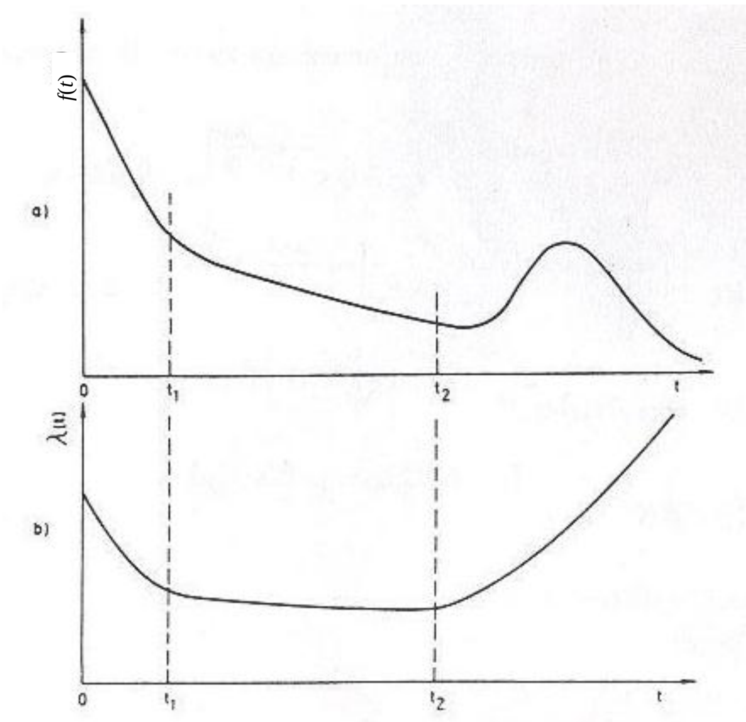
1. Функција интензитета отказа и век трајања система

На почетку коришћења неког система јављају се откази који као узрок имају почетне слабости или пропуштене дефекте у току производње и то су рани откази. Затим имамо отказе чије узроке је тешко утврдити и они настају када напрезања у току експлоатације превазилазе отпорност система. Ово су случајни откази чије моменте јављања не можемо да предвидимо, али можемо да прихватимо да ће фреквенција њиховог јављања бити константна. Старењем система почиње појава отказа услед истрошења.

На слици 1 су представљени периоди настајања ове три врсте отказа са типичним облицима функције густине расподеле $f(t)$ и функције интензитета отказа $\lambda(t)$.



Слика 1. Општи облик а) функције густине расподеле $f(t)$ и б) функције интензитета отказа $\lambda(t)$

У периоду раних отказа (0, t1) функције $\lambda(t)$ и $f(t)$ су опадајуће функције. Карактеристика случајних отказа (t_1 до t_2) приближно је константна вредност $\mu(t)$ и приближно експоненцијална функција $f(t)$. У периоду старења (t_2 до ∞) $\lambda(t)$ је растућа функција, док $f(t)$ има један врх око кога се дешава навећи број отказа.

Функција $\lambda(t)$ је погоднија од $f(t)$ када треба направити разлику између разних облика отказа. Искуство показује да многи системи имају криву интензитета отказа $\lambda(t)$ која одговара облику криве на слици која још се назива и КАДА.

Многи произвођачи компонената високе поузданости уводе те компоненте у рад пре него што их уграде у виши склоп, тако да их доводе на почетак периода константних отказа. Исто и за готов систем, па корисник нема раних отказа који могу бити непријатни, или чак катастрофални.
На почетку периода старења када је време рада t_2 интензитет отказа нагло расте. Најбоље је тада извршити превентивну замену компоненте која је одрадила t_2 часова јер се тако подиже укупна поузданост система.

Ако прихватимо круву $\lambda(t)$ као добар модел за одређени случај, највећа поузданост се постиже претходним радом система до времена t_1, коришћењем у времену $t_2 - t_1$ и превентивном заменом у времену t_2. Превентивном заменом у периоду $t_2 - t_1$ не би се постигло ништа, јер у том периоду интензитет отказа је наезависан од времена.

Крива каде се најбоље може описати Вејбуловом (Weibull) расподелом.

2. Вејбулова расподела

Функција густине отказа Вејбулове расподеле је:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq \gamma, \beta > 0, \eta > 0 \text{ или } f(t) \geq 0, t \geq 0, -\infty < \gamma < \infty \tag{1}$$

Тропараметарска Вејбулова расподела садржи:
t – време отказа
γ - параметар положаја
β - параметар облика
η - параметар размере.

Негативна вредност параметра γ значи да систем може да откаже пре коришћења (на складишту). У моменту пуштања система у рад параметар γ једнак је нула, време отказа t веће је или једнако γ.

Двопараметарска Вејбулова расподела добијена је постављањем да је $\gamma = 0$.

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{2}$$

Расподела једног параметра добија се постављањем да је $\gamma = 0$ и претпоставком да је $\beta = c$ =константа=претпостављена вреднст или:

$$f(t) = \frac{c}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{c}} \tag{3}$$

где је једини непознати параметар, параметар размере η.

2.1. Вејбулова расподела у анализи поузданости

Вејбулова расподела се користи у анализи поузданости, али на основу вредности параметра она има вишенаменску употребу и може се користити као модел за различита понашања система.

Функција поузданости има облик:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{4}$$

а вероватноћа отказа:

$$F(T) = 1 - e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}} \tag{5}$$

Функција интензитета отказа је:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{6}$$

Облик функција $f(t)$, $R(t)$ и $\lambda(t)$ зависи од вредности параметара γ, β и η.

У случају двопараметарске Вејбулове расподеле, када је $\gamma = 0$, функција поузданости има облик:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}\ , \tag{7}$$

вероватноћа отказа:

$$F(T) = 1 - e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}} \tag{8}$$

а функција интензитета отказа је:

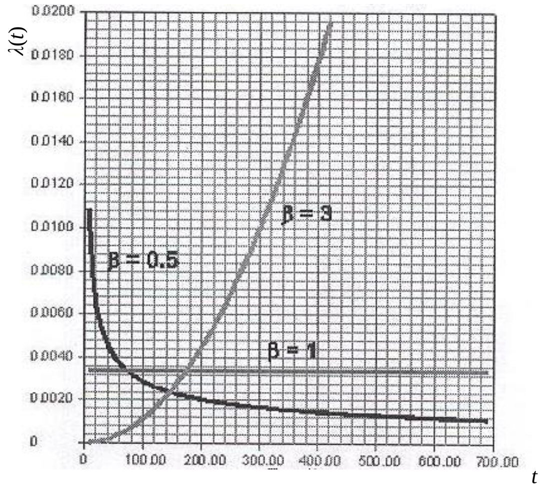
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{9}$$

.

2.2. Утицаји параметра на облик Вејбулове криве

- **Карактеристични утицаји параметра облика β**

Вејбулов параметар облика β је познат као нагиб јер је вредност β једнака нагибу регресионе линије на графику вероватноће. Параметар β је бездимензионалан. Различите вредности параметра облика утичу на понашање расподеле. Неке вредности β утичу да се једначина Вејбулове расподеле претвори у једначине других расподела.



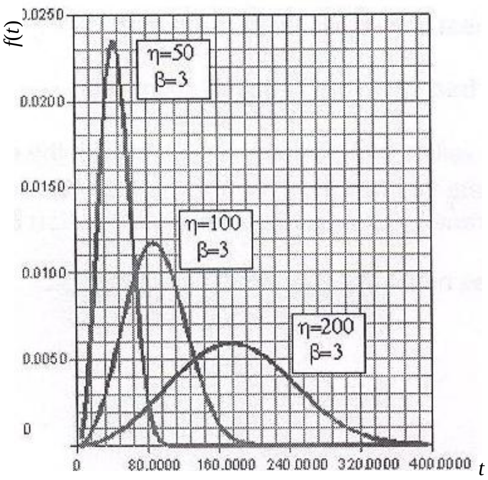
Слика 2. Утицај параметра β на облик функције интензитета отказа у случају Вејбулове расподеле

- За $0<\beta<1$ функција интензитета отказа опада са временом.
- За β =1 интензитет отказа има константну вредност, тј. не зависи од времена (експоненцијална расподела).
- За $\beta>1$ $\lambda(t)$ функција интензитета отказа се повећава са временом.

Сва три временска стања криве могу бити одређена са Вејбуловом расподелом и различитим вредностима β . Функција интензитета отказа $\lambda(t)$ за $0<\beta<1$ је неограничена када је t = 0 или $t=\gamma$. Функција интензитета отказа $\lambda(t)$ се тако смањује монотоно и конвексна је приближавајући се нули када $t\to\infty$ или $\lambda(\infty)=0$ Овакво понашање приказује функцију интензитета отказа раног типа за које се интензитет отказа смањује са старошћу производа. Овакво понашање код произведеног производа, може указати на проблеме у производном процесу, неодговарајућем сагоревању, нестандардне делове и компоненте или проблеме код паковања и испоруке.

- **Карактеристични утицаји параметра размере η**

Промена код параметра размере η има исти утицај на расподелу као промена апсцисе. Ако повећавамо η, задржавајући исту β (константну), има утицај проширења тако да је област испод криве константна вредност 1, „ врх" криве ће се смањивати са растом η.Параметар размере η се мери у истим јединицама као *t*: сати, миље, циклуси..



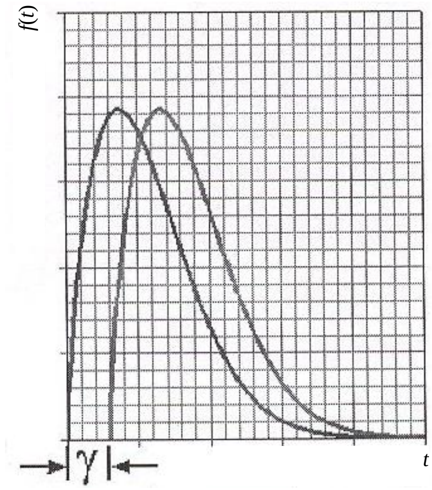
Слика 3. Утицај параметра η на облик Вејбулове криве за фиксно β

- Ако је параметар размере η повећан док су β и γ исте, расподела се шири на десно и њена висина се смањује, задржавајући свој облик и положај.
- Ако је η смањено док су β и γ исте, расподела се помера у лево (према свом почетку 0 или γ) и њена висина расте.

– **Карактеристични утицаји параметра положаја γ**

Параметар положаја γ одређује положај расподеле дуж апсцисе. Ако мењамо вредност γ расподела „клизи" и њен график померамо на десно ($\gamma > 0$) или на лево ($\gamma < 0$).

- За $\gamma = 0$ расподела почиње у $t = 0$ или почетној тачки
- Ако је $\gamma > 0$ расподела почиње у положају γ десно од почетне тачке
- Ако је $\gamma < 0$ расподела почиње у положају γ лево од почетне тачке.



Слика 4. Утицај параметра γ на позицију Вејбулове криве

Параметар γ може представљати све вредности и пружа процену најранијег периода грешке који се могу проучавати. Негативно γ показује да су се грешке догодиле пре почетка мерења, током производње, складиштења, превоза, током провере пре почетка употребе. Параметар положаја γ меримо у истим јединицама као t : сати, миље, циклуси...

2.3. Методе одређивања параметара двопараметарске Вејбулове расподеле

Постављени задатак је, када је дат случајан узорак промењиве X која подлеже двопараметарској Вејбуловој расподели, да се одреде њени параметри. Неке методе се користе за било који тип расподеле (дискретне, континуелне) а друге методе само за одређену расподелу. Методе које се примењују за утврђивање параметара расподеле којом се могу апроксимирати дати подаци спадају у две категорије:

1. Графичке методе (папири вероватноће)
2. Аналитичке методе

Овде ће бити приказана линеарна регресија. Линеарна регресија је аналитичка метода за одеђивање параметара расподеле на основу датог узорка. Узорак садржи поузданост (задату експлицитно или имплицитно) производа (или његових делова) у времену.

Функција поузданости у случају двопараметарске Вејбулове расподеле дата у (7) се може записати у следећем облику:

$$\frac{1}{R(t)} = e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{10}$$

Логаритмујмо леву и десну страну (обе су позитивне) једначине (10):

$$\ln(\frac{1}{R(t)}) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \tag{11}$$

Логаритмујмо леву и десну страну једначине још једном:

$$\ln\ln(\frac{1}{R(t)}) = \beta \ln\frac{t}{\eta} \tag{12}$$

$$\ln\ln(\frac{1}{R(t)}) = \beta \ln t - \beta \ln \eta \tag{13}$$

Уводе се смене:

$$\begin{aligned} &y = \ln\ln(\frac{1}{R(t)}), \\ &x = \ln t, \\ &a_1 = \beta, \\ &a_0 = -\beta \ln \eta \end{aligned} \tag{14}$$

добија се:

$$y = a_1 x + a_0 \tag{15}$$

На основу линеарне регресије, процену параметара a_1 и a_0 добијамо из формула:

$$a_1 = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a_0 = \frac{(\sum X^2)(\sum Y) - (\sum XY)(\sum X)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \tag{16}$$

где је n величина узорка.

Параметре Вејбулове расподеле β и η добијамо на основу смене (14), односно:

$$\beta = a_1,$$
$$a_0 = -\beta \ln\eta \Rightarrow \eta = e^{-\frac{a_0}{\beta}} \tag{17}$$

Пример

Произвођач је мерио отказивање 1000 делова у периоду од 10 година и добио следеће податке:

t (година)	број отказа
1	50
2	75
3	100
4	125
5	160
6	170
7	160
8	110
9	40
10	10

Уз претпоставку да откази подлежу Вејбуловој расподели, потребно је, применом регресионе анализе, одредити параметре β и η двопараметарске Вејбулове расподеле.

Да би се применила линеарна регресија за одеђивање параметара расподеле на основу датог узорка, потребно је прво одредити поузданост посматраних делова у времену. Овде је она задата имплицитно, а њено одређивање је приказано следећом табелом:

t (година)	број отказа	фреквенција отказа $f(t) = \frac{\text{број отказа}}{1000}$	непоузданост $F(t)$ (кумулативно $f(t)$)	поузданост $R(t)$ ($1 - F(t)$)
1	50	0,050	0,050	0,950
2	75	0,075	0,125	0,875
3	100	0,100	0,225	0,775
4	125	0,125	0,350	0,650
5	160	0,160	0,510	0,490
6	170	0,170	0,680	0,320
7	160	0,160	0,840	0,160

8	110	0,110	0,950	0,050
9	40	0,040	0,990	0,010
10	10	0,010	1,000	0,000

Сада, када су познати t и $R(t)$, применом формула (16):

$$a_1 = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a_0 = \frac{(\sum X^2)(\sum Y) - (\sum XY)(\sum X)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

се могу одредити a_1 и a_0. Подаци потребни за примену формула и вредности a_1 и a_0 су дате у следећој табели:

t	$R(t)$	X=ln(t)	Y=ln(ln(1/R(t)))	XY	X^2
1	0,950	0	-2,970195249	0,000	0,000
2	0,875	0,693147	-2,013418678	-1,396	0,480
3	0,775	1,098612	-1,366914374	-1,502	1,207
4	0,650	1,386294	-0,842150991	-1,167	1,922
5	0,490	1,609438	-0,337783253	-0,544	2,590
6	0,320	1,791759	0,130531896	0,234	3,210
7	0,160	1,94591	0,605725609	1,179	3,787
8	0,050	2,079442	1,0971887	2,282	4,324
9	0,010	2,197225	1,527179626	3,356	4,828
10	0,000	2,302585	3,136617538	7,222	5,302

ΣX	ΣY	ΣXY	ΣX^2
15,10441	-1,033219174	9,66358	27,65024

a_1	a_0
2,321007	-3,609067278

На основу (17) добијају се параметри Вејбуло расподеле:

$$\beta = a_1 = 2{,}321007,$$

$$\eta = e^{-\frac{a_0}{\beta}} = 4{,}73488404.$$