UVOD U OPTIMIZACIJU

JEDNOKRITERIJUMSKA OPTIMIZACIJA

Opšti pristup u metodama jednokriterijumske optimizacije polazi od formiranja adekvatnog matematičkg modela za realni problem koji se razmatra. Matematički model nam služi za izvođenje potrebnih analiza na osnovu kojih možemo doći do traženih odgovora u vezi sa postavljenim problemom. Na osnovu eksperimentisanja na matematičkom modelu treba zaključiti koje je rešenje najbolje i njega treba predložiti donosiocima odluke da ga implementiraju u praksi. U ovom kontekstu nećemo insistirati na razlici u terminima rešenje i odluka ali se grubo može reći da se prvi odnosi na rezultat dobijen matematičkom analizom a drugi na konačni rezultat koji zavisi o vlasnika problema, odnosno donosioca odluke.

Postoji više u suštini vrlo sličnih opštih principa koji se preporučuju u fazi izgradnje matematičkog modela a ovde ćemo samo u najkraćim crtama prikazati nekoliko osnovnih elemenata ovog dela u procesu rešavanja problema.

Cilj je razlog zbog koga se javlja i rešava problem odlučivanja. Cilj proizilazi iz namere da se nešto ostvari ili postigne. On treba da je jasno iskazan i na početku može biti formulisan zahtevima koji se postavljaju od strane vlasnika problema. Ovi zahtevi mogu biti iskazani kvalitativno kao napr: “Obezbediti neprekidnu i ekonomski efikasnu proizvodnju uglja,” ili “Osigurati što veću sigurnost radnika na poslu”. Cilj može biti iskazan i preciznije, npr: “Smanjiti prosečne troškove proizvodnje uglja po jednoj toni za 15% u narednih godinu dana,” ili “U narednih šest meseci kupiti rezervne delove za potrebe održavanja za odobreni budžet od N dinara sa namerom da se postigne što veća operativna gotovost opreme”.

Upravljačke promenljive se odnose na odluke koje može da donese onaj koji namerava da ostvari postavljeni cilj. U problemu koji se razmatra treba jasno uočiti na šta se može i kako uticati, odnosno šta je pod kontrolom donosioca odluke a šta nije. Upravljačke promenljive mogu biti: investicije u opremu uključujući količine novca i dinamiku ulaganja, količine rezervnih delova i slično. U matematičkom modelu se obično predstavljaju vektorom koji se obeležava sa

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Analitičar problema i donosilac odluke treba da odrede konkretne vrednosti za svaku upravljačku promenljivu x_j, $j = 1,\dots,n$. Odgovarajući vektor $\boldsymbol{x}$ nazivamo rešenje ili odluka. Skup rešenja označićemo sa D.

U problemima koji se razmatraju u okviru ovog projekta treba imati na umu da upravljačke promenljive x_j mogu da budu zavisne od vremena, tj. da su problemi zamene po prirodi dinamički što znatno otežava i matematičko modeliranje i rešavanje problema o čemu će kasnije biti više reči.

Kriterijum ili kriterijumska funkcija $f(\boldsymbol{x})$ je funkcija koj preslikava skup rešenja D u skup S vrednosti ishoda koji pokazuju stepene ostvarenja postavljenog cilja f: $D \to S$. Prema tome, $f(\boldsymbol{x})$ predstvalja meru kvaliteta rešenja $\boldsymbol{x}$. Ako je ishod na osnovu kojeg se meri kvalitet rešenja tipa dobiti, onda je bolje ono rešenje koje daje veću vrednost kriterijumske funkcije. Najbolje rešenje je ono koje daje maksimalnu vrednost kriterijumske funkcije. Analogno tome, u slučaju kada se posmatraju ishodi tipa troškova, bolje je ono rešenje koje daje manju vrednost kriterijumske funkcije a najbolje je ono koje daje najmanju vrednost $f(\boldsymbol{x})$. Neki autori nazivaju $f(\boldsymbol{x})$ funkcijom cilja ili funkcijom namere što je pitanje terminologije i ovde ne treba razmatrati moguće razlike u značenjima već je bolje njih koristiti kao sinonime.

Najbolje rešenje se naziva ***optimalno*** rešenje i obično se označava sa $\boldsymbol{x}^*$. Zadatak jednokriterijumske optimizacije je zadatak nalaženja optimalnog rešenja. On se formalno postavlja na sledeći način:

Zadatak Z.1.

Odrediti vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tako da funkcija $f(\boldsymbol{x})$ ima optimalnu (maksimalnu ili minimalniu) vrednost, tj. rešiti sledeći matematički zadatak

$$\text{opt } \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}. \qquad \text{(z.1)}$$

Rešenje ovog zadatka je $\boldsymbol{x}^*$. Njemu se pridružuje optimalna vrednost kriterijuma $f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$.

Opšti oblik zadatka Z.1. pretpostavlja da su u fazi modeliranja realnog problema rešena sledeća dva bitna problema. Prvi je utvrđivanje zavisnosti ishoda, odnosno kriterijuma, od upravljačkih promenljivih, odnosno definisanje funkcije $f(\boldsymbol{x})$. Ovo se po pravilu radi na osnovu poznatih prirodnih ili ekonomskih zakonitosti koji vladaju u razmatranom sistemu. Međutim, često nema tačnih naučnih zakona koji pokazuju uticaj neke upravljačke promenljive na vrednost kriterijuma. Tada se koriste merenja, statističke obrade ili ekspertne procene. Njima se utvrđuju oblik funkcije zavisnosti (npr. linearna, polinomna, eksponencijalna itd) i parametri ovih funkcija. U tom smislu, veoma je važno razlikovati parametre sistema na koje analitičar ne može uticati od upravljačkih promenljivih koje su pod njegovom kontrolom. Obazrivost je potrebna zbog toga što su u nekim sistemima parametri podložni promenama dok se za neke promenljive ne može jasno utvrditi da li su pod kontrolom donosioca odluke ili ne. Oblik i karakter kriterijumske funkcije znatno utiče na algoritme za nalažaenje optimalnog rešenja.

U vezi sa određivanjem kriterijumske funkcije kasnije će biti više reči a ovde naznačimo samo par opštih primedbi. U rešavanju sličnih problema metodama jednokriterijumske optimizacije kao polazna tačka koriste se ekonomski ciljevi organizacije. Zatim se utvrdjuju načini njihovog merenja, računanja ili procenjivanja. Mada se obično kao ekonomski cilj posmatra profit i njegovo uvećanje, nekad se analiza ograničava na posmatranje troškova poslovanja (proizvodnje) i kao cilj usvoja da troškovi po jedinici proizvodnje treba da budu što niži. Dakle, troškovi po jedinici proizvodnje uprosečeni na planski period od godinu dana mogu da se koriste kao kriterijum na osnovu koga se pronalazi najbolje rešenje. Radi toga, za svako moguće rešenje potrebno je razraditi metodologiju merenja, računanja ili procenjivanja ovih troškova. Pri tome se mora voditi računa da se troškovi menjaju u vremenu.

Drugi problem u vezi sa zadatkom Z.1. jeste određivanje skupa mogućih upravljačkih vektora. Prvobitni matematički modeli jednokriterijumske optimizacije pretpostavljaju da je $D = R^n$, odnosno da su upravljačke promenljive x_j realni brojevi. Takvi zadaci se nazivaju zadaci optimizacije bez ograničenja i oni se u praksi relativno retko sreću. U praktičnim problemima su vrednosti upravljačkih promenljivih obično ograničene na neke podskupove skupa realnih brojeva. Na primer, može se zahtevati da neka upravljačka promenljima zbog svoje prirode pripada skupu celih brojeva a neka druga skupu $\{0,1\}$. Pored toga, neke promenljive mogu biti međusobno uslovljene. Na primer, sredstva za nabavku potrebnih rezervnih delova mogu biti fiksirana tako da se kupovinom određenog dela utiče na mogućnost kupovine drugih delova.

Navedena ograničenja se zavisno od njihove prirode matematički pišu na različite načine. Uobičajeno je da se ona zapišu skupom relacija tipa

$$\mathrm{g_i}(\boldsymbol{x}) \le b_i\ ,\ i = 1,\ \ldots,\ m\ .$$

Ovaj skup jednačina i nejednačina naziva se skup ograničenja a funkcije $g_i(\boldsymbol{x})$ funkcije ograničenja. U nekim slučajevima odnosno za neko i se umesto relacije $\le$ javlja relacija $\ge$ ili =. Rešenja koja zadovoljavaju navedeni skup ograničenja formaraju skup dopustivih rešenja D.

U tekstu koji sledi pretpostavićemo da je kriterijumska funkcija tipa troškova, odnosno da treba naći rešenje koje daje što manju vrednost $f(\boldsymbol{x})$. Zadatak optimizacije sada se može formulisati na sledeći način:

Zadatak Z.2.

Odrediti vektor $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ tako da funkcija $f(\boldsymbol{x})$ ima minimalniu vrednost, tj. rešiti sledeći matematički zadatak

$$\min\ \{f(\boldsymbol{x})\ |\ \mathrm{g_i}(\boldsymbol{x}) \le b_i\ ,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ \boldsymbol{x} \in R^n\}\ . \qquad \text{(z.2)}$$

Kao i ranije, rešenje ovog zadatka obeležava se sa x^*. Njemu se pridružuje optimalna vrednost kriterijuma $f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$. Kažemo da je x^* optimalno rešenje zadatka Z.2. ako ne postoji ni jedno drugo $\boldsymbol{x}$ iz skupa dopustivih rešenja D tako da je $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}^*)$.

Zadatak Z.2. predstavlja opšti oblik zadatka jednokriterijumske optimizacije koji se zove i zadatak globalne optimizacije jer su u ovoj postavci funkcije $f(\boldsymbol{x})$ i $\mathrm{g_i}(\boldsymbol{x})$ proizvoljne. Međutim, zavisno od oblika funkcija $f(\boldsymbol{x})$ i $\mathrm{g_i}(\boldsymbol{x})$ prave se klasifikacije zadataka optimizacije i razvijaju pogodne grupe algoritama za njihovo rešavanje u okviru posebne matematičke discipline koja se naziva matematičko programiranje. Na primer, ako su $f(\boldsymbol{x})$ i $\mathrm{g_i}(\boldsymbol{x})$ linearne funkcije, onda je zadatak Z.2. zadatak linearnog programiranja i za njegovo rešavanje postoje efikasni algoritmi. Napomenimo još da se u slučaju kada je kriterijumska funkcija nelinearna ali separabilna po promenljivima često koristi dinamičko programiranje kao efikasna metoda za nalaženje optimalnog rešenja.

Modeliranje problema odlučivanja kao zadatka jednokriterijumske optimizacije ima više dobrih osobina. Pre svega, u okviru matematičkog programiranja razvijeno je puno efikasnih algoritama za rešavanje karakterističnih tipova zadataka. Za ove algoritme postoje pouzdani i dobro testirani softveri, bilo da su besplatni ili komercijalno raspoloživi. Za probleme globalne optimizacije koriste se i takozvane meta heuristike kojima se po pravilu dobija dobro rešenje čak i u slučajevima vrlo teških problema (nelinearnih, nekonveksnih i/ili kombinatornih).

Sledeća prednost metoda jednokriterijuske optimizacije sastoji se u tome što se u optimizacionim zadacima za koje postoje egzaktni algoritmi rešavanja može osnovano tvrditi da je dobijeno rešenje optimalno. Naravno, ovo rešenje je optimalno rešenje modela a za realni sistem je u onoj meri dobro u kojoj je model dobra predstava stvarnog problema.

Za zadatke globalne optimizacije za koje ne postoje egzaktni algoritmi koji garantuju optimalno rešenje, korišćenjem savremenih metaheuristika mogu se razviti efikasni algoritmi. Njihovom primenom se dobijaju rešenja koja su bliska optimalnom a u većem broju slučajeva su baš i optimalna. Nekada se može precizno odrediti koliko je najveće moguće odstupanje optimalne vrednosti kriterijuma od one postignute rešavanjem približnim algoritmom. Oslanjajuči se na model i zadatak optimizacije, analitičar odluke može da zastupa i odbrani stav da je rešenje koje daje rešavanjem zadatka najbolje moguće.

Nedostatak metoda jednokriterijumske optimizacije u praktičnim primenama proizilazi najpre iz problema razvoja odgovarajućeg matematičkog modela i nemogućnosti da model u potpunosti verno opiše realni problem. Veoma često je vrlo teško ili skoro nemoguće matematički precizno opisati sve interakcije koje postoje u realnom problema a koje možda utiču na kvalitet rešenja.

Drugi nedostatak metoda jednokriterijumske optimizacije proizilazi upravo iz činjenica da se kvalitet rešenja ocenjuje samo na osnovu jednog kriterijuma. U složenim sistemima to je vrlo retko slučaj: donosioci odluke pri rešavanju svojih problema u praksi uvek imaju na umu, eksplicitno ili implicitno, više različitih kriterijuma od kojih su neki međusobno konfliktni. Ovaj problem uočen je u isto vreme kada su počeli da se razvijaju i primenjuju metode jednokriterijumske optimizacije. Da bi se ostalo u domenu jednoskriterijumske optimizacije i time iskoristile njene prednosti a pri tome matematičkim modelom što vernije opisao stvarni problem, razvijani su različiti pristupi.

Najraniji pristupi polazili su od pretpostavke da donosilac odluke može eksplicitno da iskaže svoje zahteve tako što jedan od ishoda proglasi kriterijumom, a ostale ograničenjima koje treba da zadovolji optimalno rešenje. Analizom osetljivosti i postoptimalnom analizom može da se dobije bolji uvid u problem kao i mogućnost menjanja prvobitno dobijenog zadatka. Ovakvi postupci su u originalnoj literaturi nazvani analiza razmene (trade off analysis) a na srpski jezik su prevedeni i kao analiza traženja kompromisa.

Sledeći pristup iz oblasti jednokriterijumske optimizacije je analiza troškova i dobiti (cost benefit analysis) u kojoj se svi efekti, poželjni i nepoželjni, izražavaju novčanim jedinicama a onda bira odluka koja maksimizira razliku između željenih i neželjenih efekata. Ova metoda se primenjuje kao standard u analizi projekata i odlučivanju o investicionim poduhvatima i u tom smislu je najinteresantniji i najznačajniji je klasična metoda.

VIŠEKRITERIJUMSKA ANALIZA

Kao što je ranije naznačeno, modeli za nalaženje optimuma jedne kriterijumske funkcije su obično samo aproksimacija realnih problema u kojima donosilac odluke mora da vodi računa o više ciljeva. Ovaj deo teksta posvećen je matematičkim modelima i metodama koje treba da pomognu donosiocu odluke u analizi i izboru rešenja na osnovu više kriterijuma koji se istovremeno razmatraju. Pritom, kao i u slučaju jednokriterijumske optimizacije, donosilac odluke implicitno zadržava slobodu da prihvati, promeni ili odbaci rešenje dobijeno na osnovu matematičkog modela optimizacije.

Metode koje od samog početka formiranja matematičkog modela za određeni realni problem vode računa o više ciljeva istovremeno razvijaju se u oblasti *višekriterijumske optimizacije* (VKO). Ovaj deo matematičkog programiranja svoj buran razvoj ima od kraja sedamdesetih godina dvadesetog veka.

Ima više razloga koji utiču na to da su problemi VKO po prirodi suštinski drugačiji u odnosu na probleme jednokriterijumske optimizacije. Osnovni je baš u tome što se svi faktori koji utiču na odluku, odnosno svi ishodi koje bi imalo eventualno rešenje, posmatraju kao kriterijumi čije vrednosti treba da budu optimalne. Dakle, treba naći našenje koje je najbolje po svim razmatranim kriterijumima istovremeno a činjenica je da su neki od njih u skoro svim problemima odlučivanja međusobno delimično ili potpuno konfliktni. Pored toga, razmatrani kriterijumi mogu po svojoj prirodi biti veoma raznorodni i izraženi u različitim mernim jedinicama, od novčanih jedinica, preko jedinica fizičkih veličina, do verovatnoća ili subjektivnih procena datih po nekoj skali koja se formira za konkretni problem. Sve ovo ukazuje da konačno jedinstveno rešenje ne može da se odredi bez učešća donosioca odluke.

Zadatke višekriterijumske optimizacije u slučajevima kada se razmatraju važne odluke kao što su odluke u vezi sa kapitalnim ulaganjima u opremu za eksploataciju uglja, karakteriše relativno veliki broj kriterijuma, ne dva ili tri nego deset ili više. Što je broj kriterijuma veći, zadaci analize su složeniji i teži. U odlučivanju učestvuje veći broj pojedinaca ili grupa i svi oni favorizuju svoje sisteme vrednosti, odnosno kriterijume koji najbolje odslikavaju interese grupe kojoj pripadaju. Radi efikasnijeg analiziranja odluke i pronalaženja pogodnog rešenja kriterijumi se grupišu. Uobičajene su sledeće grupe kriterijuma:

- ekonomski,
- tehnički,
- tehnološki,
- socijalni i
- ekološki.

Prema nameri donosioca odluke, odnosno prema problemu koji treba da reši, višekriterijumski zadaci se klasifikuju u sledeće tri grupe:

- zadaci *višekriterijumske optimizacije* kojima se rešavaju problemi određivanja podskupa rešenja koja zadovoljavaju određene uslove i/ili izbora jednog rešenja iz ovog podskupa,
- zadaci višekriterijumskog ili *višeatributnog rangiranja* kojima se rešavaju problemi određivanja potpunog ili delimičnog redosleda, rang liste, rešenja koja pripadaju konačnom i prebrojivom skupu;
- zadaci višekriterijumske ili *višeatributne selekcije* kojima se rešavaju problemi izbora određenog broja rešenja koja pripadaju konačnom i prebrojivom skupu.

Ovde će se razmatrati prevashodno zadaci prve grupe, tj. zadaci VKO, uz napomenu da je većina bitnih osobina problema i osnovnih pristupa rešavanju u suštini ista za sve tri grupe problema. Koristićemo istu notaciju i terminologiju kao i u prethodnom tekstu:

$\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ - *rešenje*, vektor upravljačkih promenljiva, promenljiva odluke, alternativa ili odluka.

D - *dopustivi skup* ili skup dopustivih rešenja

$f_k : R^n \to R$ - kriterijumska funkcija ili funkcija cilja, $k = 1,...,p$

$g_i : R^n \to R$ - funkcija ograničenja, $i = 1,...,m$.

Po uzoru na zadatak jednokriterijumske optimizacije, opšti oblik zadatka višekriterijumske optimizacije formuliše se na sledeći način.

Zadatak Z.3

Odrediti vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tako da sve kriterijumske funkcije $f_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1,...,p,$ imaju optimalnu (minimalnu ili maksimalnu) vrednost, tj. rešiti sledeći matematički zadatak

$$\text{opt } \{ (f_1(\boldsymbol{x}),..., f_k(\boldsymbol{x}),..., f_p(\boldsymbol{x})) | \ \boldsymbol{x} \in D \subset R^n \} \qquad \text{(Z.3)}$$
$$D = \{ \boldsymbol{x} \in R^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \ i = 1,...,m\}$$

Ako se sa $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ označi vektor kriterijumskih funkcija

$$\boldsymbol{f}(x) = (f_1(\boldsymbol{x}),..., f_k(\boldsymbol{x}),..., f_p(\boldsymbol{x})).$$

i ako se kao i ranije pretpostavi da su kriterijumske funkcije troškovnog tipa, onda se zadatak VKO može napisati na sledeći način:

Odrediti $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ kao rešenje sledećeg zadatka optimizacije

$$\min \{ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D \subset R^n\}.$$

Ovo je razlog što se zadatak VKO naziva i zadatkom *vektorske optimizacije*.

U vezi sa ovako postavljenim zadatkom VKO treba uočiti da pretpostavka da sve funkcije kriterijuma treba minimizirati ne ograničava primenljivost ovog modela jer se zadatak u kome neku od funkcija treba maksimizirati prevodi u zadatak minimizacije negativne vrednosti te kriterijumske funkcije.

Prvi korak u VKO jeste ispitivanje da li u dopustivom skupu postoje rešenja koja daju maksimalne vrednosti za svaku kriterijumsku funkciju ponaosob. Određivanje tih rešenja $\boldsymbol{x}^{k*}$, $k = 1, ..., p$, postiže se rešavanjem odgovarajućih pojedinačnih optimizacionih zadataka.

Rešenja koja se dobijaju rešavanjem sledećih pojedinačnih nezavisnih zadataka

$$\min f_k(\boldsymbol{x}) , \qquad k = 1,...,p$$
$$\boldsymbol{x} \in D$$

označavaju se sa $\boldsymbol{x}^{k*}$, $k=1,...,p$, i nazivaju se *marginalna* rešenja zadatka VKO. Odgovarajuće optimalne vrednosti pojedinačnih kriterijuma su $f^{k*} = f_k(\boldsymbol{x}^{k*})$.

Za zadatke VKO u kojima se sva marginalna rešenja poklapaju kaže se da postoji savršeno rešenje.

Savršeno rešenje $\boldsymbol{x}^* \in D$ je ono rešenje za koje sve kriterijumske funkcije istovremeno postižu minimum

$$f_k(\boldsymbol{x}^*) \le f_k(\boldsymbol{x}) \ , \ \boldsymbol{x} \in D, \ k =1,...,p.$$

Jasno je da su u praksi retki slučajevi kada postoji savršeno rešenje zadatka VKO. Razlike u kriterijumima, a pogotovu njihova potpuna ili delimična konfliktnost, predstavljaju suštinu problema VKO. Zato je koncept savršenog rešenja veoma ograničenog teorijskog i praktičnog značaja.

Donosilac odluke treba na kraju da usvoji neko rešenje. Rešenje koje prihvati donosilac odluke naziva se *najbolje* ili *preferirano* rešenje.

Zadatak je VKO da pomogne dosiocu odluke da izabere rešenje koje smatra najboljim u datom problemu. Zato se napori ka rešavanju postavljenog višekriterijumskog problema često nazivaju *višekriterijumska analiza*.

Činjenica da zadaci VKO po pravilu nemaju savršeno rešenje upućuje na preispitivanje koncepta optimalnosti u kontekstu postojanja više kriterijuma. Drugim rečima, pošto ne postoji rešenje koje je najbolje po svim kriterijuma istovremeno, nema opravdanja da se za neko rešenje kaže da je optimalno. Zato se u VKO koristi novi koncept za ocenu valjanosti rešenja koji se naziva *koncept Pareto optimalnosti*.

Osnovni pojam u konceptu Pareto optimalnosti je *dominantno rešenje* koje se još naziva: efikasno, dominirajuće, nedominirano, Pareto optimalno rešenje i Pareto optimum zadatka VKO. Definicija dominantnog rešenja je sledeća.

Rešenje $\boldsymbol{x}^* \in D$ je dominantno rešenje zadatka VKO ako ne postoji $\boldsymbol{x} \in D$ tako da je

$$f_k(\boldsymbol{x}) \le f_k(\boldsymbol{x}^*)\ ,\ \ k = 1,\ldots,p$$

pri čemu bi bar za jedno $q \in \{1,2,\ldots,p\}$ važila stroga nejednakost

$$f_q(\boldsymbol{x}) < f_q(\boldsymbol{x}^*)\ .$$

Drugim rečima, u dopustivom skupu ne postoji rešenje koje bi bilo bolje od dominantnog bar po jednom kriterijumu, a da pritom nije gore ni po jednom od ostalih kriterijuma. To znači da bi poboljšavanje bar jednog kriterijuma u odnosu na dominantno rešenje bilo praćeno pogoršavanjem nekog od drugih kriterijuma.

Značaj koncepta Pareto optimalnosti sastoji se u tome što racionalni donosilac odluke neće birati rešenje koje nije dominantno. Zato je važno da se pri razvoju metoda VKO vodi računa da rešenja koja se dobijaju budu dominantna. Lako je pokazati da je svako marginalno rešenje $\boldsymbol{x}^{k*}$ kandidat da bude dominantno. Stvarno, po definiciji je $f_k(\boldsymbol{x}^{k*}) \le f_k(\boldsymbol{x})$ što znači da ne postoji $\boldsymbol{x} \in D$ tako da je $f_k(\boldsymbol{x}) < f_k(\boldsymbol{x}^{k*})$. Pored toga, očigledno je da je savršeno rešenje dominantno.

Donosilac odluke će izabrati najbolje rešenje na osnovu vrednosti kriterijuma. Zato je uputno zadatak VKO analizirati upravo na tom skupu.

Skup S svih vrednosti koje uzima vektor kriterijumskih funkcija na dopustivom skupu D naziva se *kriterijumski skup*, skup plaćanja, skup ishoda ili skup vrednosti kriterijuma

$$S = \{\ (f_1(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ f_p(\boldsymbol{x}))\ |\ \boldsymbol{x} \in D\ \} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ |\ \boldsymbol{x} \in D\}\ .$$

Vektor kriterijuma, odnosno elemenat skupa S obeležavaćemo ukratko i sa $\boldsymbol{f} = (f_1,\ldots,\ f_k,\ldots,\ f_p)$ i radi jednostavnosti po potrebi nazivati tačkom u skupu S.

U kriterijumskom skupu S definišu se dominantne i slabo dominantne vrednosti vektora kriterijuma, odnosno dominantne i slabo dominantne tačke.

Tačka $\boldsymbol{f}^*$ je *dominantna* ako ne postoji $\boldsymbol{f} \in S$ tako da je

$$f_k \leq f_k^* \ , \ k = 1,2,...,p$$

pri čemu bi bar jedno $q \in \{1,2,...,p\}$ važila stroga nejednakost

$$f_q < f_q^* \ .$$

Veza između dominantnih rešenja i dominantnih tačaka je sledeća:

Tačka $\boldsymbol{f}^*$ je dominantna ako i samo ako postoji dominantno rešenje $\boldsymbol{x}^*$ tako da važi

$$f_k^* = f_k(\boldsymbol{x}^*) \ , \ k=1,...,p.$$

Na skupu S se mogu uočiti i objasniti osnovni pojmovi i osobine pojedinih zadataka VKO. U ovom kontekstu značajna je analiza konveksnosti skupa S jer ako skup S ima osobinu konveksnosti, onda se može zaključiti da neke od primenjenih metoda garantuju dobijanje dominantnog rešenja ili da se izborom pojedinih parametara u nekoj metodi može dobiti bilo koje dominantno rešenje. Navodimo, radi ilustracije, samo par nekoliko poznatih stavova.

Ako je dopustivi skup D konveksan i ako su kriterijumske funkcije $f_k(\boldsymbol{x}),\ k=1,...,p$ linearne, onda je skup vrednosti kriterijuma S konveksan.

Neka je D konveksan skup i neka su f_k konkavne. Ako za proizvoljno $\boldsymbol{x} \in D$ i $\boldsymbol{u}' \leq f(\boldsymbol{x})$ (tj. $u_1' \leq f_1(\boldsymbol{x})$,..., $u_p' \leq f_p(\boldsymbol{x})$) postoji $\boldsymbol{x}'$ takvo da je $\boldsymbol{u}' = f(\boldsymbol{x}')$, tada je kriterijumski skup S konveksan.

Poseban slučaj je kada je S neprazan skup koji sadrži konačan broj elemenata. Tada postoji bar jedna dominantna tačka, tj. svi takvi zadaci (višeatributna optimizacija) sadrže bar jedno dominantno rešenje.

Kao što je već rečeno, kada ne postoji savršeno rešenje zadatka VKO, u određivanju najboljeg rešenja presudnu ulogu ima donosilac odluke. On je taj koji odlučuje šta mu je važnije i koje rešenje radije prihvata ("preferira").

Zavisno od toga kako se i kada donosilac odluke uključuje u rešavanje problema razlikuju se tri osnovna pristupa, odnosno tri grupe metoda rešavanja:

- aposteriorni pristup
- apriorni pritup
- interaktivni i kooperativni pristup.

DO se u *aposteriornom* pristupu uključuje u analizu i rešavanje svog problema posle određivanja skupa dominatnih rešenja, dakle a posteriori. On sam treba da izabere najbolje rešenje. Zadatak analitičara je da iz dopustivog skupa izdvoji podskup dominatnih rešenja.

Ovaj pristup je više teorijskog nego praktičnog značaja. Dva su osnovna razloga tome. Prvi je taj što je izdvajanje podskupa dominatnih rešenja analitički često nerešiv problem. Za izvesne zadatke diskretne optimizacije i za višekriterijumsko linearno programiranje to je u principu moguće uraditi, ali prilično teško. Drugi razlog je to što podskup dominatnih rešenja može da bude veoma širok (velik ili beskonačan broj elemenata skupa) tako da donosilac odluke ne može lako da odabere rešenje.

U *apriornom* pristupu DO treba unapred, pre rešavanja zadatka VKO, da iskaže svoj odnos prema kriterijumima. Ovo može da se uradi utvrđivanjem prioriteta ili hijerarhije kriterijuma, dodeljivanjem težina pojedinim kriterijumima, određivanjem relativnih odnosa između svaka dva kriterijuma ili na neki drugi način. Na osnovu toga analitičar treba rešavanjem zadatka da predloži DO jedno rešenje koje najviše odgovara njegovim iskazanim preferencijama.

Nedostatak ovog pristupa je u tome što DO teško može iz jednog pokušaja da precizno odredi svoj stav prema kriterijumima, naročito na način koji zahtevaju određeni matematički model i metoda. On se po pravilu protivi da unapred eksplicitno kaže kakav odnos između kriterijuma postoji ako će to kasnije da mu predstavlja obavezu. Jedino što je izvesno jeste da on rešenje traži u skupu dominatnih rešenja. Analizom rešenja za razne skupove težinskih koeficijenata, na primer, DO može da prepozna međusobni odnos kriterijuma i rešenja i da dobije bolji uvid u suštinu problema.

Apriorni pristup je teorijski najviše razmatran i praktično najčešće primenjivan. Razvijeno je puno metoda apriorne VKO. Neke od njih su prilično jednostavne i to im daje veliku prednost za praktične primene u posebnim situacijama.

Interaktivni pristup obuhvata metode koje kombinuju apriorni i aposteriorni pristup sa aktivnim učešćem DO. Pristup se zasniva na neprekidnom korišćenju računara u fazi odlučivanja i korisnički realizovanom okruženju. Savremeni softverski alati treba da pruže donosiocu odluke snažnu podršku u ekperimentisanju sa različitim skupovima svojih preferenci. Jednostavno i brzo obavljanje raznovrsnih analiza treba da olakšaju donosiocu odluke konačni izbor.

Očigledno je da interaktivne metode podrazumevaju intenzivno korišćenje ekspertnih sistema i sistema zasnovanih na znanju. Ovi sistemi bi trebalo da sadrže sistematizovana znanja o ranijim rešavanjima sličnih zadataka i da ih na inteligentan način koriste da bi pomogla donosiocu odluke. U tom smislu ovakvi pristupi pretpostavljaju određenu saradnju donosioca odluke i računara. Zato se nazivaju i kooperativnim.

Interaktivni i kooperativni pristupi su moderni i predstavljaju najveći izazov. Problemi koje treba pritom rešavati interesantni su i sa stanovišta veštačke inteligencije i softverske implementacije. Kooperacijom donosioca odluke i računara trebalo bi da se otkrije struktura njegovih odnosa prema kriterijumima, tzv. preferentna struktura ili struktura preferencija donosioca odluke. U tome se pojavljuju problemi za čija su rešavanja potrebna znanja i istraživanja u oblastima psiholoških i socioloških nauka.

Matematička istraživanja zadataka VKO ostaju pretežno u okvirima apriornih i aposteriornih pristupa. Ovde se ukratko opisuju neke od najčešće primenjivanih metoda apriornih i aposteriornih pristupa.

Leksikografska metoda

Ova metoda polazi od pretpostavke da je DO u stanju da utvrdi strogu hijerarhiju između kriterijuma. On treba da odredi tzv. *leksikografski poredak* kriterijuma. U ovom poretku su kriterijumi poređani po prioritetu: na prvom mestu se nalazi kriterijum najvišeg prioriteta i njega najpre treba optimizirati. Sledi kriterijum drugog prioriteta koji se primenjuje samo za ona rešenja koja su optimalna po prvom kriterijumu. Postupak se na sličan način nastavlja dalje. Time se zadatak VKO svodi na rešavanje najviše p zadataka jednokriterijumske optimizacije. Zato se ova metoda zove i metoda *sekvencijalnih optimizacija.*

Kada se primenjuje leksikografska metoda, osnovni zadatak VKO označava se na sledeći način:

lex min $\{ (f_1(\boldsymbol{x}),..., f_k(\boldsymbol{x}),..., f_p(\boldsymbol{x})) | \boldsymbol{x} \in D \subset R^n \}$

Algoritam za rešavanje zadatka leksikografske optimizacije ima sledeće osnovne korake.

1. Kriterijumi se poređaju i indeksiraju po važnosti tako da je najvažniji $f_1(x)$, a najniži prioritet ima $f_p(x)$.
   Stavi se da je dopustivi skup $D_0=D$ i brojač iteracija $k = 1$.
2. Naći x^* koje je rešenje sledećeg jednokriterijumskog zadatka

   $\min f_k(\boldsymbol{x})$

   $\boldsymbol{x} \in D_{k-1}$
3. Ako je $\boldsymbol{x}^*$ jedinstveno ili ako je $k=p$, kraj. Inače formirati

   $D_k = \{ \boldsymbol{x}^* \in D_{k-1} \mid f_k(\boldsymbol{x}) \geq f_k(\boldsymbol{x}^*)\}$
4. Staviti $k=k+1$ i vratiti se na korak 2.

Primenom leksikografske metode dobija se dominantno rešenje. Ovom metodom se u svakom koraku smanjuje skup mogućih rešenja. Njome se ne mogu dobiti sva dominana rešenja. Leksikografskom metodom otkriva se savršeno rešenje kada ono postoji.

Lako se uočava osnovni nedostatak leksikografske metode. On nastaje iz činjenice da se pri određivanju rešenja može desiti da se o nekim kriterijumima uopšte ne vodi računa. Ako se na k-tom koraku dobije jedinstveno rešenje, onda se kriterijumi $(k+1), ...,p$ ne uzimaju u obzir. Može se desiti, što u praksi nije redak slučaj, da se već po prvom kriterijumu dobije jedinstveno optimalno rešenje. Tada se po ovoj metodi apsolutno zanemaruju svi ostali kriterijumi a problem je u suštini tretiran kao jednokriterijumski.

Relaksirana leksikografska metoda

Da bi se unekoliko prevazišli nedostaci leksikografske metode, a zadržala njena prednost koja proizilazi iz činjenice da se rešavaju jednokriterijumski zadaci, jedan od načina se sastoji u labavljenju, relaksaciji, uslova koje treba da ispuni rešenje jednokriterijumskih zadataka. To se radi tako što se dozvoli da rešenja jednokriterijumskih zadataka ne moraju da budu optimalna već je dovoljno da budu blizu optimalnim.

I ovde se zahteva od DO da najpre utvrdi prioritete kriterijuma. Zatim se dodatno traži da kaže kolika mogu da budu tolerantna odstupanja oko optimalnih vrednosti za svaki od kriterijuma. To znači da se svakom kriterijumu pridružuju vrednosti a_k, $k=1,...,p,$ koja pokazuju koliko se kriterijum k može relaksirati u odnosu na njegovu optimalnu vrednost f_k*. Vrednosti a_k, se nazivaju *relaksacioni nivoi*.

Kao i u prethodnom algoritmu, kriterijumi se na početku poređaju i indeksiraju po važnosti tako da je najvažniji $f_1(\boldsymbol{x})$, a najniži prioritet ima $f_p(\boldsymbol{x})$. Zatim se rešavaju sledeći jednokriterijumski zadaci.

Korak 1 . $\min f_1(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{x} \in D$

Optimalna vrednost je f_1*

Korak 2 . $\min f_2(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{x} \in D$$
$$f_1(\boldsymbol{x}) \leq f_1^* + a_1$$
Optimalna vrednost je f_2^*

. . .

Korak p. $\min f_p(\boldsymbol{x})$
$$\boldsymbol{x} \in D$$
$$f_m(\boldsymbol{x}) \leq f_m^* + a_m \ , \quad m = 1,..., p\text{-}1.$$
Optimalna vrednost je f_p^*.

Optimalno rešenje poslednjeg jednokriterijumskog zadatka smatra se rešenjem originalnog zadatka VKO. Može se dokazati da je to rešenje, tj. rešenje dobijeno relaksiranom leksikografskom metodom dominantno ako je jedinstveno, odnosno slabo domiantno ako je višestruko.

Metode ε-ograničenja

Osnovna ideja za razvoj ovih metoda je modifikacija zadatka VKO u pogodan jednokriterijumski zadatak tako što se jedan od kriterijuma izdvoji kao najvažniji i jedini dok se ostali pretvore u ograničenja.

Donosilac odluke treba da utvrdi koji je kriterijum najvišeg prioriteta. Neka je to $f_1(\boldsymbol{x})$. Za ostale kriterijume treba zatim odrediti nivoe ε_k, $k = 2,...,p,$ iznad kojih se ne smeju nalaziti njihove vrednosti. Onda se rešava sledeći jednokriterijumski problem:

$$\min \{ f_1(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}$$
p.o.
$$f_k(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon_k \ , k = 2,..., p.$$

Iako su izbori prioritetnog kriterijuma i minimalnih nivoa ε_k subjektivne prirode, treba imati na umu da nijedno ε_k ne sme da bude veće od marginalnih vrednosti f_k^* jer bi u tom slučaju skup dopustivih rešenja bio prazan. Pored toga, moguće je da ne postoji nijedno dopustivo rešenje zadatka čak i kada su ispunjeni uslovi $\varepsilon_k \leq f_k^*$, $k = 2,...,p$. Takav slučaj ukazuje da su zahtevi donosioca odluke suviše restriktivni i da neke od ε_k treba povećati.

Rešenje dobijeno metodom ε-ograničenja je dominantno ako je jedinstveno.

Sledeći stav iskazuje vezu između dominantnog rešenja i rešenja dobijenog metodom ε- ograničenja.

Neka je $\boldsymbol{x}^*$ dominantno rešenje. Tada za proizvoljno q mogu da se odrede ε_k, k=1,...,p i $k \neq q$, tako da $\boldsymbol{x}^*$ bude rešenje zadatka dobijeno metodom ε-ograničenja.

Modifikovana metoda ε - ograničenja

Namera modifikacije metode ε-ograničnja je da se obezbedi da ona uvek daje dominantna rešenja. Slično metodi leksikografskog poretka i ovde se polazi od toga da se kriterijumi poređaju po prioritetu. Neka je ponovo najvažniji prvi, a najmanje važan p-ti kriterijum. Pored toga, za svaki od kriterijuma se zada vrednost ε-ograničenja. Algoritam ima sledeće korake:

Korak 1. Stavi se da je $q = 1$, da je prioritetna funkcija $f_q(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})$ i da su ograničenja ε_k, $k=1,...,p$, $k \neq q$.

Korak 2. Rešiti zadatak metodom ε-ograničenja.

$$\min \{f_q(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D, f_k(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon_k, k = 1,...,p, k \neq q \}$$

Neka je rešenje zadataka $\boldsymbol{x}^q*$.

Korak 3. Ako je $q < p$ i ako je $\varepsilon_q > f_q(\boldsymbol{x}^q*)$, staviti $\varepsilon_q = f_q(\boldsymbol{x}^q*)$, povećati q za 1 i vratiti se na korak 2. Ako je $q = p$, kraj.

Algoritam modifikovane metode ε-ograničenja nalazi dominantno rešenje.

Metoda težinskih koeficijenata

Ovo je jedna od najstarijih i najviše korišćenih metoda za rešavanje zadatka VKO. Njome se originalni zadatak transformiše u jednokriterijumski na taj način što se svi kriterijumi agregiraju u jedan. Obično se koristi aditivna funkcija sa odgovarajućim težinskim koeficijentima. Po pravilu je potrebno prethodno uraditi pogodnu normalizaciju kriterijuma.

Metoda je naročito pogodna kada su kriterijumi iste ili slične prirode, npr. finansijski pokazatelji izraženi monetarnim jedinicama. Donosilac odluke treba da svakom kriterijumu dodeli odgovarajuću težinu ili težinski koeficijent w_k, $k = 1,...,p$. Težinski koeficijenti treba da su nenegativni brojevi ali ne mogu svi istovremeno biti jednaki nuli. Zatim se rešava sledeći jednokriterijumski zadatak

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \sum_{k=1}^{p} w_k f_k(\mathbf{x})$$

Rešenje $\boldsymbol{x}^*$ je dominantno ako je jedinstveno. Dovoljni uslovi da optimalno rešenje dobijeno metodom težinskih koeficijenata bude dominantno sadržani su u sledećem stavu.

Ako su svi težinski koeficijenti w_k, $k = 1,...,p$ pozitivni, onda je optimalno rešenje dobijeno metodom težinskih koeficijenata dominantno rešenje originalnog zadatka.

Metode rastojanja

Logično je da donosilac odluke teži ka idealnoj tački koja odgovara optimalnim vrednostima svih kriterijuma. Najbolje rešenje često je ono koje je "najbliže" idealnoj tački. Otvara se pitanje šta znači *najbliže*, odnosno kako meriti rastojanje od idealne tačke u slučaju kada postoji više raznorodnih kriterijuma. Za donosioca odluke je zato važno da zna koliko se potencijalnim rešenjem približio idealnoj tački, a koliko svakom pojedinačnom marginalnom optimumu. Takve informacije pomažu u analizi problema i pri donošenju konačne odluke.

Polazeći od ovog razmatranja, razvijene su metode rastojanja kojima se nalazi rešenje koje daje minimalno rastojanje ukupne vrednosti kriterijuma od željenih vrednosi koje mogu ali ne moraju biti marginalni optimumi.

Osnovne metode rastojanja polaze od toga da željene vrednosti kriterijuma $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_p)$ odgovaraju upravo idealnom rešenju, odnosno idealnoj tački u kriterijumskom prostoru

$$\bar{\mathbf{f}} = (f_1^*, \ldots, f_p^*)$$

gde su f_k^* vrednosti koje odgovaraju marginalnim rešenjima $\boldsymbol{x}_k^*$, tj.

$$f_k^* = f_k(\boldsymbol{x}^{k*}) = \min \{ f_k(\boldsymbol{x})\}$$

Donosilac odluke može da odredi željene vrednosti i na drugačiji način.

Može desiti da je $\bar{\mathbf{f}} \in S$ i rešenje se onda dobija jednostavnim rešavanjem jednačina

$$f_k(\boldsymbol{x}) = \bar{f}_k, \; k = 1, \ldots, p.$$

Obično $\bar{\mathbf{f}} \notin S$ i tada se zadatak VKO transformiše u problem nalaženja rešenja koje minimizira rastojanje $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ od $\bar{\mathbf{f}}$ tj.

$$\min d(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \bar{\mathbf{f}})$$

$$\boldsymbol{x} \in D$$

Rešenje ovog zadatka zavisi od izabrane metrike u p-dimenzionom prostoru. Koriste se razlicite metrike, zavisno od tipa problema koji se razmatra.

Neka su $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ dve tačke u p-dimenzionom prostoru $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_p)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$. Rastojanje između ove dve tačke može se definisati na sledeće načine

$$d_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{p} w_k \, | u_k - v_k |$$

$$d_m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p} w_k (u_k - v_k)^m \right)^{1/m}, \; 1 \le \mathrm{m} < \infty$$

$$d_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p} w_k (u_k - v_k)^2 \right)^{1/2}$$

$$d_\infty(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \max_k w_k \, | u_k - v_k |$$

$$d_g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \prod_{k=1}^{p} | u_k - v_k |^{w_k}$$

Ciljno programiranje

Ciljno programiranje je specijalan slučaj metode rastojanja. Ovde se za svaki pojedinačni kriterijum najpre definišu željene ili ciljne vrednosti $\bar{f}_k$, $k=1,\ldots,p$. Ove vrednosti ne moraju da budu jednake idealnoj tački ili čak bolje od nje. Naprotiv, za neke kriterijume željene vrednosti mogu biti slabije od marginalnih. U principu, od stava DO u konkretnom zadatku zavisi kako se određuju ciljne vrednosti.

Slično ranije razmatranim slučajevima, i ovde se može desiti da postoji $\boldsymbol{x}^+ \in D$ takvo da je $f_k(\boldsymbol{x}^+) = \bar{f}_k$, $k = 1,...,p$. To bi značilo da postoji rešenje kojim se ostvaruju ciljne vrednosti za sve kriterijume i problem bi bio rešen bez dodatnih analiza. Ako takvo rešenje ne postoji, treba naći ono $\boldsymbol{x}^+$ koje najmanje odstupa od postavljenog cilja. Treba, dakle, rešiti zadatak

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} d(f(\boldsymbol{x}), \bar{\boldsymbol{f}})$$

odnosno zadatak

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sum_{k=1}^{p} w_k |f_k(\boldsymbol{x}) - \bar{f}_k|^m \right)^{1/m}, \quad 1 \le m < \infty.$$

čije rešenje ponovo zavisi od izabrane metrike.

Rešavanje ovako postavljenog zadatka ne garantuje dobijanje dominatnog rešenja jer ciljne vrednosti mogu da se odnose na neku tačku u unutrašnjosti skupa vrednosti kriterijuma.

Promenljive koje pokazuju koliko se datim rešenjem odstupa od ciljne vrednosti nazivaju se *promenljive odstupanja* ili *devijacione promenljive*.

Promenljive pozitivnog odstupanja (pozitivne devijacije) d_k^+ predstavljaju prebačaj cilja u odnosu na k-ti kriterijum:

$$d_k^+ = \begin{cases} f_k(\boldsymbol{x}) - \bar{f}_k, & \text{ako je } f_k(\boldsymbol{x}) > \bar{f}_k \\ 0, & \text{ako je } f_k(\boldsymbol{x}) \le \bar{f}_k \end{cases}$$

Promenljive negativnog odstupanja (negativne devijacije) d_k^- predstavljaju podbačaj cilja u odnosu na k-ti kriterijum :

$$d_k^- = \begin{cases} -f_k(x) + \bar{f}_k, & \text{ako je } f_k(x) \le \bar{f}_k \\ 0, & \text{ako je } f_k(x) > \bar{f}_k \end{cases}$$

Treba primetiti da su ovako definisane promenljive odstupanja po prirodi nenegativne i da je bar jedna od njih jednaka nuli, tj. $d_k^+ \, d_k^- = 0$.

Originalni zadatak minimizacije rastojanja sada dobija sledeći oblik:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sum_{k=1}^{p} w_k (d_k^+ + d_k^-)^m \right)^{1/m}, \quad 1 \le m < \infty$$

$$f_k(\boldsymbol{x}) + d_k^+ - d_k^- = \bar{f}_k$$

$$d_k^+ \, d_k^- = 0$$

$$d_k^+ \ge 0, \ d_k^- \ge 0.$$

Kada se radi sa L_1 metrikom ($m = 1$) i ako se stavi da su težinski koeficijenti $w_k=1$, $k = 1,...,p$, onda se prethodni zadatak rastojanja transformiše u klasični zadatak ciljnog programiranja:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sum_{k=1}^{p} w_k \, | f_k(\boldsymbol{x}) - \bar{f}_k | \right)$$

$$f_k(\boldsymbol{x}) + d_k^+ - d_k^- = \bar{f}_k$$

$$d_k^+ \, d_k^- = 0$$

$d_k^+ \geq 0, d_k^- \geq 0$

Ovako postavljen zadatak formulisan je šezdesetih godina nezavisno od višekriterijumskog programiranja i nazvan je problemom ciljnog programiranja. Najpre je razmatran problem linearnog ciljnog programiranja:

$$\min \sum_{k=1}^{p} (d_k^+ + d_k^-)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j + d_k^- - d_k^+ = \bar{f}_k \text{ , } k=1,...,p$$

$$d_k^+ d_k^- = 0$$

$$x_j \geq 0, \; d_k^+ \geq 0, d_k^- \geq 0$$

Rešenje ovog zadatka može se naći modifikovanom simpleks metodom koja je prilagođena njegovim specifičnim osobinama.

Ideja na kojoj počiva ciljno programiranje ("što bliže željenoj vrednosti") može se kombinovati sa idejama ranije opisanih metoda kao što su određivanje prioriteta ili dodeljivanje težinskih koeficijenata kriterijumima. To navodi na rešavanje zadatka VKO kombinacijom metode ciljnog programiranja i ranije opisanih metoda.

Mirko Vujošević

Literatura

[1] Dajović, S., Kovačević-Vujčić, V., *Matematika II*, Kultura, Beograd, 1989.

[2] Opricović S. *Optimizacija sistema*, Građevinska knjiga - Nauka, Beograd, 1992.

[3] Pierre, D. A., *Optimization theory with applications*, John Wiley&Sons, New York, 1969.

[4] Sussmann, H. J., Willems J. C., “300 Years of Optimal Control: From the brachystochrone to the Maximum Principle”, *IEEE Trans. on Control Systems*, June 1997, pp. 32-44.

[5] Vujošević, M., *Operaciona istraživanja – Izabrana poglavlja,* Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1999.

[6] Zlobec S, Petrić J., *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.