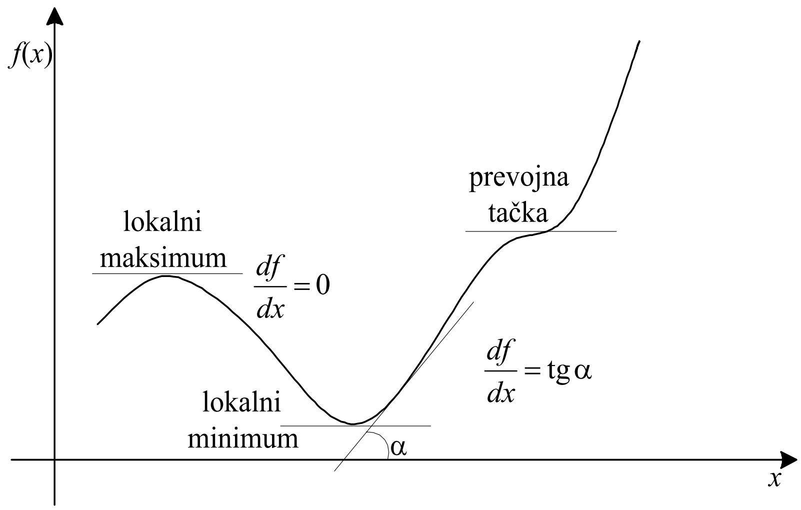
Značajnu klasu zadataka optimizacije predstavljaju problemi *optimalnog upravljanja* sistemima. To su zadaci određivanja upravljanja kao funkcije vremena. Upravljanjem treba posmatrani sistem, uz poštovanje određenih uslova i ograničenja, u nekom vremenskom intervalu prevesti iz početnog u željeno stanje a da pri tome izabrani kriterijum, tzv. *indeks performanse*, dobije ekstremnu vrednost. Rešenje zadatka optimalnog upravljanja nisu brojevi već funkcije. To je bitna razlika u odnosu na do sada razmatrane zadatke optimizacije. Nekom upravljanju, tj. nekoj određenoj vremenskoj funkciji, pridružuje se broj koji označava kvalitet upravljanja. Drugim rečima, indeks performanse je preslikavanje skupa funkcija na skup tačaka. Zadatak optimalnog upravljanja biće ukratko opisan kasnije u odeljku 1.5.

1.3. Potrebni i dovoljni uslovi za optimalnost

Od svih mogućih rešenja koja zadovoljavaju ograničenja razmatranog problema, optimalno rešenje je ono koje daje ekstremnu (maksimalnu, minimalnu) vrednost kriterijumske funkcije. Samo u najtrivijalnijim problemima je moguće ispitati sva dopustiva rešenja i njihovim prostim poređenjem utvrditi ono koje daje optimalnu vrednost. Zbog toga je važno razviti postupke kojima se mogu najpre generisati kandidati za optimalno rešenje a onda i proveriti da li je neko od njih optimalno. Ovi postupci se u klasičnoj optimizaciji zasnivaju na utvrđivanju i korišćenju uslova koje treba da zadovolji i osobina koje poseduje optimalno rešenje.

Optimalno rešenje ne mora da bude jedinstveno: više rešenja mogu da kao rezultat daju optimalnu (maksimalnu, minimalnu) vrednost kriterijuma. U opštem slučaju korisno bi bilo pronaći uslove koje neko rešenje mora da zadovolji da bi bilo optimalno dok druga dopustiva rešenja mogu ali ne moraju da zadovolje. Takvi uslovi se nazivaju *potrebni uslovi* za optimalnost, odnosno potrebni uslovi optimalnosti.

Potrebni uslovi za optimalnost rešenja kada je kriterijumska funkcija diferencijabilna razmatrani su još u elementarnoj matematici. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija čiji je i prvi izvod takođe neprekidna funkcija. (Za takve funkcije se kaže da pripadaju klasi C^1. Uopšte, za neprekidne funkcije čiji je n-ti izvod takođe neprekidna funkcija kaže se da pripadaju klasi C^n.) Ako se pretpostavi da se maksimum (minimum) funkcije $f(x)$ ne postiže za $x = \pm\infty$, onda se maksimum (minimum) može pojaviti samo u tačkama u kojima je nagib $\frac{df(x)}{dx}$ jednak nuli, slika 1.2. Prema tome, potreban uslov za optimum je $\frac{df(x)}{dx} = 0$ za optimalnu vrednost x.



Slika 1.2. *Geometrijsko tumačenje uslova za optimalnost*

Dovoljan uslov za optimalnost je onaj čije zadovoljenje garantuje da je posmatrano rešenje optimalno; međutim, ako posmatrano rešenje ne zadovoljava dovoljan uslov za optimalnost, to ne znači da ono mora da bude neoptimalno. Samo ako rešenje zadovoljava uslov optimalnosti koji je istovremeno i potreban i dovoljan može se tvrditi da je optimalno, i obrnuto, samo optimalna rešenja zadovoljavaju potrebne i dovoljne uslove za optimalnost.

Kada je u tački x^+ zadovoljen potrebni uslov, tj. prvi izvod u toj tački jednak je nuli, dovoljan uslov se dobija na osnovu činjenice da drugi izvod određuje znak promene u okolini te tačke. To znači da je dovoljan uslov za maksimum da je drugi izvod negativan, tj, promena x^+ imala bi za posledicu smanjenje funkcije; obrnuto, dovoljan uslov za minimum je da je drugi izvod pozitivan.

Analogna razmatranja važe kada se rešava zadatak bezuslovne optimizacije funkcije $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ koja je dvostruko diferencijabilna na skupu $D \subset R^n$. Tejlorov razvoj funkcije $f(\boldsymbol{x})$ u tački $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{h}$, gde je $\boldsymbol{x}^+ = (x_1^+ \dots, x_n^+)$, i $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)$ je

$$f(\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^+) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \dots \tag{1.8}$$

odnosno

$$f(\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^+) = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}^+) + \frac{1}{2} \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^+)\boldsymbol{h} + o^3(\boldsymbol{h})$$

gde je

$\nabla f(\boldsymbol{x})$ - gradijent funkcije $f(\boldsymbol{x})$, vektor dimenzije $1 \times n$

$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ - Heseova matrica ili Hesijan, simetrična matrica dimenzije $n \times n$ sa elementima

$$G_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

Iz definicije sledi da funkcija u ekstremnoj tački ne treba da raste niti opada. Da bi $\boldsymbol{x}^+$ bilo ekstremna tačka, razlika $f(\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^+)$ treba da je za malo $\boldsymbol{h}$ približno jednaka nuli. To znači treba da je

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^+) = 0 \tag{1.9}$$

tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \ , \quad j = 1,...,n.$$

Prema tome, potreban uslov da je $\boldsymbol{x}^+$ ekstremna tačka je $\nabla f(\boldsymbol{x}^+) = 0$.

Dovoljan uslov se dobija iz zahteva da u svakom smeru oko $\boldsymbol{x}^+$ funkcija opada ako se traži maksimum, odnosno raste ako se traži minimum. Pošto je $\nabla f(\boldsymbol{x}^+) = 0$, znak promene je određen vrednošću $\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^+)\boldsymbol{h}$, pa je dovoljan uslov za maksimum da je ova vrednost negativna

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^+)\boldsymbol{h} < 0 \ , \tag{1.10}$$

odnosno, da je $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^+)$ negativno definitna forma. Kada se traži minimum funkcije, matrica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^+)$ treba da je pozitivno definitna.

Oba navedena uslova se odnose na lokalne optimume. Da bi oni važili i za globalne optimume, potrebno je da kriterijumska funkcija bude konkavna (kada se traži maksimum) ili konveksna (za zadatak minimizacije) jer tada na posmatranom skupu postoji samo jedna ekstremna tačka koja zadovoljava date uslove. Podsetimo da je funkcija $f(x)$ konveksna na posmatranom intervalu $[x_1,x_2]$ ako važi

$$f(x) \leq af(x_1) + (1-a)\,f(x_2)$$

za svako $a \in [0,1]$ i svako $x \in [x_1,x_2]$.

Navedena razmatranja čine osnovu klasičnog pristupa rešavanju optimizacionih problema koji obuhvata sledeće osnovne korake:

(1) naći potrebne uslove koje mora da zadovolji optimalno rešenje koristeći diferencijalne osobine funkcije u optimalnom rešenju;

(2) rešiti jednačine koje čine potreban uslov da bi se dobili kandidati za optimalno rešenje;

(3) testirati proveriti kandidate za optimalno rešenje korišćenjem testova za potrebne i dovoljne uslove.

Procedure koje se razvijaju na osnovu ovog pristupa nazivaju se *indirektne* metode jer se njima optimalno rešenje pronalazi indirektno na osnovu diferencijalnih osobina funkcije cilja ili funkcionala, a ne direktno na osnovu vrednosti funkcije. U *direktnim* metodama se neposredno koriste vrednosti kriterijuma i ograničenja datog problema da bi se sistematskim rekurzivnim postupcima došlo do optimalnog rešenja. Nije uvek moguće niti je neophodno da se napravi jasna razlika između ovih metoda; u mnogim optimizacionim procedurama kombinuju se oba pristupa.

1.4. Uslovna optimizacija i Lagranžovi množitelji

Osnovne ideje za klasičan pristup rešavanju problema uslovne optimizacije pokazaćemo na sledećem relativno jednostavnom problemu optimizacije funkcije dve promenljive u prisustvu jednog ograničenja. Ovaj pristup poznat je pod nazivom *metoda Lagranžovih množitelja*. Posmatraćemo sledeći zadatak:

Naći $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ tako da se postigne optimalna vrednost kriterijumske funkcije

$$f(x_1,x_2) \tag{1.11}$$

p.o.

$$g(x_1,x_2) = b_1 \tag{1.12}$$

gde je b_1 konstanta a funkcije f i g su funkcije klase C^2 po x_1 i x_2 . Pretpostavlja se da dopustivi skup nije prazan, tj. da postoje rešenja koja zadovoljavaju postavljeno ograničenje. Ograničenja tipa (1.12) ukazuju na činjenicu da su promenljive x_1 i x_2 međusobno zavisne što je uobičajeni slučaj u većini realnih problema.

Pre nego što se da postupak Lagranžovih množitelja za određivanje potrebnih uslova za optimalno rešenje razmotrimo jednostavan pristup koji se nekada koristi ako je moguće eksplicitno rešiti x_1 u zavisnosti od x_2 , npr. $x_1= \varphi(x_2)$. U tom slučaju $\varphi(x_2)$ zamenjuje x_1 u (1.11) tako da se dobije $f(\varphi(x_2),x_2)$ i zadatak svodi na bezuslovnu optimizaciju po x_2. Ovaj pristup ima veoma ograničenu praktičnu primenu zbog sledećih nedostataka. Prvo, nije uvek moguće analitički odrediti $x_1 = \varphi(x_2)$, i drugo, njegova primena može biti znatno teža od primene Lagranžovih množitelja.

Odredimo najpre prve izvode kriterijumske funkcije i funkcije ograničenja po promenljivoj x_1

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} \tag{1.13}$$

$$\frac{dg}{dx_1} = \frac{db_1}{dx_1} = 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} \tag{1.14}$$

Da bi funkcija f imala lokalni optimum u datoj tački, $\dfrac{df}{dx_1}$ mora da bude jednako nuli u toj tački

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \tag{1.15}$$

Umesto ovog uslova korisniji bi bio potrebni uslov koji ne zavisi od dx_2/dx_1 . Takva jednačina se lako dobija eliminacijom $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ iz gornje tri jednačine. Pretpostavljajući da parcijalni izvodi nisu jednaki nuli, dobija se

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}} \tag{1.16}$$

Dakle, jednačine (1.12) i (1.16) su dovoljne da bi se odredile nepoznate x_1 i x_2 koje određuju stacionarnu tačku. Shodno tome, ovde bi analiza mogla da se završi ali je činjenica da su rezultati dati u nepreglednom obliku i nisu pogodni za uopštavanje.

Željena modifikacija se dobija preuređenjem (1.16) uvođenjem nove promenljive μ na sledeći način

$$\mu = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \tag{1.17}$$

tako da se sada dobijaju dve jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

Promenljiva μ naziva se Lagranžov množitelj.

Na osnovu izvedene analize, radi uopštavanja i pojednostavljenog pisanja uvodi se proširena kriterijumska funkcija koja se zove *Lagranžova funkcija* ili Lagranžijan kao funkcija originalnih promenljivih i množitelja μ

$$L(x_1,x_2;\mu) = f(x_1,x_2) + \mu(g(x_1,x_2) - b_1)\ . \tag{1.19}$$

Potrebni uslovi za optimalno rešenje Lagranžove funkcije istovetni su sa potrebnim uslovima za optimalno rešenje originalnog zadataka (1.11) – (1.12), tj.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = g(x_1, x_2) - b_1 = 0 \tag{1.22}$$

Na ovaj način je dobijen sistem od tri jednačine sa tri nepoznate koji nekada može biti rešen i tako se dobijaju vrednosti za x_1, x_2 i μ koje odgovaraju stacionarnoj tački Lagranžove funkcije.

U mnogim praktičnim problemima postoji realno tumačenje Lagranžovog množitelja. Posmatrajmo slučaj kada se traži maksimum funkcije $f(x_1,x_2)$ koja predstavlja "dobit" u zavisnosti od "aktivnosti" x_1 i x_2 a funkcija $g(x_1,x_2)$ označava pridružene "troškove". Tada Lagranžova funkcija $L(x_1,x_2;\mu) = f(x_1,x_2) + \mu g(x_1,x_2)$, pri čemu koeficijent troškova μ ima negativnu vrednost, može da se smatra kao penalizovana "dobit", tj. penalizovana mera performanse. Za neku konkretnu vrednost keoficijenta μ maksimum $L[(x_1^*(\mu), x_2^*(\mu\ )]$ Lagranžove funkcije $L(x_1, x_2,\mu\ )$ dobija se rešavanjem jednačina (1.20) i (1.21). Vrednosti $x_1^*(\mu)$ i $x_2^*(\mu)$ za x_1 i x_2 daju vrednost originalne kriterijumske funkcije $f[(x_1^*(\mu), x_2^*(\mu\ )]$ i vrednost funkcije "troškova" $g[(x_1^*(\mu), x_2^*(\mu\ )]$.

Sada bi trebalo odrediti test kojim bi se utvrdila priroda stacionarne tačke koja se dobija primenom izložene analize. Taj test se razvija na analogan način kao za bezuslovnu optimizaciju ali je znatno složeniji i teži za uopštavanje i zbog toga prevazilazi namere ovog rukopisa.

Uopštenje metode Lagranžovih množitelja na slučaj kada kriterijumska funkcija ima više od dve promenljive i kada postoji više ograničenja tipa jednako, radi se na sledeći način. Neka je zadatak naći $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ tako da se maksimizira kriterijumska funkcija $f(\boldsymbol{x})$

$f(\boldsymbol{x})$

p.o.

$g_i(\boldsymbol{x}) = b_i\ ,\ i = 1,\ldots, m.$

pri čemu su $f(\boldsymbol{x})$ i $g_i(\boldsymbol{x})$, i=1, . . . ,m date funkcije n promenljivih (skalarne funkcije vektorskog argumenta) za koje se pretpostavlja da su diferencijabilne.

Najpre se formira Lagranžova funkcija

$$L(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \ (g_i(\boldsymbol{x}) - b_i) \tag{1.23}$$

gde je $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots, \mu_m)$ vektor Lagranžovih množitelja μ_i i = 1,…, m. Potrebni uslovi za optimalno rešenje Lagranžove funkcije su

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,n \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = g_i(\boldsymbol{x}) - b_i = 0, \quad i = 1,\ldots,m \tag{1.25}$$

Navedene relacije koje treba da ispuni rešenje da bi bilo optimalno nazivaju se Karuš-Kun-Takerovi (Karush, Kuhn, Tacker) uslovi.

Sledeće uopštenje metode Lagranžovih množitelja odnosi se na slučaj kada postoje ograničenja tipa nejednakosti.

Posmatrajmo zadatak uslovne optimizacije u kome treba naći $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ tako da se maksimizira kriterijumska funkcija $f(\boldsymbol{x})$

$f(\boldsymbol{x})$

p.o.

$g_i(\boldsymbol{x}) - b_i \le 0$, $i = 1,\ldots,m$

$\boldsymbol{x} \ge 0$.

pri čemu su $f(\boldsymbol{x})$ i $g_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,\ldots,m$ date funkcije n promenljivih (skalarne funkcije vektorskog argumenta) za koje se pretpostavlja da su diferencijabilne.

I u ovom slučaju se na početku formira Lagranžova funkcija

$$L(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \ (g_i(\boldsymbol{x}) - b_i)$$

gde je $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ vektor Lagranžovih množitelja μ_i, $i = 1,\ldots,m$.

Rešenje $\boldsymbol{x}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ može biti optimalno rešenje problema nelinearnog programiranja samo ako postoji m brojeva $\mu_1,\ldots, \mu_m$, takvih da su zadovljeni sledeći uslovi

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0 \\ 2.\ x_j^* \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0 \end{array}\right\} \text{na } x = x^* \text{ za } j = 1,\ldots,n$$

3. $g_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0$, $i = 1,\ldots,m$
4. $\mu_i \, g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$, $i = 1,\ldots,m$
5. $x_j^* \ge 0$, $j = 1,\ldots,n$
6. $\mu_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Ovo su Karuš-Kun-Takerovi (Karush, Kuhn, Tacker) uslovi za optimalnost rešenja zadatka nelinearnog programiranja. Uslovi 3,4, i 5 obezbeđuju dopustivost rešenja. Ostali uslovi eliminišu veći broj dopustivih rešenja da budu kandidati za optimalno rešenje. Kao što je već rečeno, zadovoljenje Karuš-Kun-Takerovih uslova ne garantuje da je rešenje optimalno. Ako su $g_i(\boldsymbol{x})$ konveksne funkcije i $f(\boldsymbol{x})$ konkavna funkcija, onda su navedeni KKT uslovi i dovoljni.

1.5. Problem optimalnog upravljanja

Problem optimalnog upravljanja je određivanje funkcije upravljanja kojom se posmatrani sistem prevodi iz početnog u željeno stanje na način koji se smatra najboljim u odnosu na izabrani kriterijum.

Označimo početni trenutak t_0, početno stanje sistema vektorom $s_0 = s(t_0)$ i željeno stanje vektorom $s_1 = s(t_1)$. Upravljanje koje treba odrediti je vektor $u = u(t)$. Neka je dinamika sistema opisana sistemom jednačina

$$s' = \varphi\,(s,u,A) \tag{1.26}$$

gde A označava skup parametara sistema.

Upravljanju $u(t)$ koje sistem prevodi iz stanja s_0 u stanje s_1 pridružuje se vrednost $J(s,u)$ koja zavisi od krajnjeg stanja i putanje po kojoj je sistem prelazio iz jednog u drugo stanje

$$J(s(t),u(t)) = J_1(s_1, t_1, A) + \int_{t_0}^{t_1} \Psi\,(s(t), u(t); A)\, dt \tag{1.27}$$

Funkcija $J(s,u)$ naziva se *funkcional*, a u teoriji upravljanja *mera* ili *indeks performanse*.

Ograničenja na upravljanje i stanje sistema, u opštem slučaju mogu biti

$$L_1(s_1, t_1, A) + \int_{t_0}^{t_1} L\;(s(t), u(t); A)\, dt \le 0 \tag{1.28}$$

i/ili

$$L_2(s(t),u(t); A) \le 0 \tag{1.29}$$

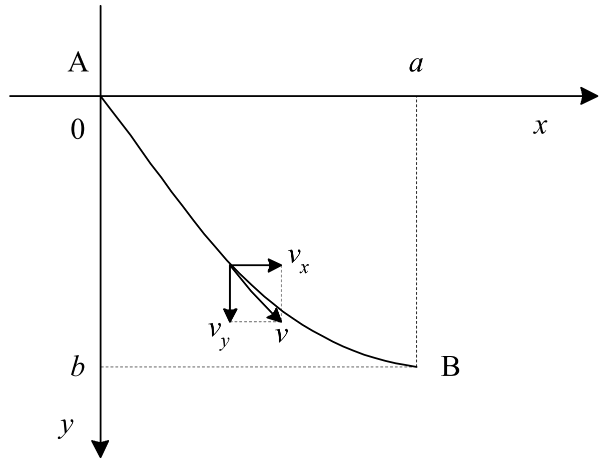
gde su L_1, L_2 i L skalarne ili vektorske funkcije.

Zadatak optimalnog upravljanja je određivanje $u(t)$ koje daje maksimalnu vrednost funkcionala $J(s,u)$ pri datim ograničenjima. Uočimo da se funkcionalom, koji je analogan kriterijumskoj funkciji u statičkim zadacima optimizacije, upravljanje $u(t)$, koje je funkcija, preslikava u jednu tačku u kriterijumskom prostoru.

U nekim zadacima se traži istovremeno određivanje upravljanja $u(t)$ i parametara sistema A. Ne samo u tim slučajevima, nego uopšte, matematički modeli realnih dinamičkih sistema upravljanja su retko takvi da se ovako postavljeni zadatak može rešiti analitički. Zato se preduzimaju različite aproksimacije od kojih je najčešće zamenjivanje kontinualnih modela diskretnom formom i njegovo rešavanje numeričkim metodama.

Pošto se u ovoj knjizi razmatraju skoro isključivo statički problemi, samo radi ilustracije ovde se navodi postavka klasičnog "problema brahistohrone". Radi se o problemu krive najkraćeg vremena ili krive najbržeg spusta koji je formulisao Johan Bernuli 1696. g. i za koji se vezuje rađanje teorije optimalnog upravljanja [4].

Primer 1.3. Pretpostavimo da materijalna tačka mase m počne u trenutku $t = 0$ da se kreće iz tačke $A(0,0)$ ka tački $B(a,b)$ pod uticajem Zemljine teže i bez trenja, slika 1.3. Pitanje je kojoj putanji odgovara minimalno vreme kretanja materijalne tačke.



Slika 1.3. *Problem brahistohrone*

Iz zakona o održanju energije imamo da je posle vremena t u tački (x,y) promena kinetičke jednaka promeni potencijalne energije

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = mgy.$$

Dalje

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Iz druge jednačine se dobija

$$v^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

i kada se zameni u prvu dobija se

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\frac{1+y'^2}{y}\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

Integraljenjem se dobija vreme kretanja

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \left[\frac{1+y'^2}{y}\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

uz uslove $y(0) = 0$ i $y(a) = b$. Zadatak je naći $y = y(x)$ za koje je T minimalno. ♦

Od kontinualnih dinamičkih zadataka optimizacije posebno su izučavani zadaci tipa:

Odrediti funkciju $y = y(x)$ tako da funkcional

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{1.30}$$

ima ekstremnu vrednost pri čemu treba da su ispunjeni uslovi: $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, $y \in C^2$, gde su y_a i y_b date vrednosti, a C^2 označava klasu funkcija sa neprekidnim drugim izvodima. Potreban uslov za ekstremum ovog funkcionala je da $y(x)$ zadovoljava Ojlerovu jednačinu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \ . \qquad (1.31)$$

Iz ove jednačine se dobija da je za problem brahistohrone rešenje cikloida, kriva koju opisuje tačka na krugu koji se kotrlja po ravnoj podlozi [1].

Literatura

[1] Dajović, S., Kovačević-Vujčić, V., *Matematika II*, Kultura, Beograd, 1989.

[2] Opricović S. *Optimizacija sistema*, Građevinska knjiga - Nauka, Beograd, 1992.

[3] Pierre, D. A., *Optimization theory with applications*, John Wiley&Sons, New York, 1969.

[4] Sussmann, H. J., Willems J. C., "300 Years of Optimal Control: From the brachystochrone to the Maximum Principle", *IEEE Trans. on Control Systems*, June 1997, pp. 32-44.

[5] Vujošević, M., *Operaciona istraživanja – Izabrana poglavlja,* Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1999.

[6] Zlobec S, Petrić J., *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.