ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Конвексност скупова и функција

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
12.	**5. Нелинеарно програмирање**		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5. 4 Конвексност скупова и функција	Упознавање са формалним дефиницијама конвексног скупа и функције и довољним условима за конвексност функције
		5.5 Каруш-Кун-Такерови услови	Упознавање са неопходним условима оптималности код општег проблема нелинеарног програмирања

Конвексност скупова и функција

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
12.	5. 4 Конвексност скупова и функција	Упознавање са формалним дефиницијама конвексног скупа и функције и довољним условима за конвексност функције

НАСТАВНИ МЕТОД: **ПРЕДАВАЊЕ**

Конвексност скупова и функција

KONVEKSNOST SKUPA

Konveksan skup C : $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$ za svake dve tačke $x_1, x_2 \in C$ i sve vrednosti skalara $\lambda \in [0,1]$.

Neformalno iskazano:
"za svake dve svoje tačke skup sadrži duž koja ih spaja"

KONVEKSNOST FUNKCIJE

Konveksna funkcija $f(x)$:

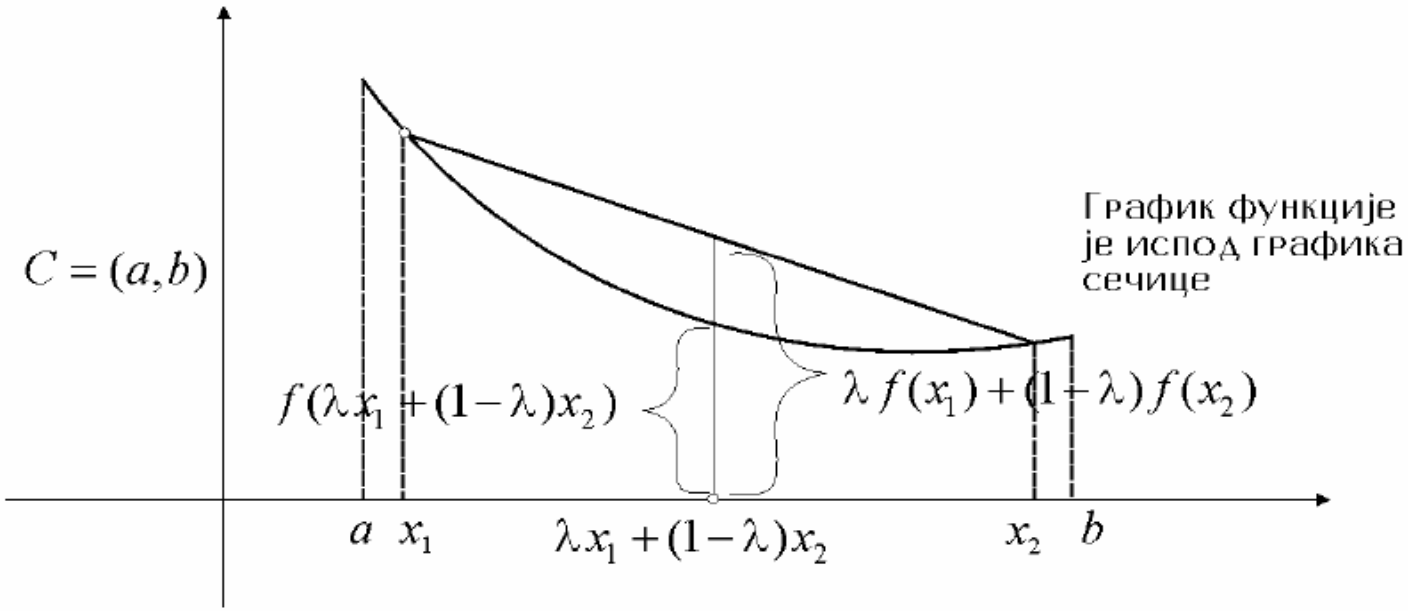
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

za svake dve tačke $x_1, x_2 \in C$ i sve vrednosti skalara $\lambda \in [0,1]$.

Конвексност скупова и функција

Neformalo iskazano:
“grafik funkcije se nalazi ispod bilo koje njene sečice”

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$



Конвексност скупова и функција

Strogo konveksna funkcija $f(x)$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Za svake dve tačke $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$, i svako $\lambda \in (0,1)$.

Konkavna funkcija: $f(x)$ je konkavna $\Leftrightarrow$ $-f(x)$ je konveksna.

Конвексност скупова и функција

Ako je f diferencijabilna funkcija, tada

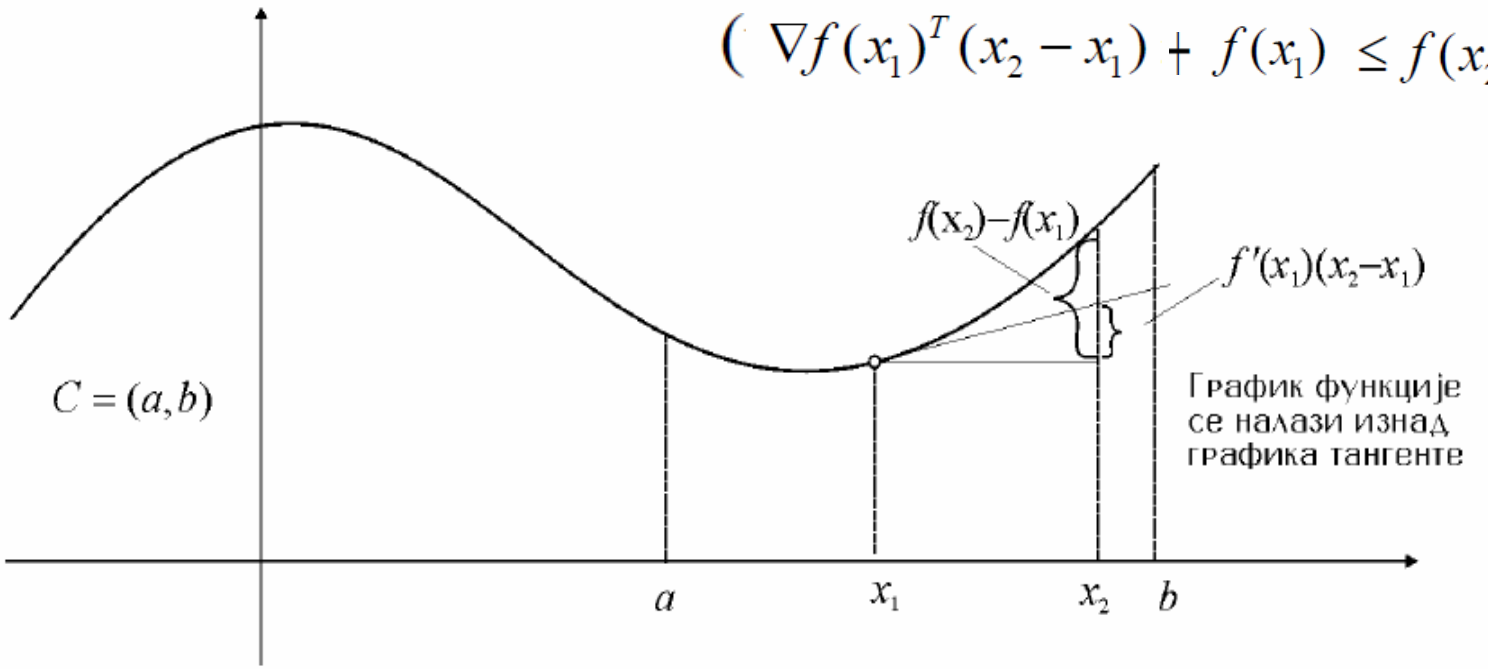
"grafik se nalazi ispod sečice" $\Leftrightarrow$ "grafik se nalazi iznad tangente".

To kaže sledeća teorema:

Teorema 1. f je konveksna $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) \le f(x_2) - f(x_1)$

za svake dve tačke $x_1, x_2 \in C$

$$\left(\nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) + f(x_1) \le f(x_2) \right)$$



Kako proveriti konveksnost funkcije $f(x)$?

Ako je funkcija $f(x)$ dvaput diferencijabilna to je najlakše učiniti preko njene matrice drugih izvoda na sledeći način:

1) Naći *glavne minore* matrice $\nabla^2 f(x)$. Ako su svi pozitivni na skupu C, tada je funkcija $f(x)$ *strogo konveksna* na C.

2) Ako su svi glavni minori matrice $\nabla^2 f(x)$ nenegativni, a bar jedan od njih je jednak nuli, treba naći sve minore *simetrične* u odnosu na glavnu dijagonalu. Ako su svi simetrični minori nenegativni na skupu C, tada je funkcija $f(x)$ *konveksna* na C.

Конвексност скупова и функција

Navedena metodologija se zasniva na sledeće dve teoreme:

Teorema 2. Matrica $\nabla^2 f(x)$ je pozitivno definitna na C $\Rightarrow$ f je strogo konveksna na C.

Teorema 3. Matrica $\nabla^2 f(x)$ je pozitivno semidefinitna na C $\Rightarrow$ f je konveksna na C.

Конвексност скупова и функција

Napomena 1: Prema Silvestrovom kriterijumu pozitivna definitnost matrice je ekvivalentna sa pozitivnošću njenih glavnih minora.
Važi i generalizacija Silvestrovog kriterijuma po kojoj je *pozitivna semidefinitnost* matrice (t.j. $y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0$ za svako $y \neq 0$) ekvivalentna sa nenegativnosti svih njenih simetričnih minora. (Ova generalizacija nije od velike praktične važnosti, jer je za veće dimenzije broj simetričnih minora izuzetno veliki i provera je neizvodljiva!)

Конвексност скупова и функција

Primer 1.

$$f(x) = e^{x_1+x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_1+x_2}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}$$

Simetrični minori reda 1: Δ_1 – presek vrste 1 i kolone 1

Δ_2 – presek vrste 2 i kolone 2

Simetrični minori reda 2: $\Delta_3 = \det \nabla^2 f(x)$

$\Delta_1 = \Delta_2 = e^{x_1+x_2} > 0, \quad \Delta_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna $\Rightarrow$ $f(x)$ je konveksna funkcija na čitavom R^2.

Унети наслов тематске јединице која се обрађује

ПИТАЊА:

1. Шта је то конвексан скуп?
2. Како се дефинише појам конвексне функције?
3. Шта су довољни услови за конвексност и строгу конвексност функције?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА