

Обнављање – Булова алгебра

У Буловој алгебри вредности и променљиве могу бити само бинарне: исправан/неисправан, укључен/искључен, истинит/лажан, затворен/отворен, да/не, 1/0 итд. Изрази Булове алгебре се састоје из Буловских променљивих и оператора. Искази морају бити ТАЧНИ или НЕТАЧНИ (принцип искључења трећег) али не могу бити оба (принцип одсуства контрадикције). Нпр. Раселов парадокс “Ова реченица је погрешна.” није исказ.

Три основна оператора Булове алгебре су: И, ИЛИ и НЕ (негација).

Опреатор И (коњункција): $x \wedge y$; $x \cdot y$

“Ако пада киша и идем аутобусом, понећу кишобран.”

x – пада киша, y – идем аутобусом, z – понећу кишобран $x \wedge y = z$

Таблица истинитости оператора И

x	y	$x \wedge y$
Т	Т	Т
Т	⊥	⊥
⊥	Т	⊥
⊥	⊥	⊥

x	y	$x \cdot y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Опреатор ИЛИ (дисјункција): $x \vee y$; $x + y$

“Ако пада киша или је прогнозирана киша, понећу кишобран.”

x – пада киша, y – прогнозирана је киша, z – понећу кишобран $x \vee y = z$

Таблица истинитости оператора ИЛИ

x	y	$x \vee y$
Т	Т	Т
Т	⊥	Т
⊥	Т	Т
⊥	⊥	⊥

x	y	$x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Опреатор НЕ (негација): $\neg x$; \bar{x}

“Не идем аутомобилом.”

x – идем аутомобилом $\bar{x} = z$

Таблица истинитости оператора НЕ

x	$\neg x$
Т	⊥
⊥	Т

x	\bar{x}
1	0
0	1

Пример сложеног исказа: “Ако пада киша и не идем аутомобилом, понећу кишобран.”

x – пада киша, y – идем аутомобилом, z – понећу кишобран $x \wedge \bar{y} = z$, $x \cdot \bar{y}$

Таблица истинитости исказа $x \wedge \bar{y} = z$

x	y	$\neg y$	$x \wedge \neg y$
Т	Т	⊥	⊥
Т	⊥	Т	Т
⊥	Т	⊥	⊥
⊥	⊥	Т	⊥

x	y	\bar{y}	$x \cdot \bar{y}$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Посматрајмо алгебарску структуру дефинисану на скупу $B = \{0, 1\}$, са два бинарна оператора (+ и \cdot) и једним унарним оператором ($\bar{}$). Основни закони Булове алгебре се могу приказати на следећи начин:

- а) Неутрални елемент: $x \cdot 1 = x$
 $x + 0 = x$
- б) Комплементарност: $x \cdot \bar{x} = 0$
 $x + \bar{x} = 1$
- в) Комутативност: $x \cdot y = y \cdot x$
 $x + y = y + x$
- г) Асоцијативност: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
 $x + (y + z) = (x + y) + z$
- д) Дистрибутивност: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- ђ) Закон идемпотенције: $x \cdot x = x$
 $x + x = x$
- е) Закон апсорпције: $x + (x \cdot y) = x$
 $x \cdot (x + y) = x$
- ж) Де Морганови закони: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
 $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Коришћењем закона Булове алгебре, сложени изрази се могу упростити.

Структурна функција система

Посматрамо систем који се састоји од J компоненти C_1, C_2, \dots, C_J . Свакој компоненти $C_j, j = 1, \dots, J$ придружена је бинарна променљива $y_j(t)$ која представља индикатор исправности компоненте C_j у тренутку t :

$$y_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако је компонента исправна} \\ 0 & \text{ако је компонента неисправна} \end{cases}$$

Нека је $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_J(t))$ вектор индикатора стања компонентни система. Тада се систему може придружити индикатор стања исправности система:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако је систем исправан} \\ 0 & \text{ако је систем неисправан} \end{cases}$$

Циљ је одредити структурну функцију система $h(y)$ која изражава стање исправности система у зависности од стања исправности његових компоненти.

Структурна функција система зависи од улоге сваке од компонената у систему и веза између њих. Одређивање структурне функције заснива се на Буловој алгебри.

Одређивање поузданости сложених система

Нека је познато r_j - поузданост (вероватноћа безотказног рада) једне компоненте $C_j, j = 1, \dots, J$ посматраног система. Тада је $q_j = 1 - r_j$ - непоузданост (вероватноћа отказа) једне компоненте $C_j, j = 1, \dots, J$ посматраног система. Поузданост целог система R_S зависи од улоге и поузданости сваке од компонената система.

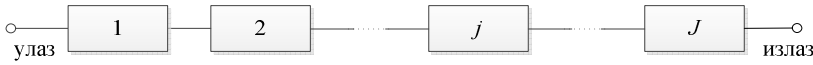
Циљ је одредити R_S , односно $Q_S = 1 - R_S$ - непоузданост (вероватноћу откзза) целог система.

Блок дијаграми поузданости - БДП (*Reliability Block Diagram - RBD*)

Блок дијаграми поузданости представљају апстрактан приказ система у коме су компоненте система представљене блоковима. Везе између блокова показују зависности између компоненти. Ако постоји бар један пут од улаза до излаза блок дијаграма, систем је успешан, у супротном систем је у отказу.

На основу БДП може формирати структурна функција система и, уколико је позната поузданост компоненти система, одредити његова поузданост.

Серијски систем: систем је исправан ако су исправне све његове компоненте.

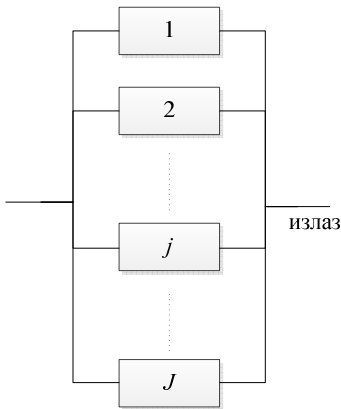


Слика 1: блок дијаграм серијског система

Структурна функција: $h(y) = \bigwedge_{j=1}^J y_j = \prod_{j=1}^J y_j$

Поузданост: $R_s = \prod_{j=1}^J r_j$

Паралелни систем: систем је исправан ако је исправна бар једна од његових компоненти.



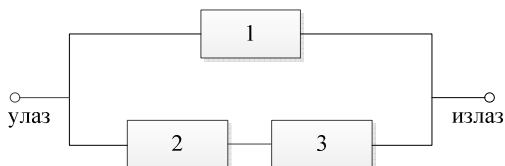
Слика 2: блок дијаграм паралелног система

Структурна функција: $h(y) = \bigvee_{j=1}^J y_j = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - y_j)$

Поузданост: $Q_s = \prod_{j=1}^J q_j \Rightarrow 1 - R_s = \prod_{j=1}^J (1 - r_j) \Rightarrow R_s = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - r_j)$

Паралелно серијски систем: систем који је комбинован од серијских и паралелних веза.

Пример 1. Одредити структурну функцију и формирати таблицу истинитости за систем на слици:



Слика 3: блок дијаграм паралелно серијског система

Структурна функција: $h(y) = 1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_2 \cdot y_3) = y_1 + y_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$

Таблица истинитости за израз $h(y)$:

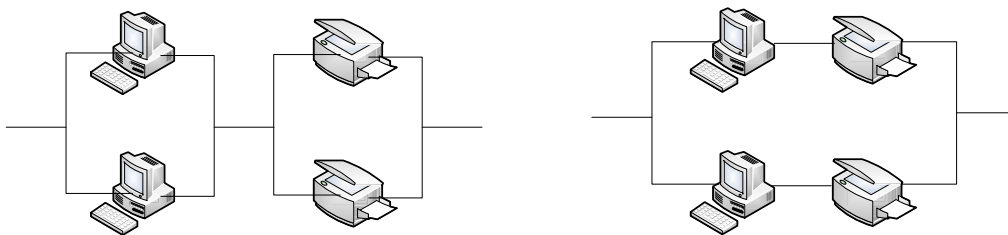
y_1	y_2	y_3	$h(y)$
-------	-------	-------	--------

0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ако је поузданост компоненте 1 једнака 0.986, компоненте 2 једнака 0.992 и компоненте 3 једнака 0.979, одредити поузданост система приказаног помоћу БДП са слике 3.

$$\text{Поузданост: } R_s = r_1 + r_2 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 0,986 + 0,992 \cdot 0,979 - 0,986 \cdot 0,992 \cdot 0,979 = 0,999596$$

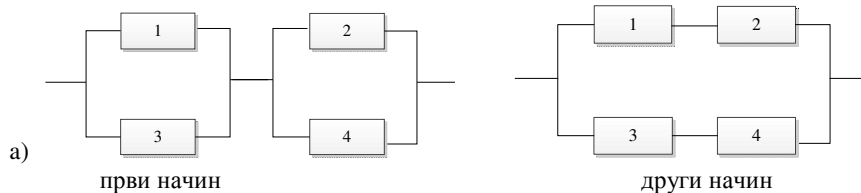
Пример 2. Канцеларија поседује два рачунара и два штампача које може да повеже на један од два начина приказана на слици.



а) Нацртати блок дијаграме оба система.

б) Формулисати структурне функције оба система и, на основу таблица истинитости, утврдити који од система отказује у више случајева.

в) Ако је поузданост рада сваког рачунара 0,954 а сваког штампача 0,897, одредити који од ова два начина обезбеђује већу поузданост рада опреме у канцеларији.



а)

$$h_1(y) = (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_3)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_4))$$

$$= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4$$

$$h_2(y) = 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_3 \cdot y_4) = y_1 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4$$

в) $R_{s1} = 0,987297$, $R_{s2} = 0,979188$

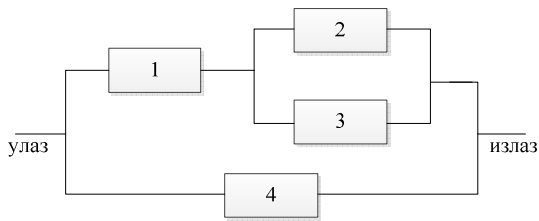
Пример 3. Пекара која је имала једну производну линију за производњу хлеба, набавила је нову машину. Стара производна линија се састоји из једне машине за мешање и две пећи. Производња на њој се обавља тако што се потребни састојци убаце у машину за мешање из које се добијају обликоване векне теста за хлеб. Након тога, векне се шаљу у једну од две пећи. Нова машина је савременија и у њу се убаце потребни састојци а на крају рада се добијају испечени хлебови.

а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање производног погона пекаре.

б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производног погона пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује и формирати таблицу истинитости за описани систем.

б) Ако је поузданост машине за мешање једнака 0,965, обе пећи по 0,987 а нове машине 0,993, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.

а)



1 - машина за мешење

2,3 – пећи

4 – нова машина

б)

$$h(y) = 1 - (1 - y_1 \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_3))) \cdot (1 - y_4) = y_4 + y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4$$

Таблица истинитости:

y_1	y_2	y_3	y_4	$h(y)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

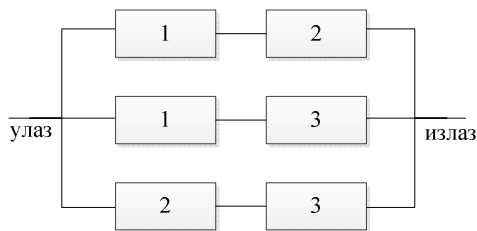
в) $R_s = r_4 + r_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 0,999754$

Системи “k-од-n: добар” – системи који се састоје од n идентичних компонента од којих је неопходно да бар k буде у исправном стању.

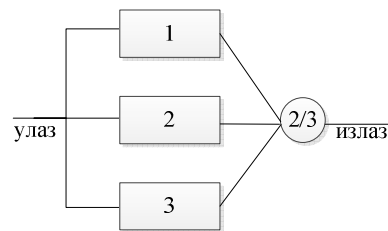
$$\text{Структурна функција: } h(y) = \begin{cases} 1 & \text{ако } \sum_{j=1}^J y_j \geq k \\ 0 & \text{ако } \sum_{j=1}^J y_j < k \end{cases}$$

Поузданост: $R_s = P\{\sum_{j=1}^J y_j \geq k\} = \sum_{j=k}^J \binom{J}{j} r^j (1-r)^{J-j}$ - уколико је поузданост свих компоненти једнака

Пример 4: Блок дијаграм и структурна функција система “2-од-3: добар”



алтернативно



Слика 4: блок дијаграм система “2-од-3: добар”

$$\text{Структурна функција: } h(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 1 & \text{ако } y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ 0 & \text{ако } y_1 + y_2 + y_3 < 2 \end{cases}$$

$$h(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 \vee y_1 y_3 \vee y_2 y_3 = 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_1 \cdot y_3) \cdot (1 - y_2 \cdot y_3) = y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot$$

Ако је поузданост компоненте 1 једнака 0.986, компоненте 2 једнака 0.992 и компоненте 3 једнака 0.979, одредити поузданост система приказаног помоћу БДП са слике 3.

$$R_s = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 0,986 \cdot 0,992 + 0,986 \cdot 0,979 + 0,992 \cdot 0,979 - 2 \cdot 0,986 \cdot 0,992 \cdot 0,979 = 0,999431$$

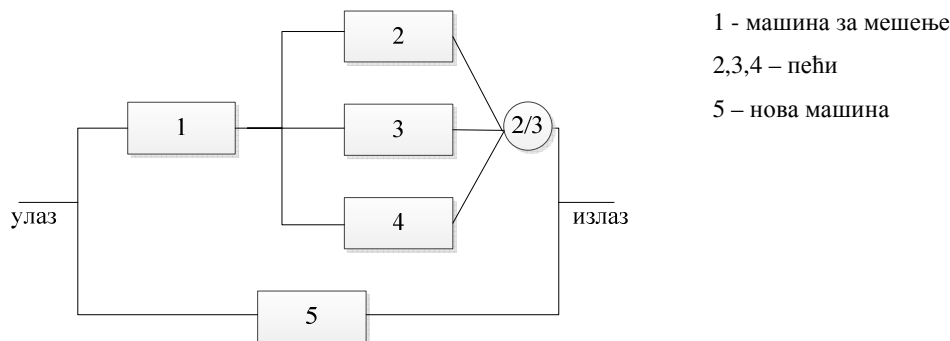
Ако је поузданост свих компоненти једнака 0.986, одредити поузданост система са слике 3.

$$R_s = 3 \cdot r^2 - 2 \cdot r^3 = 3 \cdot 0,979^2 - 2 \cdot 0,979^3 = 0,998696$$

Пример 5: Посматрајмо пекару из примера 2. Нека се стара производна линија састоји из једне машине за мешење и три пећи, при чему је капацитет машине за мешење дупло већи од капацитета једне пећи. То значи да се производња на старој производној линији обавља тако што се потребни састојци убаце у машину за мешење из које се добијају обликоване векне теста за хлеб. Након тога, векне се шаљу у две од три пећи. Нова машина је савременија и у њу се убаце потребни састојци а на крају рада се добијају испечени хлебови.

- а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање производног погона пекаре.
- б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производног погона пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује.
- в) Ако је поузданост машине за мешење једнака 0,965, обе пећи по 0,987 а нове машине 0,993, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.

а)



б)

$$h(y) = 1 - (1 - y_1 \cdot (1 - (1 - y_2 \cdot y_3) \cdot (1 - y_2 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_4))) \cdot (1 - y_5) =$$

$$y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 + y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5$$

в)

$$R_s = r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$$

$$0,993 + 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 - 2 \cdot 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,987 - 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,993 - 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,993 - 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,993 + 2 \cdot 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,987 \cdot 0,993 = 0,999752$$

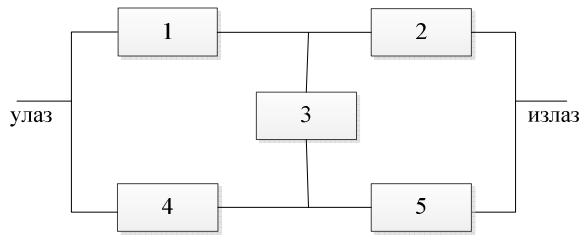
Теорема декомпозиције – код система који нису комбинација серијских и паралелних веза

$(1_j, y) = (y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_j)$ - вектор чија j -та компонента има вредност 1 (исправна)

$(0_j, y) = (y_1, \dots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots, y_j)$ - вектор чија j -та компонента има вредност 0 (неисправна)

Структурна функција се може представити у облику: $h(y) = y_j h(1_j, y) + (1 - y_j) h(0_j, y)$ за свако y и свако $j=1, \dots, J$.

Пример 6: Одредити структурну функцију за систем на слици, који има конфигурацију типа мост.



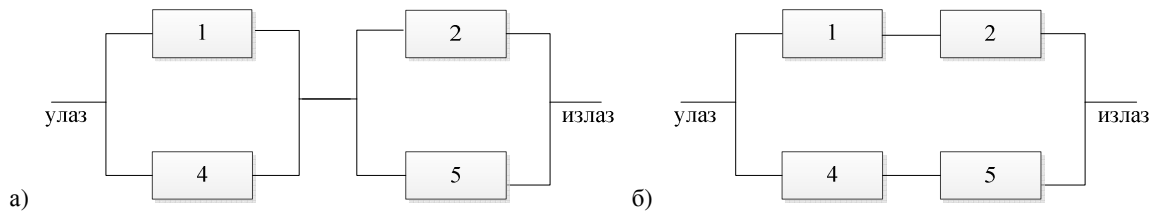
Слика 5: конфигурација типа мост

Посматрајмо компоненту C_3 .

Ако је компонента C_3 исправна, систем добија серијско паралелну структуру на слици а). Структурна функција добијеног система је:

$$h(1_3, y) = (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_4)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_5))$$

$$= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_5 + y_2 \cdot y_4 + y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5$$



Ако је компонента C_3 неисправна, систем добија серијско паралелну структуру на слици б). Структурна функција добијеног система је:

$$h(0_3, y) = 1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_4 \cdot y_5) = y_1 \cdot y_2 + y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_5$$

Структурна функција система је:

$$h(y) = y_3 h(1_3, y) + (1 - y_3) h(0_3, y) = y_3 \cdot (1 - (1 - y_1) \cdot (1 - y_4)) \cdot (1 - (1 - y_2) \cdot (1 - y_5)) + (1 - y_3) \cdot (1 - (1 - y_1 \cdot y_2) \cdot (1 - y_4 \cdot y_5))$$

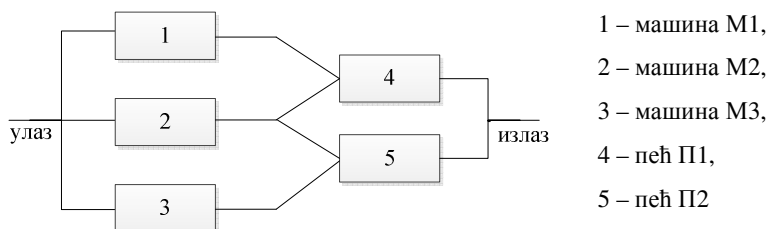
Пример 7: Нека се стара производна линија пекаре из примера 2 састоји из три машине за мешење (M1, M2 и M3) и две пећи (П1 и П2) и нека тесто из M1 може да се пече само у П1, тесто из M3 само у П2 а тесто из M2 може да се пече у обе пећи.

а) Формулисати блок дијаграм којим се описује функционисање старе производне линије пекаре.

б) Одредити структурну функцију којом се описује како исправност производне линије пекаре зависи од исправности машина које пекара поседује. Напомена: проблем посматрати само у смилсу могућности пекаре да има било коју количину испечених хлебова.

в) Ако је поузданост сваке машине за мешење једнака 0,965 а сваке пећи 0,987, одредити поузданост пекаре, односно вероватноћу да ће се у пекари обављати производња.

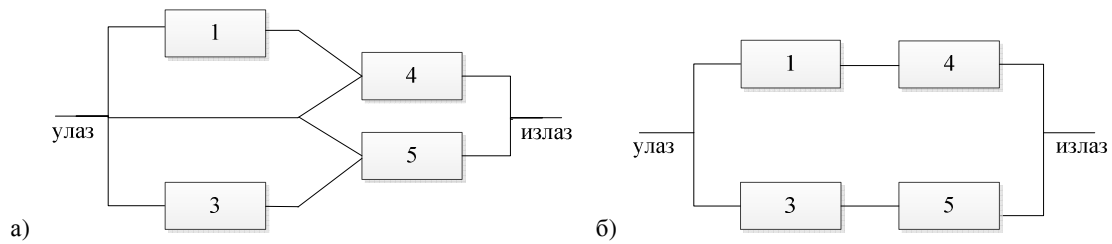
а)



б) Посматрајмо компоненту C_2 .

Ако је компонента C_2 исправна, систем добија структуру на слици а): паралелна веза компоненти C_4 и C_5 компоненте C_1 и C_3 не утичу на поузданост система. Структурна функција добијеног система је:

$$h(1_2, y) = (1 - (1 - y_4) \cdot (1 - y_5))$$



Ако је компонента C_2 неисправна, систем добија структуру на слици б). Структурна функција добијеног система је: $h(0_2, y) = 1 - (1 - y_1 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_5)$

Структурна функција система је:

$$h(y) = y_2 h(1_2, y) + (1 - y_2) h(0_2, y) = y_2 \cdot (1 - (1 - y_4) \cdot (1 - y_5)) + (1 - y_2) \cdot (1 - (1 - y_1 \cdot y_4) \cdot (1 - y_3 \cdot y_5))$$

$$= y_1 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_4 + y_2 \cdot y_5 + y_3 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_5 - y_2 \cdot y_4 \cdot y_5 - y_1 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 + y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5$$

в)

$$R_s = r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_5 + r_3 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 - r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 - r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$$

$$= 0,965 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,987 - 0,965 \cdot 0,965 \cdot 0,987 - 0,965 \cdot 0,965 \cdot 0,987 - 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 - 0,965 \cdot 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 + 0,965 \cdot 0,965 \cdot 0,965 \cdot 0,987 \cdot 0,987 = 0,999758$$