Обнављање – Поузданост компоненте, Експоненцијална расподела

Основни параметар који описује отказе у систему се назива интензитет отказа и означава са λ. Јединица мере параметра λ је [1/временска јединица]. (У појединим случајевима, када време коришћења компоненте није најзначајнији фактор, интензитет отказа се може изражавати и у другим јединицама. На пример: број отказа на 1000 пређених километа аутомобила или број отказа на милион циклуса лифта.) За временску јединицу се најчешће узима сат, 10^6 сати или 10^9 сати. У табели су приказани примери података о интензитету отказа компоненти:

Компонента	Број отказа на милон сати (10^6 сати ≈ 41667 дана ≈ 114 година)
Звоно аларма	2-10
Алтернатор	1-9
Антена	1-5
Батерија (Lead-Acid)	0,5-3
Батерија (Ni-Cd)	0,2-3
Читач картица	150-4000
Детектор гаса	3-8
Детектор дима	2-6
Детектор нивоа температуре	0,2-8
Дизел мотор	300-6000
Вентилатор	2-50
Класична сијалица (влакно)	0,05-10
Неонска сијалица	0,1-1
Отпорник	0,001-0,006

Када се као функција расподеле времена до отказа компоненте користи експоненцијална расподела, реципрочна вредност од λ представља средње време до отказа компоненте MTTF (*Mean Time To Failure*) за компоненте које се не могу поправити (неоправљиве компоненте као што су транзистори, сијалице), односно средње време између отказа MTBF (*Mean Time Between Failure*) за оправљиве компоненте. MTTF и MTBF се најчешће означавају са T_{sr} или θ.

Дакле важи да је: $T_{sr} = \frac{1}{\lambda}$ односно $\lambda = \frac{1}{T_{sr}}$.

Уобичајена јединица мере за MTBF и MTTF је сат, 10^6 сати или година. У табели су дате приближне вредности MTBF за поједине производе:

Производ	MTBF (сати)
Машина за веш	10000
Рачунар	16000
Телевизор	20000
Фрижидер	30000
Лифт	44000

Одређивање λ, MTBF и MTTF на основу података о отказима

Из односа λ и T_{sr} јасно је да је довољно израчунати λ или T_{sr} (MTBF или MTTF). Који ће параметар бити директно одређен зависи од природе података о отказима.

Пример 1: Улицом, у којој је вулканизерска радња, у току радног времена радње (од 8 до 20 часова) прође 4000 аутомобила. Од тога 1,5% аутомобила долази у радњу. Одредити интензитет долазака аутомобила на поправку и средње време између доласка аутомобила у сатима.

λ = 4000·0,015= 60 аутомобила/дан = 60/12 = 5 аутомобила/сат
T_{sr} = 1/λ = 1/5 сати.

MTBF се може одредити праћењем самог система. Односно, ако је t укупно време у коме се посматра компонента и r број отказа у посматраном периоду, онда је:

$$\text{MTBF} = t/\,r$$

Пример 2: Ако систем откаже 5 пута у току периода од 1000 сати, то значи да је његов MTBF 200 сати (1000/5) а интензитет отказа је λ=1/200 отказа/ сат = 0,005 отказа/ сат.

Пошто се MTTF односи на неоправљиве системе, до његове вредности се може доћи испитивањем великог броја система (делова, производа, предмета) на специфичан начин (коришћењем одређених електричних, механичких, температурних итд. услова) у току одређеног времена. MTTF тада представља количник дужине укупног периода и броја система (делова, производа, предмета) који су отказали у току тог периода. Односно, ако је ако је t укупно време у коме се посматра n компоненти и r укупан број компоненти које су отказале у посматраном периоду, онда је:

$$\text{MTTF} = n \cdot t / r$$

Пример 3: 20 идентичних неоправљивих електронских делова је тестирано да би се утврдила вредност MTTF. Тестирање је почело нултог тренутка а завршено је после 150 сати када је отказао 10. део. Колика је вредност MTTF и колики је интензитет отказа посматраног електронског дела?

n=20 делова, t=150 сати, r=10 делова

$$\text{MTTF} = 20 \cdot 150 / 10 = 300 \text{ сати}, \quad \lambda = 1 \text{отказ}/300 \text{ сати} = 0{,}0033 \text{ отказа на сат}$$

Пример 4: Одредити MTBF у сатимаза навигациони систем сателита који има интензитет отказа 0,025 на 1000 сати рада.

λ=0,025отказа/1000 сати
$\lambda=25 \cdot 10^{-6}$ отказа/сат
MTBF = $1/25 \cdot 10^{-6}$ = 40000 сати.

Пример 5: Мобилни телефон има MTBF од 12500 сати. Одредити његов интензитет отказа изражен на 1000 сати рада.

MTBF = 12500 сати = $12{,}5 \cdot 1000$ сати
λ= $1/12{,}5 \cdot 1000$ отказа/сат = 0,008 отказа/1000 сати

Експоненцијална расподеле

Најчешће се као функција расподеле времена до отказа компоненте користи експоненцијална расподела. У том случају, $F(t)$ представља вероватноћу да ће компонента отказати у интервалу од 0 до t:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}.$$

Одавде следи да је поузданост компоненте једнака:

$$r\,(t)=e^{-\lambda t}.$$

Из односа λ и T_{sr} следи да је вероватноћа отказа компоненте у временском интервалу t једнака

$$F(t)=1-e^{-t/T_{sr}}.$$

односно да је поузданост компоненте једнака:

$$r\,(t)=e^{-t/T_{sr}}.$$

Пример 6: Рачунар отказује једном на сваких 17 дана рада. Колика је вероватноћа да ће рачунар успети да изврши задатак за који је потребно 5 сати непрекидног рада?

$r\,(5)$ =?
MTBF= 17 дана = 408 сати
λ= 1/408= 0,0024 отказа/сат
$r\,(5)=e^{-0{,}0024 \cdot 5} = 0{,}99$

Пример 7: Произвођач лаких авиона захтева да његови авиони имају поузданост најмање 90% после 10000 сати рада. Одредити минимално прихватљиви MTBF који обезбеђује тражену поузданост.

$r\,(10000) \geq 0{,}9$
$r\,(t)=e^{-\lambda t} \Rightarrow 0{,}9= e^{-\lambda 10000}$
$\ln(0{,}9)=-\lambda 10000$
$\lambda= -\ln(0{,}9)/10000=1{,}0536 \cdot 10^{-5}$ отказа на сат
$T_{sr}=1/\lambda=94912$ сати

MTBF треба да буде најмање 94912 сати.

Особине експоненцијалне расподеле: Одсуство памћења и Вероватноће догађаја на малом временском инетрвалу

Експоненцијална расподела је расподела без памћења. То значи да вероватноћа да ће се догађај десити у временском инетрвалу *t* зависи само од дужине интервала *t* а не од тога колико дуго се већ догађај није десио, тј.

$$P\{T \le \tau + t \mid T > \tau\} = P\{T \le t\}$$

За сваку позитивну вредност *t* важи:

$$P\{T \le t + \Delta t \mid T > t\} \approx \lambda \cdot \Delta t$$

за мало Δt .

Ова особина значи да је вероватноћа да ће се неки догађај десити у малом интервалу Δt приближно пропорционална дужини тог интервала, при чему је коефицијент те пропорционалности управо параметар λ.

Пример 8: Студент намерава да са интернета пренесе на свој рачунар два фајла. За пренос првог фајла је потребно у просеку 5 минута а другог 7 минута. Телефонска линија преко које је повезан на интернет, отказује случајно по експоненцијалном закону са средњим временом између два прекида од 60 минута.
а) Колика је вероватноћа да ће студент пре прекида линије пренети оба фајла?
б) Колика је вероватноћа да ће студент пре прекида линије пренети први фајл ако почне са преносом у 8 сати а колика ако почне у 12 сати и 15 минута?
в) Колика је вероватноћа да ће студент, ако је пренео први фајл, пре прекида линије пренети и други фајл?
г) Одредити тражене вероватноће коришћењем особине у вези вероватноће догађаја на малом временском инетрвалу.

MTBF=60 минута $\Rightarrow$ λ=1/60 отказа у минути

а) $r\ (12)$ =?
$r\ (12)=e^{-\cdot 12/60} = 0{,}8187$

б) На основу особине одсуства памћења, вероватноће да ће успешно пренети први фајл у 8 сати и у 12 сати и 15 минута су исте пошто је потребно време за пренос фајла у оба случаја једнако 5 минута.
$r\ (5)$ =?
$r\ (5)=e^{-\cdot 5/60} = 0{,}92$

в) На основу особине одсуства памћења, вероватноће да ће успешно пренети друг фајл не зависи од успешности преноса првог фајла већ само од потребног времена за пренос другог фајла.
$r\ (7)$ =?
$r\ (5)=e^{-\cdot 7/60} = 0{,}8899$

г) На основу особине у вези вероватноће догађаја на малом временском инетрвалу, тражене вероватноће могу да се одреде и на следећи начин:
$r\ (12)=1 -\cdot 12/60 = 0{,}8$
$r\ (5)=1 -\cdot 5/60 = 0{,}9167$
$r\ (7)=1 -\cdot 7/60 = 0{,}8833$

Особине експоненцијалне расподеле: Однос експоненцијалне и Пуасонове расподеле

Ако времена између отказа подлежу експоненцијалној расподели са параметром λ, онда број отказа у коначном временском интервалу *t* подлеже Пуасоновој расподели са параметром $\lambda\cdot t$. Дакле, вероватноћа да ће се у временском интервалу *t* десити тачно *n* отказа је:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Директно из особине експоненцијалне расподеле да је без памћења, произилази особина Пуасонове расподеле да приказана вероватноћа зависи само од дужине временског интервала *t* а не од тренутка када тај интервал почиње.

Пример 9: За одржавање конференције резервисан је пројектор који треба да се користи 500 сати. Најосетљивији део на пројектору је сијалица чији је интензитет отказа 0,001 отказ на сат. Организатори конференције су набавили две резервне сијалице. Колика је вероватноћа да ће пројектор моћи да се користи у току целе конференције?

Постављено питање се може преформулисати на следећи начин: колика је вероватноћа да ће у току конференције (за 500 сати) отказати највише две сијалице?

λ = 0,001сијалица на сат
t = 500 сати
$\lambda t = 0.5$
Потребно је одредити: $P = P_0(500) + P_1(500) + P_2(500)$

$$P = \frac{(0,5)^0}{0!}e^{-0,5} + \frac{(0,5)^1}{1!}e^{-0,5} + \frac{(0,5)^2}{2!}e^{-0,5} = 0,986$$

Особине експоненцијалне расподеле: Слагање више експоненцијалних расподела

Нека су T_1, T_2,... T_m независне екпоненцијално расподељене случајне величине са параметрима λ_1, λ_2,... λ_m респективно. Нека је U такође случајна променљива чија је вредност једнака минимуму вредности које узимају T_1, T_2,... T_m, тј.

$$U = \min\{T_1, T_2, ..., T_m\} .$$

Ако T_i представља време отказа компоненте i, тада U представља време које прође док се не деси први од m отказа. Ово одговара ситуацији када су компоненте 1,2,...,m везане серијски. За било које $t \geq 0$, важи да је поузданост, односно вероватноћа да ће серијски повезан систем радити без отказа до тренутка t, једнака:

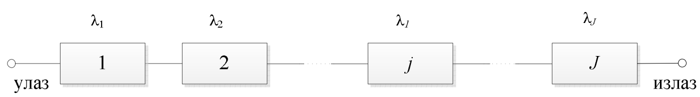
$$r_u = P\{U > t\} = P\{T_1 > t, T_2 > t, ..., T_m > t\} = P\{T_1 > t\} \cdot P\{T_2 > t\} \cdot ... \cdot P\{T_m > t\}$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot .... \cdot e^{-\lambda_m t} (= e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t}) = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_m$$

Из израза у загради следи да је U такође експоненцијално распоређена случајна променљива са параметром:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Дакле, уколико постоји систем са серијски везаним компонентама од којих свака има другачији интезтитет отказа:

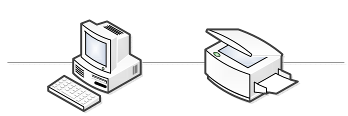


интензитет отказа целог система биће: $\lambda = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j$.

На основу односа λ и T_{sr} (MTBF или MTTF), $\lambda = \frac{1}{T_{sr}}$, MTBF, односно MTTF серијски повезаног система се може одредити на следећи начин:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \Rightarrow \frac{1}{T_{sr}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{T_{srj}} \Rightarrow T_{sr} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{T_{srj}}}$$

Пример 10: Рачунар и штампач су повезани серијски. Ако рачунар отказује у просеку на 150 дана а штампач у просеку на 120 дана, одредити интензитет отказа система рачунар-штампач и одредити на колико сати у просеку овај систем отказује.



T_{sr1} – средње време до отказа рачунара
T_{sr2} – средње време до отказа штампача
T_{sr} – средње време до отказа система
λ_1 – интензитет отказа рачунара
λ_2 – интензитет отказа штампача
λ – интензитет отказа система
T_{sr1}=150 дана = 3600 сати $\Rightarrow \lambda_1$= 1/3600 отказа/сат=0,000278 отказа/сат
T_{sr2}=120 дана = 2880 сати $\Rightarrow \lambda_2$= 1/2880 отказа/сат=0,000347 отказа/сат

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$=0,000625 отказа/сат

$$T_{sr}=\frac{1}{\frac{1}{T_{sr1}}+\frac{1}{T_{sr2}}}=\frac{1}{0,000278\ +0,000347}=\frac{1}{0,000625}=1600\text{ сати (= 66,67 дана)}$$

Уколико свих m серијски повезаних компоненти система имају исти интензитет отказа λ, интензитет отказа система ће бити једнак $m\cdot\lambda$. Одатле даље следи да је MTBF, односно MTTF таквог система једнако:

$$\lambda_s=J\cdot\lambda\Rightarrow\frac{1}{T_{srs}}=\frac{J}{T_{sr}}\Rightarrow T_{srs}=\frac{1}{\frac{J}{T_{sr}}}$$

Пример 11: Ако и рачунар и штампач из претходног примера отказују у просеку на 150 дана, одредити интензитет отказа система рачунар-штампач и одредити на колико сати у просеку овај систем отказује.

T_{sr1} – средње време до отказа рачунара
T_{sr1} – средње време до отказа штампача
T_{sr} – средње време до отказа система
λ_1 – интензитет отказа рачунара
λ_1 – интензитет отказа штампача
λ – интензитет отказа система
T_{sr1}=150 дана = 3600 сати $\Rightarrow\lambda_1$= 1/3600 отказа/сат=0,000278 отказа/сат
$\lambda=2\cdot\lambda_1$=0,000556 отказа/сат

$$T_{sr}=\frac{1}{\frac{2}{T_{sr1}}}=\frac{1}{\frac{2}{3600}}=\frac{1}{0,000556}=1800\text{ сати (= 75 дана)}$$

Пример 12: На основу тестова, утврђено је да уређај који се састоји од 1000 сичних компоненти, отказује након 100 сати. Ако би број компоненти био смањен на пола, колики би био нови интензитет отказа и средње време до отказа?
Стари систем:
T_{sr}=100 сати

$$J\cdot\lambda=\frac{1}{T_{sr}}$$

$J\lambda$=1/100 сати 1000λ=1/100 сати λ=1/100000 сати – интензитет отказа једне компоненте

Како је $T_{sr}=\frac{1}{\lambda}$ $\Rightarrow T_{sr1}$=100000 сати – средње време између отказа за једну компоненту

Нови систем:
$J=500$
$J\ \lambda=500\cdot1/100000$
$J\ \lambda$=5/1000 =1/200 отказа на сат

$$T_{sr}=\frac{1}{J\cdot\lambda}=200\text{ сати}$$

Или: $T_{srs}=\frac{1}{\frac{J}{T_{sr}}}=\frac{1}{\frac{500}{10000}}=\frac{1}{0,005}=200$ сати

Пример 10: Две врсте машина, А и Б, сервисирају се у овлашћеној сеоској радионици. Утврђено је да су времена између два отказа машина случајне величине расподељене по експоненцијалном закону са математичким очекивањима од 45 дана за машину А и 150 дана за машину Б. У селу има 60 машина типа А и 120 машина типа Б. Откази машина су међусобно статистички независне величине.
а) Одредити очекивани број захтева за сервисом у једном дану.
б) Одредити временски размак између отказа (без обзира на врсту машине) у сатима.
в) Ако сервис почиње са радом у 8 сати, одредити вероватноћу да ће се први захтев за сервисом појавити пре 12 часова.
г) Одредити вероватноће да у једном дану неће бити захтева за сервисом, да ће бити тачно 1 и 2 захтева и да ће бити 3 и више захтева.

T_{sr1} – средње време до отказа једне машине А
T_{sr2} – средње време до отказа јдне машине Б
T_{sr} – средње време до отказа система
λ_1 – интензитет отказа једне машине А
λ_2 – интензитет отказа једне машине Б
λ – интензитет отказа система
J_1– број машина А
J_2– број машина Б

а) T_{sr1} = 45 дана, T_{sr2} = 150 дана
$\Rightarrow \lambda_1$ = 1/45= 0,0222 отказа/дан; λ_2 = 1/150= 0,0067 отказа/дан;
$\lambda = J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2 = 60 \lambda_1 + 120 \lambda_2$ = 2,1333 отказа/дан – очекивани број захтева у једном дану.

б) λ= 2,1333 отказа/дан= 2,1333/24 отказа/сат= 0,08889 отказа/сат
$T_{sr} = 1/\lambda = 1/0{,}0889 = 11{,}25$ сати.

в) Постављено питање се односи на вероватноћу да ће систем отказати (да ће се покварити бар једна машина) у временском интервалу краћем од 4 сата.

$F(t)=1-e^{-\lambda t} = 1-e^{-0{,}08889\cdot 4} = 0{,}70079$

г) Вероватноћа броја захтева у једном дану:

$$P_0 = \frac{(1\cdot 2{,}1333)^0}{0!} e^{-1\cdot 2{,}1333} = 0{,}1184$$
$$P_1 = \frac{(1\cdot 2{,}1333)^1}{1!} e^{-1\cdot 2{,}1333} = 0{,}2527$$
$$P_2 = \frac{(1\cdot 2{,}1333)^2}{2!} e^{-1\cdot 2{,}1333} = 0{,}2695$$

$P_{m\geq 3} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 0{,}3594$