ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Методе казнених функција

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
13.	**5. Нелинеарно програмирање**		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5.6 Методе казнених функција	Овладавање методама спољашњих и унутрашњих казнених функција за решавање општег проблема нелинеарног програмирања
		5.7 Приближне методе за нелинеарно програмирања	Упознавање са неким од нумеричких метода за решавање проблема нелинеарног програмирања

Методе казнених функција

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
13.	5. 6. Методе казнених функција	Овладавање методама спољашњих и унутрашњих казнених функција за решавање општег проблема нелинеарног програмирања

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

METODE KAZNENIH FUNKCIJA

Ideja: Dat je problem

(NLP)
$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m$$

Ako se uvede beskonačna kazna $q(x)$ za napuštanje dopustivog skupa X:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \\ +\infty & x \notin X \end{cases}$$

problem (NLP) se može zameniti problemom bezuslovne optimizacije

(BO)
$$\min F(x) = f(x) + q(x)$$
$$x \in R^n$$

Методе казнених функција

S obzirom da se ne može računati sa ∞, kazna se $q(x)$ aproksimira nizom kaznenih funkcija $q_k(x), k = 1, 2, \ldots$

Dve vrste kaznenih funkcija $q_k(x)$:

Spoljašnje kaznene funkcije: aproksimacija spolja

Unutrašnje kaznene funkcije: aproksimacija iznutra.

Metoda spoljašnjih kaznenih funkcija

Niz funkcija $q_k : R^n \to R,\ k = 1, 2, \ldots$, je *niz spoljašnjih kaznenih funkcija* za problem (NLP) ako za svako k važi

(i) $q_k(x) = 0,\ x \in X$

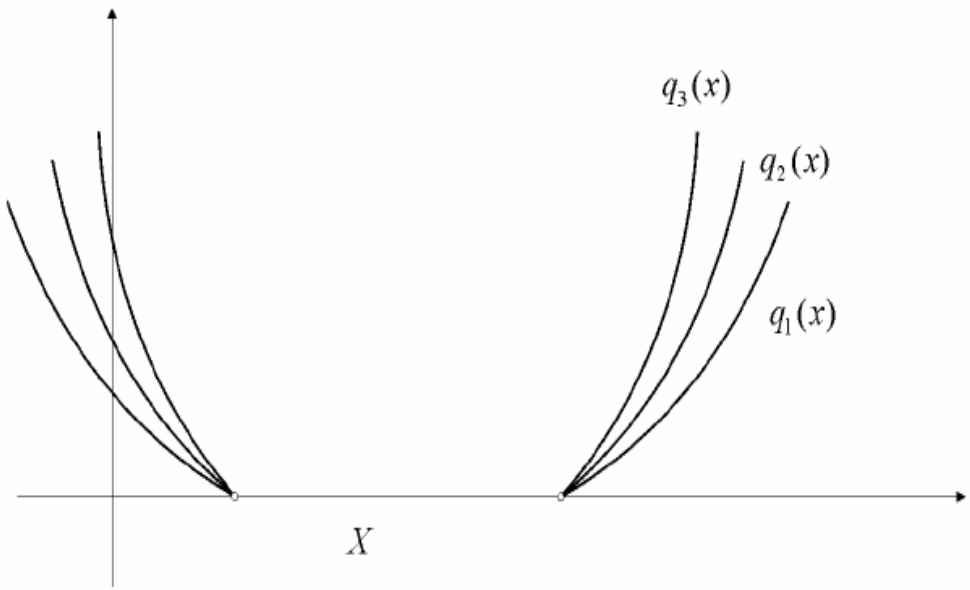
(ii) $q_k(x) > 0,\ x \notin X$

(iii) $q_{k+1}(x) > q_k(x),\ x \notin X$

(iv) $q_k(x) \to \infty,\ k \to \infty,\ x \notin X$

Методе казнених функција

Geometrijska interpretacija niza spoljašnjih kaznenih funkcija $\{q_k(x)\}$ data je na slici:



Методе казнених функција

Problemu (NLP) se pridružuje niz problema bezuslovne optimizacije

$$(\mathrm{BO}_k) \qquad \begin{aligned} &\min F_k(x) = f(x) + q_k(x) \\ &x \in R^n \end{aligned}$$

Neka je sa x^k označeno optimalno rešenje problema (BO_k).
Pod odgovarajućim pretpostavkama se može pokazati da $x^k \to x^*$, $k \to \infty$, gde je x^* optimalno rešenje problema (NLP)

Napomena 1. Ako za neko k važi $x^k \in X$, tada je x^k optimalno rešenje problema (NLP), tj. $x^* = x^k$.

Методе казнених функција

Algoritam 1 (Metoda spoljašnjih kaznenih funkcija).

Korak 0: Izabrati niz $\{q_k\}$

Korak 1: $k = 1$

Korak 2: Rešiti problem(BO_k) i označiti njegovo rešenje sa x^k.

Korak 3: Ako $x^k \in X$, STOP ($x^* = x^k$)

U suprotnom, $k = k + 1$ i ići na Korak 2

Методе казнених функција

Izbor niza spoljašnjih kaznenih funkcija.

Najčešće: $q_k(x) = t_k \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2$

gde je $\{t_k\}$ monotono rastući niz, $t_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Ako u (NLP) učestvuju i jednačine $h_i(x) = 0, i = 1,\ldots,r$, može se uzeti

$$q_k(x) = t_k\left(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{i=1}^{r} (h_i(x))^2\right)$$

Методе казнених функција

Primer 1. Dat je problem

$$\min x^2 - 6x$$
$$x \le 2.$$

Lako se može videti da je rešenje $x^* = 2$. Potražimo to rešenje metodom spoljašnjih kaznenih funkcija.

Neka je $q_k(x) = t_k \max\{0, x-2\}^2$, i neka $t_k \to +\infty,\ k \to \infty$.

Tada je $F_k(x) = x^2 - 6x + t_k \max\{0, x-2\}^2$.

Методе казнених функција

Potražimo x^k kao rešenje problema bezuslovne minimizacije funkcije $F_k(x) = x^2 - 6x + t_k \max\{0, x-2\}^2$.

Problem ćemo rešiti analitički. Razlikujemo dva slučaja:

1. $x - 2 \le 0$, tj. $\max\{0, x-2\} = 0$. Tada je

$$F_k(x) = x^2 - 6x, \qquad F_k'(x) = 2x - 6 = 0,$$

odakle je $x = 3$, što odbacujemo jer ne zadovoljava uslov $x \le 2$.

Методе казнених функција

2. $x-2\geq 0$, tj. $\max\{0,x-2\}=x-2$. Tada je

$$F_k(x)=x^2-6x+t_k(x-2)^2,\quad F_k'(x)=2x-6+\ +2t_k(x-2)=0,$$

odakle je $x=\dfrac{4t_k+6}{2t_k+2}$. Kako ovo rešenje zadovoljava uslov $x\geq 2$, ono predstavlja rešenje x^k.

S obzirom da je $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\infty$, tada $\lim\limits_{k\to\infty} x^k=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{6}{t_k}}{2+\dfrac{2}{t_k}}=2$.

Metoda unutrašnjih kaznenih funkcija

Neka je sa $\overset{o}{X}$ označena *unutrašnjost* dopustivog skupa X (tj. oko svake tačke u $\overset{o}{X}$ postoji sferna okolina koja je čitava sadržana u X), a sa ∂X njegova *granica* ($\partial X = X \setminus \overset{o}{X}$).

Niz funkcija $q_k(x) : \overset{o}{X} \to R,\ k = 1, 2, \ldots$ je *niz unutrašnjih kaznenih funkcija* za problem (NLP) ako za svako k važi

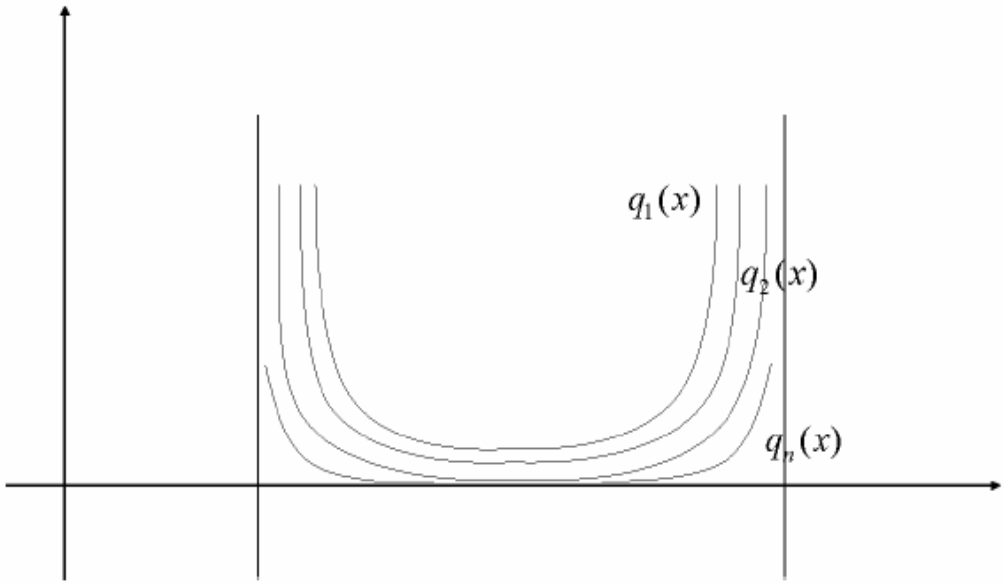
(i) $|q_{k+1}(x)| < |q_k(x)|,\ x \in \overset{o}{X}$

(ii) $q_k(x) \to 0,\ k \to \infty,\ x \in \overset{o}{X}$

(iii) $q_k(x_j) \to \infty,\ j \to \infty,$ za svaki niz $\{x_j\} \subset \overset{o}{X}$ takav da $x_j \to \hat{x} \in \partial X,\ j \to \infty$.

Методе казнених функција

Geometrijska interpretacija niza unutrašnjih kaznenih funkcija $\{q_k\}$ data je na slici.



Методе казнених функција

Problemu (NLP) se pridružuje niz problema

$$(\mathrm{P}_k) \qquad \begin{array}{l} \min \ F_k(x) = f(x) + q_k(x) \\ x \in \overset{o}{X} \end{array}$$

Neka je sa x^k označeno rešenje problema (P_k).

Pod odgovarajućim pretpostavkama se može pokazati da $x^k \to x^*$, $k \to \infty$, gde je x^* rešenje (NLP)

Napomena 2: (P_k) se može rešavati približnim metodama bezuslovne optimizacije, jer se izlazak iz dopustivog skupa sprečava "barijerom"- kaznena funkcija raste pri približavanju granici.

Методе казнених функција

Algoritam 2 (Metoda unutrašnjih kaznenih funkcija).

Korak 0: Izabrati niz $\{q_k(x)\}$

Korak 1: $k = 1$

Korak 2: Rešiti (P_k) i označiti njegovo rešenje sa x^k

Korak 3: $k = k + 1$, ići na Korak 2.

Napomena 3. Ova metoda se može primeniti samo ako je unutrašnjost dopustivog skupa problem (NLP) neprazna, tj. $\overset{o}{X} \neq \varnothing$.

Методе казнених функција

Izbor niza unutrašnjih kaznenih funkcija

Najčešće: $q_k(x) = -\frac{1}{t_k}\sum_{i=1}^{m}\ln(-g_i(x))$

gde je $\{t_k\}$ monotono rastući niz, $t_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Ako u definiciji (NLP) učestvuju i jednačine, metoda unutrašnjih kaznenih funkcija *nije primenljiva,* osim u slučaju kada se radi o linearnim jednačinama (na primer, u slučaju linearnog programiranja).

Методе казнених функција

Primer 2. Razmotrimo problem iz Primera 1:

$$\min x^2 - 6x$$
$$x \le 2$$

Rešimo ovaj problem metodom unutrašnjih funkcija.

Neka je $q_k(x) = -\frac{1}{t_k}\ln(2-x)$. Tada je

$$F_k(x) = x^2 - 6x - \frac{1}{t_k}\ln(2-x), \text{ gde je } \overset{o}{X} = (-\infty, 2).$$

Методе казнених функција

Treba naći minimum funkcije $F_k(x) = x^2 - 6x - \frac{1}{t_k}\ln(2-x)$

na skupu $\overset{o}{X} = (-\infty, 2)$. Ponovo zadatak rešavamo analitičkim putem:

$$F_k'(x) = 2x - 6 + \frac{1}{t_k(2-x)} = 0 \quad .$$

Odavde sledi kvadratna jednačina $2t_k x^2 - 10t_k x + 12t_k - 1 = 0$

odakle je

$$x_{1,2} = \frac{10t_k \pm \sqrt{4t_k^2 + 8t_k}}{4t_k} = \frac{10 \pm \sqrt{4 + 8/t_k}}{4}.$$

Методе казнених функција

S obzirom da je $x_1 > 2$ sledi da $x_1 \notin \overset{o}{X}$, pa ga odbacujemo i $x^k = x_2$, tj.

$$x^k = \frac{10 - \sqrt{4 + \frac{8}{t_k}}}{4} \to 2, \quad k \to \infty \quad .$$

Методе казнених функција

ПИТАЊА:

1. Објаснити главну идеју метода казнених функција.
2. Навести кораке методе спољашњих функција.
3. Навести кораке методе унутрашњих функција.

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА