1. ANALIZA OBAVIJANJA PODATAKA

Ocena uspešnosti organizacija se pored korišćenja tradicionalnih mera može vršiti primenom parametraskih i neparametarskih tehnika, kao što je prikazano u poglavlju 2.2. U praksi je često neophodno, naročito u slučajevima ocene performansi neprofitnih organizacija, u obzir uzeti razmatrati više ulaza i izlaza koji su po svojoj prirodi raznorodni (finansijski, tehnički, tehnološki, ekološki, socijalni, itd.) i izražavaju se u različitim mernim jedinicama. U ovom slučaju se ne može doneti zaključak o nivou uspešnosti na osnovu parcijalnih pokazatelja efikasnosti koji mere delotvornost pojedinih resursa jer se njihove vrednosti uglavnom kreću u suprotnom smeru. Farelova mera tehničke efikasnosti (Farell, 1957) omogućuje uključivanje ili više ulaza ili više izlaza u analizu. Međutim, istovremeno uključivanje više ulaza koji se koriste za proizvodnju više izlaza nije bilo moguće.

Ova makroekonomska teorija je poslužila kao osnov za razvoj Analize obavijanja podataka kao metodologije za procenu efikasnosti. U cilju kreiranja sumarnog sintetičkog pokazatelja koji će uzeti u obzir sve značajne višestruke rezultate i sve resurse koji su korišćeni za njihovo ostvarivanje definisana je sledeća mera efikasnosti:

$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{težinska suma izlaza}}{\text{težinska suma ulaza}} \tag{3.1}$$

Definicija (3.1) omogućava agregaciju posmatranih ulaza (izlaza) u jedan virtuelni ulaz (izlaz) koji predstavljaju sumu proizvoda težinskih koeficijenata i vrednosti ulaza odnosno izlaza kome su dodeljeni. Izračunanje indeksa efikasnosti kao količnika virtuelnog izlaza i virtuelnog ulaza podrazumevalo je rešavanje problema koji se odnosi na izražavanje ulaznih i izlaznih podataka u opsezima vrednosti koje su međusobno uporedive (problem skaliranja). Sledeći problem se odnosi na određivanje relativnih važnosti pojedinih ulaza odnosno izlaza (dodeljivanje težinskih koeficijenata ili ponderisanje).

Pored dosada pomenutih, problem se takođe javlja i kada treba odrediti efikasnost više različitih jedinica koje koriste iste vrste ulaza i proizvode iste vrste izlaza. Za zajednički fiksirani skup težinskih koeficijenata moguće je jednostavno izračunati efikasnost svake od posmatranih jedinica prema formuli (3.1). Tako izračunate efikasnosti se mogu koristiti kao kriterijum za određivanje redosleda jedinica. Očigledno je da redosled zavisi od vrednosti ulaza i izlaza jedinica, ali i od vrednosti koje su dodeljene za težinske koeficijente. Različite subjektivne metode višekriterijumske analize podrazumevaju *a priori* određivanje težina od strane donosilaca odluka koje je vezano sa njihovim preferencijama i ciljevima (Čupić, Tummala, & Suknović, 2003). Međutim, u praksi je veoma teško vrednovati ulaze i izlaze i doći do zajedničkog skupa težinskih koeficijenata jer pojedine jedinice dodeljuju prilično različite stepene važnosti njihovim ulazima i izlazima. Na primer, ako se procenjuje efikasnost škola onda se može uočiti da neke škole dostignuća u muzici i u sportu vrednuju na drugačiji način u odnosu na ostale škole. Kada bi postojala objektivna metoda za određivanje vrednosti težinskih koeficijenata, računanje efikasnosti posmatranih jedinica bi bilo jednostavno.

Tvorci DEA metode (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978) su pretpostavili da pri oceni efikasnosti jedinica ne mora da postoji objektivan postupak za određivanje vrednosti težinskih koeficijenata. Ono oko čega treba da se dogovore sve jedinice čija se efikasnost procenjuje jeste koji su to ulazi i izlazi koje treba uzeti u obzir i koje su najmanje dozvoljene vrednosti za težinske koeficijente. Pored toga, jedinstveno se rešava problem skaliranja tako da se efikasnost izražava kao broj između 0 i 1. Svaka jedinica ima slobodu da odredi vrednosti težinskih koeficijenata na način koji njoj najviše odgovara, odnosno tako da maksimizira svoju efikasnost. Naknadnom analizom moguće je pokazati koje su od razmatranih jedinica efikasne, a koje nisu.

Na osnovu podataka o ulazima i izlazima, DEA metoda ocenjuje da li je neka jedinica o kojoj se odlučuje efikasna ili nije u odnosu na preostale jedinice uključene u analizu, odnosno da li se nalazi na granici efikasnosti. DEA je determinističko sredstvo konstruisanja "deo po deo" linearne aproksimacije granice efikasnosti bazirane na raspoloživom skupu jedinica. Drugim rečima, posmatra se distribucija skupa tačaka i konstruiše se linija oko njih koja ih obavija – "obvojnica" (*envelope*). Odatle potiče i naziv metode - Analiza obavijanja podataka. Granica efikasnosti u ekonomskom smislu predstavlja empirijski dobijen maksimum izlaza koji svaka jedinica odlučivanja može ostvariti sa datim ulazima i ponaša se kao obvojnica za neefikasne jedinice. Metoda analizira svaku jedinicu odlučivanja i proverava da li je njene ulaze moguće obaviti odozdo (dati izlaz moguće je postići sa manjom količinom ulaza) imajući u vidu vrednosti ulaza preostalih jedinica, kao i da li je moguće njene izlaze obaviti odozgo (sa datim ulazom moguće je proizvoditi veći izlaz) na osnovu vrednosti izlaza preostalih jedinica. Ako je moguće jedinicu obaviti ona je relativno neefikasna, a ako nije ona učestvuje u formiranju granice efikasnosti koja ovde predstavlja ekvivalent za graničnu funkciju proizvodnje.

Dakle, DEA je tehnika matematičkog programiranja koja omogućuje da se utvrdi da li je entitet, na osnovu podataka o njegovim ulazima i izlazima, efikasan ili nije, relativno prema drugim entitetima uključenim u analizu. To je neparametarski pristup jer ne zahteva *a priori* pretpostavku o analitičkoj formi funkcije proizvodnje. Dok su parametarski pristupi okrenuti ka centralnim tendencijama i procena performanse nekog entiteta vrši se u odnosu na prosečnu performansu, DEA je granična metoda koja se sastoji od serije optimizacija (po jedna za svaki entitet uključen u analizu). Za svaku DMU se izračunava maksimalna mera performansi u odnosu na sve druge jedinice u posmatranoj populaciji koje moraju zadovoljiti uslov da "leže" na ili ispod ekstremne granice, koja se naziva granica efikasnosti. Mera efikasnosti koju DEA daje je relativna, jer zavisi od toga koji su i koliki broj entiteta je uključeno u analizu, kao i od broja i strukture ulaza i izlaza.

Osnovna karakteristika DEA metode je da ona svaku DMU procenjuje kao relativno efikasnu ili relativno neefikasnu. Autoru DEA metode navode da se jedna DMU može okarakterisati kao efikasna samo ako nisu ispunjena sledeća 2 uslova:

1. *Moguće je povećati joj bilo koji izlaz bez povećanja bilo kog od ulaza i bez smanjenja bilo kog drugog izlaza;*
2. *Moguće je smanjiti joj bilo koji ulaz bez smanjenja bilo kog od izlaza i bez povećanja bilo kog drugog ulaza.*

Gore navedena karakterizacija koja istovremeno uključuje i izlaznu i ulaznu orijentaciju može se smatrati kao proširenje koncepta Pareto-Kopmansove definicije tehnicke efikasnosti Pored toga, karakterizacija DEA efikasnosti predstavlja proširenje Pareto-Kopmans koncepta efikasnosti (Charnes, Cooper, Golany, & Seiford, 1985) date u poglavlju 2.2.

Za svaku neefikasnu DMU, DEA identifikuje sadržaj i nivo neefikasnosti za svaki ulaz i izlaz. Nivo neefikasnosti određen je upoređivanjem sa jednom referentnom DMU ili sa konveksnom kombinacijom drugih referentnih DMU koje se nalaze na granici efikasnosti i koje koriste proporcionalno isti nivo ulaza, a proizvode proporcionalno isti ili veći nivo izlaza. DEA metoda je uspešan i nov način za empirijsko određivanje najbolje praktične granice proizvodnje. Autori u (Charnes, Cooper, Lewin, & Seiford, 1994), str. 24, posebno ističu sledeće njene osobine:

- *fokus je na pojedinačnim opservacijama nasuprot populacionim usrednjavanjima;*
- *određuje se pojedinačna sumarna mera za svaku DMU na osnovu vrednosto ulaznih faktora pri proizvodnji željenih izlaza;*
- *u analizu su uključene vrednosti za više ulaza i izlaza koje su izražene u njihovim prirodnim jedinicama;*
- *moguće je uključiti egzogene promenljive da bi se predstavili ulazni i izlazni faktori koji su pod kontrolom okruženja;*
- *moguće je uključiti kategorijske promenljive da bi se predstavili ulazni i izlazni faktori koji mogu uzeti samo diskretne vrednosti iz dopustivog skupa vrednosti;*
- *ne zahtevaju se* a priori *cene i težine za ulazne i izlazne faktore;*

- *ne zahteva se funkcionalna forma proizvodnog odnosa ulaz-izlaz;*
- *moguće je uključiti vrednosne ocene za ulaze i izlaze kada se želi;*
- *ukazuje se na potrebne promene ulaza i/ili izlaza da bi DMU ispod granice efikasnosti (neefikasan DMU) bio projektovan na granicu efikasnosti;*
- *dobijene mere efikasnosti su Pareto optimalne;*
- *potpuno jednaki kriterijumi se primenjuju u ocenjivanju svake DMU.*

DEA metoda obuhvata nekoliko različitih pristupa i familiju međusobno povezanih modela linearnog programiranja. Rešenja ovih modela imaju posebna ekonomska tumačenja i na osnovu njih dobijaju se informacije koje su od značaja za upravljanje daljim radom kako efikasnih, tako i neefikasnih jedinica.

1.1. DEA MODELI

Procena efikasnosti pomoću analize obavijanja podataka se može vršiti sa više aspekata u zavisnosti od izabranih modela. Pošto se DEA intenzivno razvija i primenjuje u različitim oblastima postoji veliki broj modela. Pregled modela je detaljno prikazan u preglednom radu koji je objavljen povodom 30 godina razvoja DEA metode (Cook & Seiford, 2009). U ovom poglavlju modeli su grupisani u zavisnosti od tipa prinosa na obim, orijentacije, projekcije na granicu efikasnosti i osetljivosti na promenu ulaznih podatka. Pored toga, predstavljeni su i modeli koji uključuju vremenske serije. Posebna klasa problema bavi se pouzdanošću i varijacijama ulaznih podataka. Poseban izazov predstavljaju manipulacija sa nedostajućim, ordinalnim, kategorijskim, nediskrecionim podacima ili „nepoželjnim" ulazima i izlazima. Često se u DEA modele uvode dopunska ograničenja sa kojima se sužava dopustiva oblast težinskih koeficijenata koje predstavljaju varijable i dodeljuju se ulazima i izlazima. U sledeći poglavljima biće prikazani osnovni DEA modeli i neka njihova proširenja. Osnovni modeli i osnovna proširenja su detaljno opisivana u magistarskoj tezi (Popović, 2006) i doktorskoj disertaciji (Martić, 1999) objavljenim na Fakultetu organizacionih nauka. Delovi tih radova su prikazani u ovoj disertaciji. U ovom poglavlju nisu predstavljene posebne grupe modeli koji opisuju višefazne i višestepene hijerarhijske i mrežne procese, koji su detaljnije predstavljeni u poglavlju 6. i modeli za alokaciju resursa koji su detaljno obrađeni u poglavlju 5.

1.1.1. OSNOVNI DEA MODELI

Ekonomska teorijska i Farelova mera efikasnosti je poslužila Čarnsu, Kuperu i Roudsu (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978) da razviju DEA modele, koji su tokom godina modifikovani i proširivani. Pretpostavimo da raspolažemo podacima o angažovanim ulazima i realizovanim izlazima za svaku od n DMU čiju efikasnost treba proceniti. Takođe, pri selekciji jedinica o kojima će se odlučivati treba voditi računa o sledećim pretpostavkama (Cooper, Seiford, & Tone, 2000), str. 22:

- *Podaci o ulazima i izlazima su raspoloživi za svaki ulaz i izlaz i imaju pozitivne vrednosti za svaku DMU;*
- *Svi podaci koji izražavaju interese menadžera ili analitičara su uključeni u analizu efikasnosti;*
- *U principu teži se smanjenju ulaza i povećanju izlaza i indeks efikasnosti treba da odražava ovaj princip;*
- *Merne jedinice ulaza i izlaza ne moraju biti jednorodne. One mogu uključivati broj časova, površinu radnog prostora, novac, itd.*

DEA model sa konstantnim prinosom na obim

Neka je x_{ij} - posmatrani iznos ulaza i –te vrste za DMU$_j$ ($x_{ij} > 0$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$), a y_{rj} – posmatrani iznos izlaza r-te vrste za DMU$_j$ ($y_{rj} > 0$, $r = 1,2,...,s$, $j = 1,2,...,n$). Čarns, Kuper i Rouds su u (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978) predložili da se za svaku DMU$_k$, $k = 1,2,...,n$, reši optimizacioni zadatak (u literaturi poznat kao CCR racio model):

MODEL (M 3.1)

$$(\text{Max})\ h_k = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} \tag{3.2}$$

p.o.

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \qquad j = 1, 2, \ldots.., n \tag{3.3}$$

$$u_r \geq 0, \qquad r = 1,\ 2, \ldots, s \tag{3.4}$$

$$v_i \geq 0, \qquad i = 1,\ 2, \ldots, m \tag{3.5}$$

gde su*:*

h_k – relativna efikasnost k-te DMU;

n - broj DMU koje treba porediti;

m - broj ulaza;

s - broj izlaza;

u_r - težinski koeficijent za izlaz r;

v_i - težinski koeficijent za ulaz i.

Relativna efikasnost h_k za DMU$_k$, je definisana kao odnos težinske sume njenih izlaza (virtuelni izlaz) i težinske sume njenih ulaza (virtuelni ulaz) što je matematička formulacija definicije (3.1). CCR racio model izračunava ukupnu tehničku efikasnost u koju su uključena i čista tehnička efikasnost i efikasnost kao posledica različitih obima poslovanja. U modelu se teži maksimizaciji vrednosti h_k tako što svaka jedinica dodeljuje vrednosti upravljačkim promenljivim u_r i v_i takve da je prikažu u što boljem svetlu. Kao i kod Farela, pretpostavlja se konstantni prinos na obim (*constant return to scale* – CRS), odnosno da povećanje vrednosti angažovanih ulaza treba da rezultuje u proporcionalnom povećanju ostvarenih izlaznih nivoa. Može se pokazati da vrednost h_k ne zavisi od mernih jedinica ulaza i izlaza, pri čemu su naravno merne jedinice iste za sve DMU. Za detaljno objašnjenje videti tzv. «teoremu jedinične invarijantnosti» (Cooper, Seiford, & Tone, 2000), str. 24.

Pošto i za k-tu DMU za koju se traži maksimalna efikasnost (3.2) važi uslov (3.3), očigledno da važi $0 < h_k \leq 1$. Ako je vrednost za h_k u funkciji cilja jednaka 1, onda je k-ta DMU relativno efikasna, a ako je manja od 1, DMU$_k$ je relativno neefikasna i vrednost h_k pokazuje za koliko procentualno ova jedinica treba da smanji svoje ulaze. DMU$_k$ se može smatrati potpuno efikasnom ako i samo ako, dostignuća drugih DMU ne obezbeđuju dokaz da bi se neki od njenih ulaza ili izlaza mogao poboljšati bez pogoršavanja nekog od njenih preostalih ulaza ili izlaza. Odnosno, ako je posmatrana jedinica efikasna, to znači da sa njenim optimalnim vrednostima za težinske koeficijente nijedna druga jedinica ne može da ostvari veću vrednost izlaza za dati ulaz, dok za neefikasne jedinice to nije slučaj. Uslov dat u relaciji (3.3) važi za sve DMU i označava da svaka od njih leži na ili ispod granice efikasnosti.

Težinski koeficijenti u_i i v_i (nepoznate u modelu) pokazuju stepene važnosti svakog ulaza i izlaza koje svaka jedinica bira tako da bude što je moguće efikasnija. Ako tada ne postoji neka druga jedinica koja sa istim angažovanim ulazima proizvodi veći izlaz onda je posmatrana jedinica efikasna. Dakle, DMU$_k$ bira vrednosti težina za ulaze i izlaze tako da se njena efikasnost maksimizira, ali vrednosti težina moraju biti dopustive za sve DMU uključene u merenje efikasnosti i zadovoljavati uslov da je za svaku DMU odnos težinske sume izlaza i težinske sume ulaza manji ili jednak od 1. Dobijene vrednosti za težinske faktore zavise od skale merenja vrednosti za ulaze i izlaze i nisu pogodne za međusobno poređenje. Udeo i važnost svakog ulaza (izlaza) u dobijenom indeksu efikasnosti pokazuje proizvod vrednosti tog ulaza (izlaza) i dodeljenog težinskog koeficijenta koji se naziva virtuelni ulaz (izlaz).

Ograničenja data relacijama (3.4) i (3.5) označavaju da težinski koeficijenti mogu imati samo nenegativne vrednosti kasnije su modifikovana u sledeća ograničenja:

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.4'}$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.5'}$$

gde je: ε - *mala pozitivna vrednost.* Ova modifikacija sprečava potpuno ignorisanje uticaja pojedinih ulaza i izlaza pri određivanju mere efikasnosti. Neka DMU može da bude "lažno" klasifikovana kao relativno efikasna samo na osnovu vrednosti jednog ulaza i jednog izlaza, za koje će izabrati pogodne vrednosti težinskih faktora.

Zadatak opisan relacijama (3.2) – (3.5) je nelinearan, nekonveksan sa linearno-razlomljenom funkcijom cilja i linearno-razlomljenim ograničenjima. Zadatak linearnog razlomljenog programiranja može se pomoću jednostavnih Čarns-Kuperovih transformacija (Cooper, Seiford, & Tone, 2000) svesti na ekvivalentan linearni program.

MODEL (M 3.2)

$$(\text{Max})\ h_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \tag{3.6}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \tag{3.7}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1,\ 2\ldots,n \tag{3.8}$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.9}$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.10}$$

Dokaz ekvivalencije modela M 3.1 i M 3.2 se može naći u (Cooper, Seiford, & Tone, 2000), str. 24. U modelu M 3.2 za *k*-tu DMU maksimizira se virtuelni izlaz, a njen virtuelni ulaz je jednak 1. Ograničenja data relacijom (3.8) označavaju da optimalne težine za *k*-tu DMU moraju zadovoljavati uslov da za svaku od *n* DMU njen virtuelni izlaz ne može biti veći od njenog virtuelnog ulaza. Ako je vrednost funkcije cilja jednaka 1, onda za sve preostale jedinice njihov virtuelni izlaz biće manji od virtuelnog ulaza, a ako je vrednost funkcije cilja manja od 1, onda one jedinice kod kojih virtuelni izlaz bude jednak njihovom virtuelnom ulazu čine uzorne ili referentne jedinice za k-tu DMU i obrazuju facet (ivicu granice efikasnosti) u odnosu na koju je izmeren njen nivo efikasnosti.

Broj promenljivih u modelu M 3.2 jednak je (m+s), a broj ograničenja (n+m+s+1). S obzirom da je broj DMU koje se ocenjuju uglavnom dosta veći od ukupnog broja ulaza i izlaza, u praksi se, najčešće rešava njegov dualni model M 3.3. Dualni CCR DEA model glasi:

MODEL (M 3.3)

$$(\text{Min})\, Z_k - \varepsilon\Big(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^-\Big) \tag{3.11}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1,2,\dots,s \tag{3.12}$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{3.13}$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0;\ j = 1,2,\dots,n,\ r = 1,2,\dots,s,\ i = 1,2,\dots,m,\ Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.14}$$

Funkcija cilja (3.11) pokazuje sa kojom minimalnom vrednošću ulaza je moguće ostvariti postojeći nivo izlaza k-te DMU. Promenljiva Z_k naziva se faktor intenziteta i pokazuje nivo na koji je potrebno da k-ta DMU proporcionalno smanji sve izlaze da bi postala efikasna. Dualne promenljive s_i^- i s_r^+ govore o neophodnom pojedinačnom smanjenju i-tog ulaza i povećanju r-tog izlaza k-te DMU da bi postala efikasna. S obzirom da one predstavljaju dopunu do jednakosti u relacijama (3.12) i (3.13), one se nazivaju dopunske promenljive.

Dualna promenljiva λ_j predstavlja dualnu težinu koja pokazuje važnost koja je dodeljena DMU$_j$ ($j = 1,2,\ldots,n$) pri definisanju ulazno-izlaznog miksa hipotetičke kompozitne jedinice sa kojom će se DMU$_k$ direktno porediti. Vrednosti za promenljive λ_j ($j = 1,2,\ldots,n$) se biraju tako da svaki od s izlaza hipotetičke kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}, r = 1,2,\dots,s\right)$ ne bude manji od odgovarajućeg stvarnog izlaza DMU$_k$, a da svaki od ulaza kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}, i = 1,2,\dots,m\right)$ ne bude manji od odgovarajućeg stvarnog ulaza DMU$_k$. Naziv metode upravo dolazi od ovog dualnog DEA modela za koji se kaže da ima formu obavijanja. Kada hipotetičku kompozitnu jedinicu nije moguće konstruisati izvan postojećih jedinica k-ta DMU je efikasna.

Ako od svih λ_j (j= 1, 2,..., n) samo λ_k ima pozitivnu vrednost onda je faktor intenziteta Z_k =1, što znači da je DMU$_k$ angažovala minimalnu količinu ulaznih faktora i granična je tačka. Ako to nije slučaj, k-ta DMU je neefikasna, a njoj najbliža površ granice efikasnosti sa kojom je obavijena je formirana od onih DMU za koje je vrednost promenljive λ_j pozitivna u optimalnom rešenju modela M3. Ove jedinice sa pozitivnom vrednošću za dualnu težinu λ_j nazivaju se referentne ili uzorne za k- tu DMU. Najkraće rastojanje između neefikasne DMU i granice efikasnosti je upravo rastojanje do kompozitne jedinice. Dakle, ako je Z_k<1, onda je DMU$_k$ relativno neefikasna i treba proporcionalno za (1-Z_k)*100 procenata da smanji sve ulaze da bi postala efikasna sa postojećim nivoom izlaza.

Uloga parametra ε u dualnom DEA modelu je da se istakne da minimizacija vrednosti faktora intenziteta ima prednost u odnosu na maksimizaciju dopunskih promenljivih s_i^- i s_r^+. Ako posmatramo ograničenja zadata relacijom (3.13) očigledno je da se smanjivanje ulaza za k-tu DMU (sve do nivoa ulaza kompozitne jedinice) može postići ili preko smanjivanja vrednosti faktora intenziteta Z_k (od vrednosti 1 prema 0) ili preko povećavanja vrednosti odgovarajuće dopunske promenljive za taj ulaz. Isto tako, na osnovu relacije (3.12) k-ta DMU može povećavati vrednost odgovarajuće dopunske promenljive za izlaz sve do dostizanja izlaza kompozitne jedinice. Pošto faktor intenziteta neke jedinice pokazuje njen nivo neefikasnosti, onda mu treba odrediti najmanju moguću vrednost, pa je u funkciji cilja uz promenljivu Z_k koeficijent 1, a uz dopunske promenljive koeficijent je dovoljno mali pozitivni broj ε.

Za svaku DMU$_j$ (j=1,…,n) uzetu kao DMU$_k$ rešava se odgovarajući problem linearnog programiranja. Dakle potrebno je rešiti n zadataka linearnog programiranja M 3.3, sa po ($n+s+m+1$) promenljivom i sa (s+m) ograničenja (broj ulaznih i izlaznih faktora uključenih u analizu). Očigledno je da se povećanjem broja jedinica čija se efikasnost meri ne menja se broj ograničenja u dualnom DEA modelu, već samo povećava broj promenljivih.

Zbog povezanosti problema M 3.2 i M 3.3, kao i zbog teoreme dualnosti koja je opštevažeća u linearnom programiranju, DMU$_k$ je efikasna, ako i samo ako, su za optimalno rešenje ($\lambda^*,s^{+*},s^{-*},Z_k^*$) problema M 3.3 ispunjeni uslovi:

$$Z_k^* = 1 \quad (3.15)$$

$$s^{+*} = s^{-*} = 0 \quad (3.16)$$

Potreban uslov, da bi k-ta DMU bila relativno efikasna je da joj je faktor intenziteta jednak 1, a neophodno je i da su sve dopunske promenljive s_i^- i s_r^+ jednake 0. Ova dva uslova se odnose na "radijalnu" efikasnost posmatrane DMU_k. Ako je faktor intenziteta Z_k jednak 1, a neka od dopunskih promenljivih je pozitivna, DMU_k je granična tačka (nepotpuno obavijena), ali nije efikasna granična tačka. Za takvu jedinicu se kaže i da je "slabo efikasna". Pokazano je da je neka neefikasna jedinica potpuno obavijena samo ako u optimalnom rešenju dualnog DEA modela postoji (m+s-1) pozitivna dualna težina λ_j ($j = \overline{1,n}$), koje govore o važnosti efikasnih jedinica pri formiranju uzorne hipotetičke jedinice (Martić, 1999).

Pomoću optimalnog rešenja ($\lambda^*, s^{+*}, s^{-*}, Z_k^*$) problema M 3.3 mogu se odrediti ciljane vrednosti za jedinice o kojima se odlučuje:

$$X_k^{"} = Z_k^* X_k - s^{-*}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.17}$$

$$Y_k^{"} = Y_k + s^{+*}, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.18}$$

Vrednosti $X_k^{"}$ i $Y_k^{"}$ koje se dobijaju relacijama (3.17) i (3.18) predstavljanju vektore ciljanih vrednosti ulaza i izlaza za DMU_k sa kojima bi ona postala efikasna ($X^{"}$ predstavlja m-dimenzioni ulaza, a $Y^{"}$ s-dimenzioni vektor izlaza). Pri tome razlika $\Delta X_k = X_k - X_k^{"}$ odnosno $\Delta Y_k = Y_k^{"} - Y_k$ pokazuje procenjeni iznos neefikasnosti i-tog ulaza odnosno r-tog izlaza respektivno. Na taj način se na osnovu optimalnog rešenja dualnog DEA modela za neefikasnu DMU_k direktno izračunava koliko bi trebalo da promeni ulaze i/ili izlaze pa da postane efikasna.

CCR modeli, koji su do sada izloženi, mere ukupnu tehničku efikasnost jedinice, koja uključuje čistu tehnička efikasnost i efikasnost obima. Pretpostavlja se da jedinice posluju sa konstantnom prinosom na obim, odnosno da povećanje ulaza mora rezultovati u proporcionalnom povećanju izlaznih nivoa. Granica efikasnosti koju daju CCR modeli je u obliku konveksnog konusa (*covex cone*).

DEA model sa varijabilnim prinosom na obim

Prvo proširenje osnovnog CCR DEA modela uveli su Banker, Čarns i Kuper (Banker, Charnes, & Cooper, 1984). BCC model meri čistu tehničku efikasnost, odnosno daje meru efikasnosti koja ignoriše uticaj obima poslovanja tako što se k-ta DMU poredi samo sa drugim jedinicama sličnog obima. Efikasnost obima (*scale efficiency*) koja pokazuje da li posmatrana jedinica posluje sa optimalnim obimom operacija može se dobiti kada se mera efikasnosti koju daje CCR model (ukupna tehnička efikasnost) podeli sa merom efikasnosti koju daje BCC model (čista tehnička efikasnost).

U odnosu na primalni CCR model, primalni BCC model sadrži dodatnu promenljivu u^* koja definiše položaj pomoćne hiperravni koja leži na ili iznad svake DMU uključene u analizu. Izloženi matematički model proverava da li je *k*-ta DMU postigla željeni nivo izlaza sa minimalnim angažovanjem ulaza i od svih mogućih hiperravni koje prekrivaju sve DMU bira se ona kod koje je horizontalno rastojanje od posmatrane DMU do hiperravni najmanje. Vrednost parametra u^* direktno ukazuje na prirodu ekonomije obima koju dopušta DEA model. To je pokazano u teoremi koju su Banker i Tral dokazali u (Banker & Thrall, 1992), čija je osnovna ideja malo relaksirana uslovima koji slede. Prema teoremi, ako se pretpostavi da DMU_k leži na granici efikasnosti sledeći uslovi identifikuju prirodu ekonomije obima za posmatrani entitet:

- DMU_k posluje sa neopadajućim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* \leq 0$ za sve alternativne optimume;
- DMU_k posluje sa nerastućim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* \geq 0$ za sve alternativne optimume;
- DMU_k posluje sa konstantnim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* = 0$ za sve alternativne optimume.

Ako je $u^* = 0$ onda se BCC model svodi na CCR model (3)-(6). Relaksacija se odnosi na to da su strogi ulovi negativnosti ili pozitivnosti zamenjeni sa nepozitivnošću tj. nenegativnošću i na taj način se posmatra neopadajući umesto rastući prinos na obim odnosno nerastući umesto opadajućeg. Ova relaksacija ne menja suštinu teoreme, ali je bliža realnim situacijama i takvi modeli su lakši za primenu. U slučaju jednog ulaza i jednog izlaza pomoćna hiperravan koja prekriva podatke u baznom BCC modelu se svodi na polupravu, a u^* definiše vrednost odsečka na aspscisi iz kojeg polazi ta poluprava.

Primalni BCC DEA model koji je predložen u (Banker, Charnes, & Cooper, 1984) ima sledeći oblik:

MODEL (M 3.4)

$$(\text{Max})\ h_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} + u_* \tag{3.19}$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \tag{3.20}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + u_* \leq 0, \quad j = 1, 2 \ldots, n \tag{3.21}$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \ldots, s \tag{3.22}$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.23}$$

Ideja na kojoj se zasnivaju BCC modeli lakše se može razumeti na dualnom DEA modelu. Dualni BCC model se dobija ako se u dualni CCR model (M 3.3) doda ograničenje konveksnosti i dobije se model (M 3.5):

MODEL (M 3.5)

$$\text{(Min) } Z_k - \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^-\right) \tag{3.24}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \ldots, s \tag{3.25}$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{3.27}$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \; j = 1, 2, \ldots, n, \; r = 1, 2, \ldots, s, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.28}$$

Dodatno ograničenje (3.27) omogućuje promenljivi (varijabilni) prinos na obim (povećanje ulaza ne mora rezultovati u proporcionalnoj promeni izlaza) i obezbeđuje da referentan skup bude formiran kao konveksna kombinacija DMU koje su u njemu (one koje imaju pozitivnu vrednost za λ u optimalnom rešenju). Ovi modeli se često nazivaju i VRS DEA modelu sa obzirom da podrazumevaju varijabilni prinos na obim (*variable return to scale* - VRS). Granica efikasnosti koju se formira primenom ovih modela je u obliku konveksnog omotača (*convex hull*). Ograničenje konveksnosti (3.24) obezbeđuje da je kompozitna hipotetička jedinica, koja predstavlja uzornu jedinicu, sličnog obima i sličnog ulazno-izlaznog miksa kao i jedinica koja se ocenjuje. Ukoliko je potrebno u model uvesti konkretan pravac prinosa na obim ograničenje (3.24) se zamenjuje sa:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1 \text{ za nerastući prinos na obim} \tag{3.27'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1 \text{ za neopadajući prinos na obim} \qquad (3.27'')$$

Neka DMU posluje sa nerastućim prinosom na obim, ako proporcionalno povećanje svih njenih ulaza dovodi do manjeg ili jednakog proporcionalnog povećanja svih njenih izlaza. Granica efikasnosti za DEA modele sa nerastućim prinosom na obim uvek se sastoji od 2 dela i to prvi "niži" deo se poklapa sa CCR granicom efikasnosti, a drugi deo se poklapa sa BCC granicom efikasnosti.

Za neku DMU se kaže da posluje sa neopadajućim prinosom na obim ako proporcionalno povećanje svih njenih ulaza rezultuje u većem ili jednakom proporcionalnom povećanju svih njenih izlaza. Granica efikasnosti koju daju ovi modeli se takođe sastoji od 2 dela samo što sada njen niži deo odgovara BCC granici efikasnosti, a njen viši deo se poklapa sa CCR granicom efikasnosti.

U daljem tekstu bazni BCC model sa varijabilnim prinosom na obim će biti označen kao BCC_1, model sa nerastućim prinosom na obim sa BCC_2 i poslednji model u kom se zahteva neopadajući prinos biće označen sa BCC_3.

Primer 1.

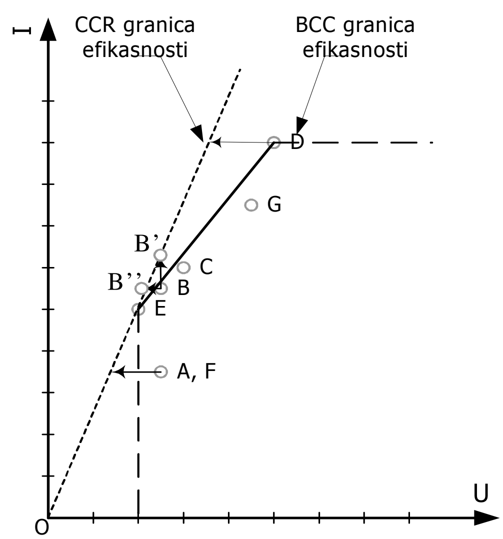
Za ilustraciju osnovnih razlika između CCR i BCC modela biće korišćen primer dat u Tabeli 1. U ovom slučaju će biti posmatrano 7 DMU sa jednim ulazom (U) i jednim izlazom (I). Podaci o ulazima i izlazima i indeksi efikasnosti izračunati primenom DEA modela pod pretpostavkama konstantnog i varijabilnog prinosa na obim su dati u tabeli 3.1.

Tabela 1.1. *Podaci i rezultati DEA analize*

DMU	U	I	CCR model	BCC model		
			h_k^* (CCR)	h_k^* (BCC_1)	h_k^* (BCC_2)	h_k^* (BCC_3)
A	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
B	50	110	0.88	0.95	0.95	0.88
C	60	120	0.80	0.92	0.92	0.80
D	100	180	0.72	**1.00**	**1.00**	0.72
E	40	100	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**
F	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
G	90	150	0.67	0.86	0.86	0.67

Na Slici 3.1, svaka DMU je na osnovu vrednosti ulaza i izlaza predstavljena kao jedna tačka u koordinatnom sistemu, a predstavljene su i granice efikasnosti dobijene na osnovu rešenja CCR i tri BCC modela sa različitim prinosima na obim (BBC_1 – varijabilni prinos, BCC_2 – nerastući i BCC_3 – neopadajući).

Kao što se može videti sa slike, poluprava koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku E pokazuje granicu efikasnosti dobijenu rešavanjem CCR modela. U slučaju jednog ulaza i jednog izlaza, granica efikasnosti koju daje CCR model je uvek prava linija koja polazi iz početka koordinatnog sistema. Ovo je posledica činjenice da CCR model ne dozvoljava da DMU posluju sa različitom ekonomijom obima, odnosno da dozvoljava samo konstantni prinos na obim. Na primer ako se posmatraju jedinice E i B može se reći da je vrednost izlaza 2.5 puta veća od vrednosti ulaza za DMU E, dok je taj odnos za DMU B jednak 2.2. Znači jedinica B je neefikasna pošto je njen prinos na obim manji od prinosa koji obezbeđuje E. Ona bi mogla postati efikasna i naći se na polupravoj OE (između tačaka B' i B'') ako smanji ulaz ili poveća izlaz u pravcu strelica na grafu. Puna linija koja spaja tačke E i D na «severozapadnoj» granici skupa proizvodnih mogućnosti predstavlja granicu efikasnosti dobijenu rešavanjem BCC_1 modela. U ovom slučaju DMU D je proglašena efikasnom iako je odnos izlaza prema ulazu jednak samo 1.8. Međutim prema modelu BCC_1 dozvoljen je varijabilan prinos na obim, i ne postoji ni jedna druga jedinica sa sličnom izlazno-ulaznom kombinacijom sa kojom bi se D mogla porediti, pa je postala efikasna. Isprekidane linije na grafikonu pokazuju kakav je zapravo oblik granice efikasnosti (konveksni omotač) koji se dobija kao rezultat primene osnovnog BCC modela (BCC_1).



Slika 1.1. *Oblici granice efikasnosti*

Na osnovu dobijenih indeksa efikasnosti, kao i na osnovu prikaza CCR i BCC granice efikasnosti može se zaključiti da je indeks efikasnosti koji daje CCR model uvek manji ili jednak od indeksa efikasnosti koji daje BCC model. Na primer ako se ponovo analizira tačka B iz tabele 1. vidi se da je ona sada znatno efikasnija (h_k^*=0.95), što se grafički može tumačiti kao udaljenost od granice efikasnosti. Ova vrednost govori da bi jedinica B postala efikasna ako bi smanjila ulaz na vrednost 0.95*50=47.5. Kada se primeni BCC_1 matematički model za izračunavanje efikasnosti DMU B, pored indeksa efikasnosti dobijaju se i referentne jedinice i faktori intenziteta. Jedinice na koje treba B da se ugleda su efikasne E i D. Faktori intenziteta ovih jedinica iznose 0.125 i 0.875 respektivno, što nam govori da je ograničenje (25) zadovoljeno (0.125+0.875=1). Ove dualne vrednosti se takođe mogu iskoristiti kod računanja ciljanih vrednosti ulaza i izlaza:

Ulaz'$_B$=0.125*100+0.875*40=47.5 $\Rightarrow$ *potrebno je smanjiti ulaz za 2.5.*

Ulaz'$_B$=0.125*180+0.875*100=100 $\Rightarrow$ *izlaz ostaje nepromenjen.*

Granicu efikasnosti za model BCC_2 čini deo CCR granice OE, a ostatak BCC granica (duž ED i isprekidana poluprava koja je paralelna sa X-osom). Kao posledica primene BCC modela sa nerastućim prinosom na obim smanjila se efikasnost jedinica A i F (imaju iste ulazne i izlazne vrednosti) koje se nalaze u delu grafikona na kom se promenio pravac granice efikasnosti. Sve ostale vrednosti su iste kao kod BCC_1 modela. Za ove dve jedinice referentna je organizacija E sa intenzitetom 0.75 < 1 i on govori da bi A i F postale efikasne sa istim izlazom ako bi smanjile ulaz na 0.75*40=30. Znači tačke A i F treba da se kreću u pravcu strelice na Slici 4. da bi dostigle granicu efikasnosti na najkraćim putem.

Granicu efikasnosti za model BCC_3 čini deo BCC granice paralelan sa Y-osom od apscise do tačke E i ostatak je deo CCR granice (polupravа koja se kreće od tačke E u beskonačnost). Kao posledica primene BCC modela sa neopadajućim prinosom na obim, u odnosu na rezultate BCC_1 modela, smanjila se efikasnost organizacija B, D i G koje se nalaze u gornjem delu grafikona na kom se promenio pravac granice efikasnosti, pa su one sada znatno više udaljene od granice u odnosu na koju se računa efikasnost posmatranih jedinica. Za sve ove jedinice referentna je jedina efikasna organizacija E. Ako se analizira jedinica D, koja je prema BCC_1 modelu bila efikasna, da bi sada dostigla indeks efikasnosti 1 potrebno je da se kreće u pravcu strelice na grafikonu. To znači da bi jedinica D postala efikasna i ostvarila trenutni nivo izlaza (180) koji je 1.8 puta veći od izlaza DMU E, potrebno je angažuje i 1.8 puta više ulaza od DMU E (1.8*40=0.72*100=72).

Na osnovu analize rezultata dobijenih rešavanjem četiri DEA modela može se zaključiti da CCR daje najmanje indekse efikasnosti zbog najstrožih zahteva, da prinos na obim treba da bude konstantan čime se istovremeno meri i ukupna tehnička efikasnost i efikasnost obima poslovanja. BCC_1 model ne uključuje meru obima poslovanja već meri samo čistu tehničku efikasnost pretvaranja ulaza u izlaze i prema tome daje najveću vrednost za indeks efikasnosti i najveći broj jedinica proglašava efikasnim. Modeli BCC_2 i BCC_3 u obzir uzimaju jedan tip ekonomije na obim, pa prema tome indeks efikasnosti se kreće u intervalu između najmanje i najveće dobijene vrednosti za svaku DMU. To znači da je

$$h_k^*(\mathrm{CCR}) \leq h_k^*(\mathrm{BCC2}),\ h_k^*(\mathrm{BCC3}) \leq h_k^*(\mathrm{BCC_1}) \tag{3.29}$$

Može se reći da su BCC_2 i BCC_3 hibridne varijante osnovnih DEA modela za procenu efikasnosti jedinica koje posluju sa nerastućim, odnosno sa neopadajućim prinosom na obim. Pošto je granica efikasnosti u ovim slučajevima kombinacija CCR i BCC granice efikasnosti, u praksi je dovoljno rešiti samo CCR i BCC model.

Orijentacija DEA modela

Modeli prikazani u prethodnim podpoglavljima su dizajnirani je cilj da se minimiziraju ulazi potrebni za proizvodnju tražene količine izlaza. Takvi modeli se najčešće nazivaju *ulazno orijentisani* modeli. DMU_k se smatra relativno neefikasnom ako joj je moguće smanjiti bilo koji ulaz bez smanjenja bilo kog izlaza i bez uvećanja nekog od preostalih ulaza. Neefikasna jedinica može postati efikasna smanjujući svoje ulaze (proporcionalno faktoru intenziteta Z u dualnom modelu) dok se njeni izlazi ne menjaju. Nasuprot ulaznoj orijentaciji, u *izlazno orijentisanom* modelu cilj je da se maksimizira izlaz pri zadatom nivou ulaza, a neefikasna jedinica postaje efikasna kroz povećanje svojih izlaza (proporcionalno faktoru intenziteta θ u dualnom modelu). DMU_k je relativno neefikasna ako joj je moguće povećati bilo koji izlaz bez povećanja bilo kog ulaza i smanjenja nekog od preostalih izlaza. Pored ove dve striktno određene orijentacije modela u literaturi se često pominju i *neorijentisani* (Cooper, Seiford, & Tone, 2000) ili *kombinovani* modeli ((Joro, 1998), (Thanassoulis & Emrouznejad, 1995)). Kod ovih modela se razmatra mogućnost da se vrši simultano smanjenje ulaza i povećanje izlaza da bi posmatrana jedinica postala efikasna.

Osnovni linearni DEA CCR i BCC modeli za ulaznu i izlaznu orijentaciju i neorijentisani modeli dati su u Tabeli 2. Prvo su dati primalni (težinski problem) i dualni (problem obavijanja) osnovni DEA modeli sa ulaznom orijentacijom, a zatim primalni i dualni izlazno orijentisani DEA modeli i na kraju neorijentisani modeli. Svi modeli su dati u matričnoj formi.

U primalnom izlazno orijentisanom DEA modelu virtuelni izlaz za DMU_k je jednak 1 (100%), a minimizira se njen virtuelni ulaz pri ograničenju da za svaku DMU koja je uključena u analizu virtuelni izlaz ne može biti veći od virtuelnog ulaza. Ovaj model se naziva “težinski” problem pošto treba odrediti vrednosti težinskim faktorima za ulaze i izlaze. Ove težine moraju imati nenegativne vrednosti, a za svaku DMU se određuju tako da se ona predstavi u najboljem mogućem svetlu. Najmanja moguća vrednost za funkciju cilja je 1 i tada je posmatrana DMU relativno efikasna, odnosno sa datim nivoom ulaza postigla je maksimalno mogući nivo izlaza. Ako je vrednost funkcije cilja veća od 1, posmatrana jedinica je relativno neefikasna i proporcionalno toj vrednosti treba da poveća svoje izlaze da bi bila efikasna. Ako je vrednost funkcije cilja veća od 1, onda one jedinice kod kojih je virtuelni izlaz jednak njihovom virtuelnom ulazu čine uzorne ili referentne jedinice za posmatranu jedinicu i obrazuju facet u odnosu na koju je izmeren njen nivo efikasnosti. Mera efikasnosti na osnovu rešenja izlazno orijentisanog DEA modela jednaka je recipročnoj vrednosti njegove funkcije cilja.

Tabela 1.2. *Orijentacija DEA modela*

Ulazno orijentisani

Težinski problem	Problem obavijanja
$\underset{u,v}{(\max)}\, h = u^T Y_k + u_*$	$\underset{\theta,\lambda}{(\min)}\quad Z - \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
p.o	p.o.
$v^T X_k = 1$	$Y\lambda - s^+ = Y_k$
$\mathrm{u}_* e^T + u^T Y - v^T X \le 0$	$ZX_k - X\lambda - s^- = 0$
$\mu^{\mathrm{T}} \ge \varepsilon,\, v^T \ge \varepsilon$	Z neograničeno, $\lambda, s^+, s^-, \varepsilon \ge 0$

Izlazno orijentisani	
Težinski problem	**Problem obavijanja**
$\underset{\mu,v}{(\min)}\, q = v^T X_k + u_*$	$\underset{\theta,\lambda}{(\max)}\; \theta + \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
p.o	p.o.
$\mu^T Y_k = 1$	$X\lambda + s^- = X_k$
$u_* e^T - u^T Y + v^T X \ge 0$	$-Y\lambda + \theta Y_k + s^+ = 0$
$u^{\mathrm{T}} \ge \varepsilon,\, v^T \ge \varepsilon$	θ neograničeno, $\lambda, s^+, s^-, \varepsilon \ge 0$

Neorijentisani	
Težinski problem	**Problem obavijanja**
$\underset{\mu,v}{(\min)}\, q = v^T X_k - u^T Y_k + u_*$	$\underset{\theta,\lambda}{(\max)}\; \theta + \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
p.o	p.o.
$v^T X_k + u^T Y_k = 1$	$X\lambda + \theta X_k + s^- = X_k$
$u_* e^T - u^T Y + v^T X \ge 0$	$-Y\lambda + \theta Y_k + s^+ = -Y_k$
$u^{\mathrm{T}} \ge \varepsilon,\, v^T \ge \varepsilon$	θ neograničeno, $\lambda, s^+, s^-, \varepsilon \ge 0$

Za sve težinske probleme važi:	Za sve probleme obavijanja važi:
$u_* \begin{cases} = 0 \text{ u CCR}, \\ \text{neograničeno u } \mathrm{BCC}_1, \\ \le 0 \text{ u } \mathrm{BCC}_2, \\ \ge 0 \text{ u } \mathrm{BCC}_3 \end{cases}$	CCR: nema dodatnog ograničenja BCC_1: dodaje se $e^T \lambda = 1$ BCC_2: dodaje se $e^T \lambda \le 1$ BCC_3: dodaje se $e^T \lambda \ge 1$

Kao što je već istaknuto, osnovnu ideju DEA metode najbolje ilustruje dualni model koji se naziva ”problem obavijanja”. U dualnom modelu pokušava se da se za datu jedinicu konstruiše hipotetička kompozitna jedinica izvan postojećih jedinica. Ako je to moguće posmatrana jedinica je neefikasna, a ako nije ona je efikasna. U izlazno orijentisanom DEA modelu vrednosti za dualne težine pokazuju važnost koju je imala svaka DMU pri definisanju ulaza i izlaza kompozitne jedinice i određuju se tako da nijedan od ulaza kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}, i = 1,2,...,m\right)$ ne bude veći od vrednosti tog ulaza za k-tu DMU. Pomoću tako izabranih dualnih težina izračunava se za svaki izlaz potrebna količina $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}, r = 1,2,...,s\right)$ koju k-ta DMU treba da proizvede da bi bila efikasna. Ako posmatrana k-ta DMU proizvodi manju količinu izlaza, onda faktor intenziteta λ_j pokazuje za koliko proporcionalno ona treba da poveća svoje izlaze da bi bila efikasna. Kada od svih λ_j (j= 1, 2, ...,n) u optimalnom rešenju samo λ_k ima pozitivnu vrednost, onda se k-ta DMU nalazi na granici efikasnosti i nije moguće od preostalih DMU konstruisati kompozitnu jedinicu koja bi sa istim nivoom ulaza kao i k-ta DMU proizvodila veću količinu izlaza.

Orijentacija DEA modela (ulazna ili izlazna) određuje pravac projekcije neefikasne DMU na granicu efikasnosti. U ulazno orijentisanom modelu efikasnost se poboljšava preko proporcionalnog smanjenja ulaza, a izlazna orijentacija zahteva proporcionalno povećanje izlaza. Dakle, u ulazno orjentisanom modelu neefikasna k-ta DMU se projektuje nalevo (horizontalno) na graničnu tačku (ZX_k, Y_k), a u izlazno orijentisanom modelu naviše (vertikalno) na graničnu tačku (X_k, θY_k) gde X_k, Y_k predstavljaju vektore ulaza i izlaza za DMU$_k$. Međutim, treba napraviti razliku između granične tačke (za nju faktor intenziteta mora biti jednak 1) i efikasne granične tačke za koju je neophodno i da su sve dopunske promenljive u dualnom DEA modelu jednake 0.

CCR modeli daju meru ukupne tehničke efikasnosti jedinice (uključene su i čista tehnička efikasnost i efikasnost obima). Za CCR model (i za primal i za dual) postoji veza između optimalnih rešenja ulazno i izlazno orijentisanog modela. Proizvod ovih rešenje je 1, odnosno za primalni model $h^* \cdot q^*=1$, a za dualni $Z^* \cdot \theta^*=1$. Dakle, granica efikasnosti je ista bez obzira na orijentaciju modela, samo je pravac projektovanja na nju različit.

Neorijentisani modeli se razlikuju od do sada opisanih modela ulazne ili izlazne orijentacije pošto se istovremeno mogu izračunati poboljšanja i u izlazima i u ulazima da bi DMU$_k$ postala efikasna. Ako se posmatra primalni neorijentisani model može se zaključiti da se zahteva minimizacija razlike virtuelnih ulaza i izlaza pri ograničenjima da njihov zbir bude jednak 1 i da za svaku DMU koja je uključena u analizu virtuelni izlaz ne može biti veći od virtuelnog ulaza. To znači da pojedinačne vrednosti virtuelnog ulaza ili izlaza DMU$_k$ moraju biti manje ili jednake 1, a zbog prirodnih ograničenja veće ili jednake 0. Prema tome vrednost virtuelnih ulaza može da se kreću između 0 i 1. Minimum njihove razlike će se ostvariti ako je vrednost funkcije cilja jednaka 0, tj. kada su virtuelni ulazi i izlazi međusobno jednaki (0.5). Ako je vrednost funkcije cilja veća, ona pokazuje za koliko bi procentualno DMU$_k$ trebalo istovremeno da smanjiti ulaze i poveća izlaze da bi postala efikasna. Dualne težine imaju isto značenje kao kod ulazno ili izlazno orijentisanih modela i referentne jedinice se određuju na već opisani način. Ako je DMU$_k$ efikasna moraju biti ispunjeni sledeći uslovi.

$$\theta = 0 \tag{3.30}$$

$$\lambda_k = 1,\ \lambda_j = 0,\ j \neq k \tag{3.31}$$

$$e^T s^+ = 0, e^T s^- = 0 \tag{3.32}$$

Iz prethodnih uslova sledi da su ograničenja ispunjena i imaju oblike $1 * X_k = X_k, 1 * Y_k = Y_k$. Za neefikasnu DMU, granična tačka, koja joj je uzorna jedinica, ima koordinate ($(1-\theta)X_k, (1+\theta)Y_k$), pod uslovom da su sve dopunske promenljive s^+ i s^- jednake 0.

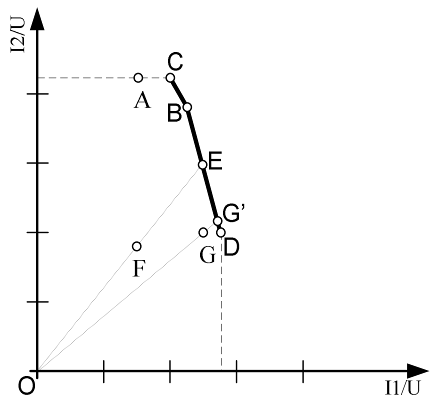
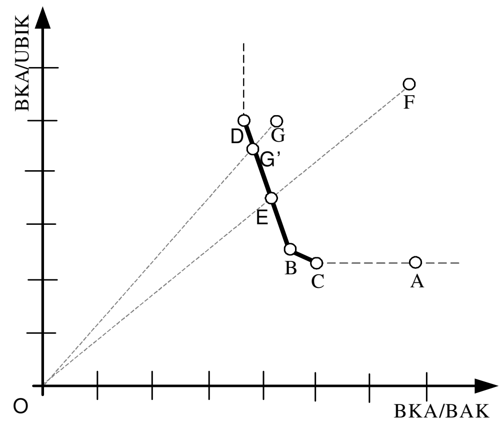
Primer 2.

Za ilustraciju razlike između ulazno, izlazno orijentisanih i neorijentisanih modela biće korišćeni podaci iz primera 1. za 7 DMU koje koriste jedan ulaz - U (kao i u primeru 1.) i proizvode dva izlaza (I1 i I2). Prvi izlaz je isti kao u primeru 1.

Tabela 1.3. *Rezultati primene DEA modela različite orijentacije*

DMU	U	I1	I2	Ulazno orijentisani model (U)			Izlazno orijentisani model (I)			Neorijentisani model (N)		
				I1/U	I2/U	Z_k	U/I1	U/I2	h_k	$\frac{I1-U}{I1+U}$	$\frac{I2-U}{I2+U}$	Z_k
A	50	75	210	1.50	4.20	1.00	0.67	0.24	1.00	0.20	0.62	**0.00**
B	50	110	190	2.20	3.80	**1.00**	0.45	0.26	**1.00**	0.38	0.58	**0.00**
C	60	120	252	2.00	4.20	**1.00**	0.50	0.24	**1.00**	0.33	0.62	**0.00**
D	100	275	200	2.75	2.00	**1.00**	0.36	0.50	**1.00**	0.47	0.33	**0.00**
E	40	100	120	2.50	3.00	**1.00**	0.40	0.33	**1.00**	0.43	0.50	**0.00**
F	50	75	90	1.50	1.80	0.60	0.67	0.56	1.67	0.20	0.29	0.25
G	90	225	180	2.50	2.00	0.92	0.40	0.50	1.08	0.43	0.33	0.04

Za merenje efikasnosti posmatranih organizacija korišćeni su CCR ulazno i CCR izlazno orijentisani i neorijentisani modeli. Rezultati su dati u kolonama U, I, N tabele 3.3, respektivno. Iz tabele 3.3 se može videti da su četiri naglašene jedinice (B, C, D, E) efikasne bez obzira na orijentaciju modela, a ostale su neefikasne. Jedinica A ima indeks efikasnosti 1 kao da je efikasna, međutim to nije slučaj. Objašnjenje nastale situacije i prikaz razlika između modela dat je grafički u dvodimenzionalnom prostoru. Za konstruisanje grafikona za ulazno odnosno izlazno orijentisane modele korišćeni su količnici iz 5. i 6. i 8. i 9. kolone koji u stvari predstavljaju racia ulaza i izlaza.

	
Slika 1.2. *Ulazno-orijentisani DEA model*	Slika 1.3. *Izlazno-orijentisani DEA model*

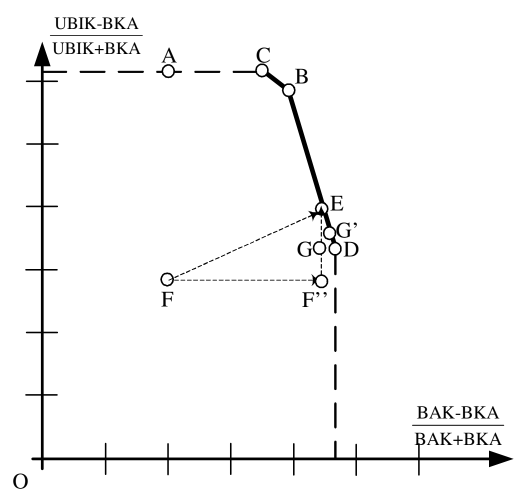
Na Slici 3.2. je dat grafikon koji odgovara ulazno-orijentisanom modelu, a na Slici 3.3. grafikon koji odgovara izlazno-orijentisanom modelu. Granicu efikasnosti ili obvojnicu u oba slučaja čine efikasne jedinice C, B, E i D. Razlika je u načinu obavijanja neefikasnih jedinica.

U prvom slučaju očigledno neefikasne jedinice F i G (indeks efikasnosti manji od 1) su obavijene odozgo, dok su u drugom slučaju neefikasne jedinice, F i G, sa indeksom većim od 1 obavijene odozdo. Za svaku od neefikasnih organizacija se može konstruisati referentna jedinica na granici efikasnosti. Za organizaciju F, to je postojeća organizacija E. Za organizaciju G mora se konstruisati hipotetička jedinica G', koja nastaje kao linearna kombinacija ulaza i izlaza organizacija E i D, pošto se G' nalazi na duži koja spaja ove dve organizacije. Indeks efikasnosti se može izračunati kao odnos radijalnog rastojanja posmatrane DMU od koordinatnog početka i radijalnog rastojanja njene referentne tačke od koordinatnog početka (OG'/OG i OE/OF). Očigledno je da su jedinice F i G na Slici 3.2. dalje od koordinatnog početka od njihovih referentnih tačaka pa je i indeks efikasnosti manji od 1, a na Slici 3.3. ja njihovo radijalno rastojanje manje od rastojanja tačaka G' i E što implicira indeks efikasnosti veći od 1.

U drugom slučaju se teži maksimizaciji izlaza koji se mogu proizvesti sa datim ulazima, pa su neefikasne jedinice, F i G, sa indeksom većim od 1 obavijene odozdo. Referentne jedinice se formiraju na isti način kao kod ulazno orijentisanog modela, samo što se neefikasne tačke nalaze bliže koordinatnom početku u odnosu na tačke E i G' pa su količnici OG'/OG i OE/OF veći od jedan. Vrednosti količnika predstavljaju indekse efikasnosti za jedinice F i G i govore za koliko procentualno jedinice treba da povećaju izlaze da bi postale efikasne. Znači ako bi jedinica F povećala svoje izlaze za 1.67 puta, njihove vrednosti bi bile približno jednake 125, odnosno 150. Koordinate tačke F bi bile iste kao koordinate tačke E i našla bi se na granici efikasnosti.

Za analizu je interesantna DMU A koja ima indeks efikasnosti jednak 1 u oba slučaja, ali je proglašena neefikasnom. Na grafikonima se može videti da se ona u oba slučaja nalazi na isprekidanim odsečcima granice efikasnosti koji su paralelni sa apscisom ili ordinatom. U poređenju sa tačkom C, posmatrana tačka A ima manji odnos U/I1 za 0.5, odnosno veći racio U/I2 za 0.17. Odnos drugog izlaza i ulaza je isti kao kod tačke C. Znači, da bi A postala efikasna mora povećati izlaz "broj aktivnih kredita" na 100. Razlika između željene vrednosti i stvarne (100-75=25) predstavlja vrednost izravnavajuće promenljive, koja je veća od nule i ukazuje da DMU A nije efikasna.

Grafikon koji bi ilustrovao granicu efikasnosti za neorijentisane modele je dat na Slici 3.4.



Slika 1.4. *Neorijentisani DEA model*

Za crtanje grafikona iskorišćeni su količnici dati u Tabeli 3.3. Ako se posmatra neorijentisani primalni (težinski) model vidi se da se teži minimizaciji razlike virtuelnih ulaza i izlaza. Pri crtanju grafikona nisu uzeti u obzir multiplikatori tj. težinski koeficijenti za ulazne tj. izlazne parametre koje onemogućuju da funkcija cilja bude negativna. Da bi se sprečilo da funkcija cilja postane negativna u obzir je uzeta razlika izlaza i ulaza. Pored toga iskorišćena je osobina linearnog programiranja $(\min) f(x) = (\max)(-f(x))$, i zbog toga granica efikasnosti koja spaja tačke C, B, E i D obavija neefikasne jedinice F i G odozgo. Može se primetiti da su sve jedinice ocenjene na isti način kao i kod prethodna dva modela, samo je indeks efikasnosti za efikasne jednak 0. Jedinica A takođe ima indeks efikasnosti 0, ali je neefikasna iz istih razloga kao i kod prethodnih modela. Ako se posmatra tačka F, može se primetiti da je njena referentna jedinica ponovo tačka E. Indeks efikasnosti 0.25 govori da tačka F treba da smanji ulaze za 25% (na 37.5) i poveća izlaze za 25% (93.75 i 112.5) da bi se našla na granici efikasnosti. Kretanje tačke F prema granici efikasnosti je u pravcu vektora FE. Vektor FE je rezultanta dobijena sabiranjem vektora FF" i F"E, koji pokazuju pravce u kojima se kreće tačka F ako se vrši smanjenje ulaza BKA i pojedinačno povećanje izlaza I1 i I2, respektivno. Na isti način tačka G dostiže koordinate tačke G' na granici efikasnosti smanjenjem ulaza za 4% i istim procentualnim povećanjem izlaza.

1.1.2. NERADIJALNE MERE EFIKASNOSTI

Za razliku od osnovnih modela u kojima se indeks efikasnosti određuje kao radijalna distanca DMU$_k$ od njene referentne jedinice, razvijeni su modeli u kojima je indeks efikasnosti neradijalna mera. Pri rešavanju modela koji podrazumevaju neradijalnu meru efikasnosti značajnu ulogu imaju dopunske promenljive, pa su modeli dobili nazive uzimajući u obzir način na koji se one tretiraju. U daljem tekstu će biti prikazana dva tipa ovih modela.

Aditivni modeli

Prvi tip modela kod kojih indeks efikasnosti direktno zavisi od vrednosti izravnavajućih promenljivih naziva se aditivni model, pošto funkcija cilja predstavlja zbir svih dodatnih promenljivih. Ovaj model je najlakše razumeti u formi obavijanja (Model M 3.6).

MODEL (M 3.6)

$$(\max)\,\varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-) \tag{3.33}$$

p.o.

$$X\lambda + s^- = X_k \tag{3.34}$$

$$Y\lambda - s^+ = Y_k \tag{3.35}$$

$$\lambda, s^+, s^-, \varepsilon \geq 0 \tag{3.36}$$

$$\begin{array}{ll} \text{CCR:} & \text{nema dodatnog ograničenja} \\ \text{BCC}_1\text{:} & \text{dodaje se } e^T\lambda = 1 \\ \text{BCC}_2\text{:} & \text{dodaje se } e^T\lambda \leq 1 \\ \text{BCC}_3\text{:} & \text{dodaje se } e^T\lambda \geq 1 \end{array} \tag{3.37}$$

U prethodnom poglavlju je rečeno da DMU$_k$ može biti efikasna samo ako su joj sve dodatne promenljive (s^- i s^+) jednake nuli. Znači da bi DMU$_k$ bila efikasna prema aditivnom modelu vrednost funkcije cilja mora biti jednaka 0. U suprotnom ona predstavlja ukupnu vrednost za koju treba simultano povećati izlaze i smanjiti ulaze. Očigledno je da se ovde radi o neorijentisanom modelu. Ograničenja (3.34) i (3.35) definišu da vrednost ulaza posmatrane jedinice mora biti veća ili jednaka od ulaza kompozitne jedinice i da vrednost izlaza posmatrane jedinice mora biti manja ili jednaka izlazu kompozitne jedinice. Kada je DMU$_k$ efikasna ova ograničenja postaju jednakosti. Ograničenje (3.36) zavisi od pretpostavljenog prinosa na obim i može imati jednu od 4 predložene forme, kao i kod osnovnih modela. U tumačenju rešenja važnu ulogu imaju vrednosti dopunskih promenljivih koje govore za koliko po apsolutnoj vrednosti treba povećati izlaz i smanjiti ulaz da bi DMU$_k$ postala efikasna. Pomoću optimalnog rešenja ($\lambda^*, s^{+*}, s^{-*}$) problema (M 3.6) mogu se odrediti ciljane vrednosti za neefikasne DMU$_k$:

$$X_k^{"} = X_k - s^{-*} \tag{3.38}$$

$$Y_k^{"} = Y_k + s^{+*} \tag{3.39}$$

Za model (M 3.6) odgovarajući dualni model (u literaturi se model (M 3.7) najčešće naziva primalni, a model (M 3.6) dualni aditivni modela) glasi:

MODEL (M 3.7)

$$\underset{u,v}{(\min)}\, q = v^T X_k - u^T Y_k + v_* \tag{3.40}$$

p.o

$$u_* e^T - u^T Y + v^T X \geq 0 \tag{3.41}$$

$$\mu^{\mathrm{T}} \geq \varepsilon, v^T \geq \varepsilon \tag{3.42}$$

gde je:

$$u_* \begin{cases} = 0 \text{ u CCR,} \\ \text{neograničeno u BCC}_1 \ , \\ \leq 0 \text{ u BCC}_2, \\ \leq 0 \text{ u BCC}_3 \end{cases} \tag{3.43}$$

Ukoliko se rešavaju modeli ulazne orijentacije podrazumeva se da se mogu samo ulazi smanjivati. Prema tome, samo dopunska promenljiva za ulaze može biti veća od nule ($s^- \geq 0$ i $s^+ = 0$), što znači da se menjaju funkcija cilja ($(\max)\,\varepsilon(e^T s^-)$) i ograničenje (3.35) koje postaje $Y\lambda = Y_k$.

Slično, ukoliko se rešavaju modeli izlazne orijentacije podrazumeva se da se mogu povećavati samo izlazi što implicira da je $s^{-}=0$ i $s^{+}\geq 0$. To znači da funkcija cilja sabira samo izlazne dopunske promenljive $((\max)\varepsilon(e^{T}s^{+}))$ i menja se ograničenje (3.34) koje postaje $X\lambda = X_k$. Analogno promenama u dualnom modelu moraju se napraviti promene i u primalnom modelu poštujući poznate principe linearnog programiranja koji definišu način prevođenja modela iz primala u dual (Cooper, Seiford, & Tone, 2006).

Za objašnjenje modela (M 3.6) i (M 3.7) iskoristićemo podatke iz primera 2.

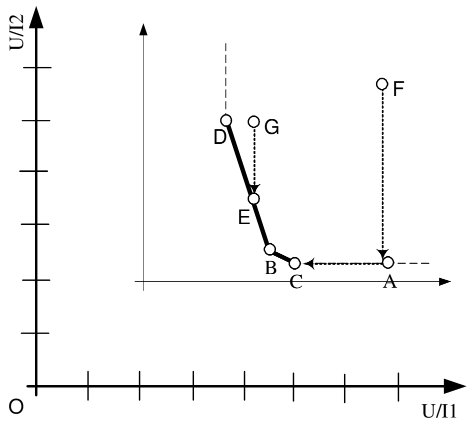
Primer 3.

Poređenje će biti izvršeno na osnovu rezultata dobijenih rešavanjem osnovnih modela ulazne orijentacije i neorijentisanih aditivnih DEA, koji pretpostavljaju konstantan prinos na obim.

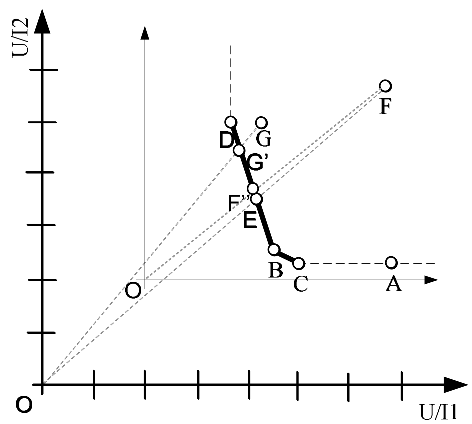
Tabela 1.4. *Rezultati primene aditivnog DEA modela*

DMU	U	I1	I2	Izlazno orijentisani model (I)			Aditivni model					
				U/I1	U/I2	h_k	s^{-}_{BKA}	s^{+}_{BAK}	s^{+}_{UBIK}	q	$\frac{U}{I1+s^{+}_{I1}}$	$\frac{U}{I2+s^{+}_{I2}}$
A	50	75	210	0.67	0.24	*1.00*	0	25	0	*0*	0.50	0.24
B	50	110	190	0.45	0.26	***1.00***	0	0	0	***0***	0.45	0.26
C	60	120	252	0.50	0.24	***1.00***	0	0	0	***0***	0.50	0.24
D	100	275	200	0.36	0.50	***1.00***	0	0	0	***0***	0.36	0.50
E	40	100	120	0.40	0.33	***1.00***	0	0	0	***0***	0.40	0.33
F	50	75	90	0.67	0.56	*1.67*	0	25	120	*145*	0.50	0.24
G	90	225	180	0.40	0.50	*1.08*	0	0	90	*90*	0.40	0.33

Na osnovu rezultata očigledno je da jedinice B, C, D i E ostaju efikasne i na osnovu rešenja aditivnog modela. Za jedinicu A smo već na osnovu prethodne analize zaključili da treba da poveća vrednost izlaza I1 za 25 da bi postala efikasna. Jedinica F bi trebalo da poveća izlaze za 25 i 120 da bi postala efikasna. Zbir ovih izravnavajućih tj. dopunskih promenljivih daje indeks efikasnosti jednak 145 (25+120). Slično se može zaključiti i za G koja postaje efikasna ako poveća I2 za 90. U poslednje dve kolone tabele 3.4 su prikazani količnici ulaza i ciljanih izlaza koji se računaju na osnovu formula (3.38) i (3.39).



Slika 1.5. *Aditivni DEA model*



Slika 1.6. *Osnovni DEA model*

Na Slici 3.5. i u tabeli 3.4. se vidi da je za tačku F referentna tačka C pošto je novi odnos izlaza i ulaza isti za obe jedinice. Sličan zaključak se može izvesti posmatrajući tačke G i E. Jedinica G je neefikasna, a tačka E je njena referentna jedinica, i može se reći da organizacija G treba da teži da ostvari odnos ulaza i izlaza isti kao jedinica E. Tačke F i G bi trebalo da se kreće u pravcu vektora na Slici 9. da bi se pozicionirale na granici efikasnosti.

Pored razlika u matematičkoj formulaciji i tumačenju dobijenih rezultata dve bitne razlike između osnovnih i aditivnih DEA modela su:

1. Indeks efikasnosti dobijen rešavanjem osnovnih DEA modela je neosetljiv na promenu mernih jedinica ulaza i izlaza, dok se indeks efikasnosti menja u slučaju primene aditivnih modela. Na primer ako bi I2 bio dat u hiljadama, indeks efikasnosti jedinice G bi bio 90000, a ne 90.

2. Indeks efikasnosti dobijen rešavanjem osnovnih DEA modela zavisi od položaja koordinatnog sistema, dok se on ne menja kod aditivnih modela ako se promeni pozicija koordinatog početka. Kao što se vidi na Slici 3.5. rastojanje se meri korišćenjem metrike L1 (Cooper, Seiford, & Tone, 2006) od posmatrane tačke do granice efikasnosti, pa položaj koordinatnog sistema ne igra nikakvu ulogu. Za razliku od neradijalnih, kod radijalnih modela rastojanje se računa kao udaljenost posmatrane tačke do koordinatnog početka koristeći Euklidovu metriku i direktno zavisi od pozicije na kojoj se koordinatni početak nalazi. Na Slici 3.5. je prikazano šta se dešava ako se koordinatni početak nalazi u tački (0.2; 0.2), a primenjuje se CCR DEA model. Na primeru tačke F (Slika 3.5) se vidi da se menja indeks efikasnosti koji se sada meri kao O'F'/O'F i očigledno ima vrednost oko 0.4, a bio je jednak OE/OF=0.6, dok ista

promena nema uticaja na indeks efikasnosti dobijen primenom aditivnih modela (Slika 3.5).

Mere bazirane na dopunskim promenljivim

Aditivni modeli kod kojih vrednost funkcije cilja ne zavisi od mernih jedinica ulaza i izlaza daju meru efikasnosti baziranu na dopunskim promenljivim (*Slack Based Measures* – SBM) (Tone, 2001). Efikasnost se izražava u skalarnoj formi i ostaje ista bez obzira da li je merena jedinica nekog parametra kilometar ili metar.

U cilju procene efikasnosti kreće se od ulazno orijentisanog modela razlomljenog programiranja (M 3.8).

MODEL (M 3.8)

$$(\min)\,\rho = \frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{ik}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{rk}} \tag{3.44}$$

p.o

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i=1,\ldots,m \tag{3.45}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \qquad r=1,\ldots,s \tag{3.46}$$

$$\lambda_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n,\ s_i^- \ge 0, i=1,\ldots,m,\ s_r^+ \ge 0, r=1,\ldots,s \tag{3.47}$$

Ova osobina se naziva “sloboda dimenzija” ili “jedinična invarijantnost”. Mera bazirana na dopunskim promenljivim ima dve važne osobine (Cooper, Seiford, & Tone, 2006):

- Mera efikasnosti je invarijantna na merne jedinice ulaza i izlaza (jedinična invarijantnost). (O1)
- Vrednost indeksa efikasnosti je monotono opadajuća za svaku ulaznu ili izlaznu dopunsku promenljivu (monotonost). (O2)

Pretpostavlja se da su vrednosti za ulazne tj. izlazne promenljive veće od nule, a ako su jednake nuli ($x_{ik}=0$ ili $y_{rk}=0$) iz funkcije cilja se briše izraz s_i^- / x_{ik} ili s_r^+ / y_{rk}. Očigledno je da će vrednost funkcije cilja biti jednaka 1, što znači da je DMU$_k$ efikasna, samo u slučaju da sve dopunske promenljive za ulaze i izlaze imaju vrednost 0, a ako je bar jedna od njih veća od 0 indeks efikasnosti je manji od 1. Ovaj model očigledno ispunjava osobine O1 i O2. Kada se posmatraju imenilac i brojilac funkcije cilja očigledno je da se i ulazne i izlazne promenljive i njihove odgovarajuće dopunske promenljive izražavaju istim mernim jedinicama čime se postiže jedinična invarijantnost. Ako se vrednost neke od dopunskih promenljivih (s_i^- ili s_r^+) poveća, a da se ništa drugo ne promeni vrednost funkcije cilja očigledno striktno monotono opada. Kod izlazno orijentisanog modela menja se samo funkcija cilja (3.44') čija bi vrednost bila jednaka 1 za efikasne i veća od 1 za neefikasne DMU.

$$(\max)\psi = \frac{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{rk}}{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{rk}} \tag{3.44'}$$

Ako se u model (M 3.8) uvede pozitivna skalarna varijabla t i primene pravila transformacije modela razlomljenog u model linearnog programiranja dobija se model (M 3.8').

MODEL (M 3.8')

$$(\min)\tau \;=\; t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{rk} \tag{3.48}$$

p.o

$$t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{rk} = 1 \tag{3.49}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1,\ldots,m \tag{3.50}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \qquad r = 1,\ldots,s \tag{3.51}$$

$$\lambda_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n,\ s_i^- \geq 0, i = 1,\ldots,m,\ s_r^+ \geq 0, r = 1,\ldots,s \tag{3.52}$$

Za neefikasne jedinice (indeks efikasnosti različit od 1) se slično kao u osnovnim DEA modelima može odrediti skup referentnih jedinica za koje važi da je $\lambda \geq 0$ i takođe se na isti način kao kod aditivnih modela mogu odrediti ciljane vrednosti ulaza i izlaza preko relacija (3.38) i (3.39) koje posmatrana DMU treba da dostigne da bi bila efikasna.

1.1.3. MODELI SA NEKONVEKSNOM GRANICOM EFIKASNOSTI

Osnovni DEA modeli podrazumevaju da granica efikasnosti koja obavija sve neefikasne jedinice ima oblik konveksnog konusa ili omotača u zavisnosti od izabrane ekonomije obima. Granicu efikasnosti formiraju efikasne DMU. Sa slika 3.5. i 3.6. se može videti da se neefikasna jedinica G poredi sa hipotetičkom jedinicom G' koja se dobija kao linearna kombinacija dve efikasne jedinice.

Da bi izbegli pretpostavke o obliku granice efikasnosti i da bi obezbedili da se jedinice porede prema stvarnim performansama Deprins, Simar i Tulkens su uveli metodu pod nazivom *Free Desposal Hull* –FDH (Cooper, Seiford, & Tone, 2000), str. 105. Granica efikasnosti predstavlja "najmanji skup" koji obuhvata sve proizvodne mogućnosti generisane na osnovu performansi posmatranih jedinica. To znači da bi DMU_k pripadala granici efikasnosti potrebno je da vrednosti njenih ulaza budu manje ili jednake, a vrednosti izlaza veće ili jednake od odgovarajućih vrednosti svih ostalih jedinica posmatranog skupa. ($x_k \leq x_j,\ y_k \geq y_j,\ j = 1, \ldots, n$). Za ilustraciju načina na koji se formira FDH granica efikasnosti biće korišćeni podaci iz primera 3. gde se podrazumeva izlazna orijentacija modela.

Primer 4.

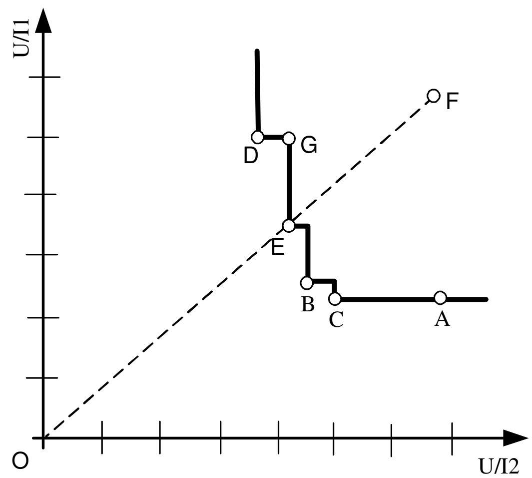
Tabela 1.5. *Rezultati primene FDH modela*

DMU	U	I1	I2	Izlazno orijentisani model		
				U/I1	U/I2	FDH
A	50	75	210	0.67	0.24	**1.00**
B	50	110	190	0.45	0.26	**1.00**
C	60	120	252	0.50	0.24	**1.00**
D	100	275	200	0.36	0.50	**1.00**
E	40	100	120	0.40	0.33	**1.00**
F	50	75	90	0.67	0.56	0.80
G	90	225	180	0.40	0.50	**1.00**

Na Slici 3.7. je prikazana stepenasta funkcija koja predstavlja FDH granicu efikasnosti (A-C-B-E-G-D). FDH tehnologija ne podrazumeva radijalnu distancu i može se reći da prikazana isprekidana linija ne postoji tj. tačka E nije referentna tačka za tačku F koja je jedina neefikasna jedinica. FDH tehnologija se zasniva na principima dominacije. Pri određivanju proizvodnog skupa koji treba da formira granicu efikasnosti eliminišu se sve dominirane jedinice (sa manjom vrednošću nekog izlaza i većom vrednošću ulaza). Ako se porede ulazi i izlazi jedinice F sa ostalim kredinim organizacijama može se uočiti sledeće:

- Tačka F ima istu vrednost ulaza kao jedinice A i B, ali proizvodi manje izlaza što automatski znači da nad njom dominiraju A i B.

- Jedinica E uz manji ulaz proizvodi više izlaza od F što znači da je F dominirana od strane E.



Slika 1.7. *FDH granica efikasnosti*

Navedene karakteristike čine tačku F neefikasnom. Ona bi trebalo da ostvari odnos izlaza i ulaza kao tačka E da bi postala efikasna, što se vidi na Slici 3.7.

Model koji daje rešenje problema sa nekonveksnom granicom efikasnosti ima sledeći oblik:

MODEL (M 3.9)

$$(\text{Min})\, Z_k \tag{3.53}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, . y_{rj} \leq y_{rk}, \qquad r = 1,2,...,s \tag{3.54}$$

$$Z_k \, . \, x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq 0, \quad i = 1,2,...,m \tag{3.55}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \tag{3.56}$$

$$\lambda_j \in \{0,1\}, s_r^+, s_i^- \geq 0; \; j = 1,2,...,n, \; r = 1,2,...,s, \; i = 1,2,...,m, \; Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.57}$$

Očigledno je da model M 3.9 predstavlja problem mešovitog “0-1” programiranja i da je nastao kao modifikacija BCC modela koja podrazumeva da samo jedna jedinica može imati težinski koeficijent λ jednak 1. Na taj način se osigurava da u skup efikasnih jedinica ulaze samo nedominirane opservacije.

1.1.4. DEA MODELI SA OGRANIČAVANJEM TEŽINA

DEA metoda za svaku DMU čija se efikasnost ocenjuje (primalni model) određuje vrednosti težinskih koeficijenata za ulaze i izlaze. Osnovni DEA modeli dozvoljavaju potpunu fleksibilnost u izboru težina jedinici čija se efikasnost ocenjuje tako da ona postigne maksimalnu efikasnost u skladu sa nivoima njenih ulaza i izlaza. Ova potpuna fleksibilnost u izboru težina je ključna za identifikaciju neefikasnih DMU, koje leže ispod granice efikasnosti čak i sa svojim skupom težina. Međutim, težine koje su određene DEA analizom, nekada mogu biti u suprotnosti sa prethodnim znanjem ili prihvaćenim stanovištima za relativne vrednosti ulaza i izlaza. Primene DEA metode za rešavanje realnih problema nametnule su razvoj metoda za vrednosne procene. To je deo studije ocene efikasnosti koji reflektuje preference donosioca odluke u tom procesu. Navode se sledeći razlozi za korišćenje procene vrednosti u DEA (pregled rezultata preuzet iz (Martić, 1999) i (Popović, 2006)):

- ***Uključivanje prethodnih stanovišta o vrednostima pojedinih ulaza i izlaza;***

  Kao ilustracija ovog primera izvršena je ocena efikasnosti poreskih odeljenja. Analiza rezultata dobijenih primenom osnovnih DEA modela je ukazala da su pojedina poreska odeljenja bila efikasna jer su im u optimalnom rešenju velike vrednosti težina dodeljene za broj rešenja o umanjenju poreza i broj sudskih poziva neodgovornim poreskim obveznicima (izlazi), dok su neki "važniji" izlazi, kao što je broj izdatih poreskih rešenja, bili praktično ignorisani. Restrikcija fleksibilnosti težina je bila nametnuta u pokušaju da se objedine pogledi top menadžmenta u vezi sa relativnom važnošću ulaza i izlaza korišćenih u oceni efikasnosti.

- ***Povezivanje vrednosti pojedinih ulaza i/ili izlaza;***

  Primer je ocena efikasnosti jedinica za zaštitu trudnica u Velikoj Britaniji, gde je zahtevano da težina za ulazni faktor "rizik kod odojčadi" bude ista kao i za izlazni faktor "broj preživelih". Odnos broja preživelih i broja rizičnih beba je zapravo dodatni faktor koji je trebalo uključiti u procenu. Kako originalni CCR model ne može da reši ovaj tip problema, razvijen novi model da bi objedinio ove zahteve. Drugi primer je ocena efikasnosti univerzitetskih departmana u Velikoj Britaniji, gde je trebalo da departmani sa većim brojem postdiplomaca budu favorizovani pri proceni efikasnosti, jer su Univerziteti računali na ove studente zbog dodele veće pomoći vlade. Ovi kvalitativni elementi ne mogu biti uključeni bez objedinjavanja procene vrednosti sa ocenom efikasnosti.

- ***Uključivanje prethodnih stanovišta o efikasnim i neefikasnim jedinicama;***

Pri proceni efikasnosti, menadžment često ima stav o tome koje su od posmatranih jedinica sa "dobrim", a koje sa "lošim" performansama. Na primer, pri proceni efikasnosti banaka u Americi je zapaženo da su primenom CCR modela neke opšte poznato neefikasne banke svrstane u efikasne. Stavovi rukovodstva treba da budu objedinjeni pri ocenjivanju efikasnosti u cilju dobijanja rezultata koji su bliži ranijim zapažanjima rukovodstva. Ovo je dovelo do familije novih DEA modela u kojima se efikasnost banaka procenjuje na osnovu ulaznih/izlaznih vrednosti tri prethodno izabrane banke koje su priznate kao efikasne. Predizbor nekih jedinica pri proceni efikasnosti je u suprotnosti sa studijom efikasnosti poreskih odeljenja, gde su autori uspeli da otkriju suštinu pri određivanju efikasnih odeljenja.

- ***Ocenjivanje efikasnosti treba da uzme u obzir mogućnost supstitucije ulaz/izlaz;***

Korišćenje parametarske proizvodne funkcije u ekonomiji, i pored njenih nedostataka, dovelo je do uvođenja marginalnih stopa supstitucije između ulaza i izlaza u proceni efikasnosti. One se mogu koristiti pri donošenju odluka o preraspodeli resursa. Odnos između optimalnih težina koje CCR model daje za ulazne i izlazne faktore koristi se za procenu marginalnih stopa transformacije. Ovaj koeficijent, međutim, ne može uvek biti određen zato što neke težine mogu biti bliske nuli. Navodi se da problem dobijanja pouzdanih stopa supstitucije korišćenjem DEA metode tek treba da postane glavna istraživačka oblast. Ovo je verovatno posledica do sada ograničenih pokušaja korišćenja DEA analize u oblasti donošenja odluka u vezi preraspodele resursa. Još jedan razlog za uključivanje vrednosne procene u DEA proizilazi iz potrebe da se odredi ukupna efikasnost posmatranih jedinica. Ukupna efikasnost, kako ju je definisao Farel, je sastavljena od tehničke i alokativne efikasnosti. Procena alokativne, a samim tim i ukupne efikasnosti zahteva znanje "cena" ulaza. Informacije o cenama nisu uvek lako dostupne u neprofitno, pa čak i u profitno orijentisanom okruženju, te stoga treba neke oblike alternativnih informacija uključiti u procenu. Pokazano je da se procene vrednosti mogu koristiti za određivanje opsega cena za količnike ulaz/izlaz u cilju utvrđivanja njihove ukupne efikasnosti. Ovo je u suprotnosti sa tradicionalnim načinom određivanja ukupne efikasnosti, gde su cene određene korišćenjem pojedinačnih vrednosti za svaki ulaz i izlaz.

- ***Omogućavanje razdvajanja efikasnih jedinica;***

Primer gde je omogućeno razdvajanje efikasnih jedinica je analiza 6 mogućih lokacija za nuklearna postrojenja u Teksasu. Primenom osnovnog DEA modela dobijeno je da je pet lokacija bilo relativno efikasno, pa se pojavio problem nemogućnosti diskriminacije efikasnih jedinica. Diskriminaciona moć analize je bila povećana definisanjem oblasti prihvatljivih težina (takozvani regioni sigurnosti), koje su onda korišćene za određivanje preferirane efikasne lokacije.

Uvođenje dopunskih ograničenja za težine, odnosno ograničenja pomoću kojih se vrši vrednosna procena ulaza i izlaza dovodi do sužavanja ili proširivanje granice efikasnosti. Neka od proširenja originalnog DEA modela u kojima su uključene procene vrednosti koja se mogu naći u literaturi su data sledećem delu teksta.

U primalnom CCR modelu težinski koeficijenti ne mogu imati manju vrednost od parametra ε čime se sprečava potpuno ignorisanje uticaja pojedinih ulaza i izlaza pri određivanju mere efikasnosti. Direktna restrikcija težina se sastoji od nametanja strožijih zahteva za težinske koeficijente umesto onih datih nejednačinama (3.9) i (3.10) u modelu M 3.2. Prema (Martić, 1999) do sada korišćene direktne restrikcije težina mogu se svrstati u sledeće 3 kategorije:

Potpuno ograničavanje težina

Ovaj tip restrikcija sprečava da pojedini ulazi i/ili izlazi budu previše naglašeni ili ignorisani u oceni efikasnosti. Dodatna ograničenja su sledećeg oblika:

$$\underline{v}_i \le v_i \le \overline{v}_i,\ i = 1,\ldots,m \tag{3.58}$$

$$\underline{u}_r \le u_r \le \overline{u}_r,\ r = 1,\ldots,s \tag{3.59}$$

Korisnik (ekspert) zadaje vrednosti za parametre (granice) $\underline{v}_i, \overline{v}_i$, $\underline{u}_r, \overline{u}_r$ i na taj način uvodi procenu vrednosti u DEA model imajući u vidu relativnu važnost ulaznih i izlaznih faktora. Vrednosti granica težinskih koeficijenata pojedinih ulaznih i izlaznih faktora potpuno su nezavisne. Osnovna poteškoća u primeni ove kategorije restrikcije težina leži u zadavanju vrednosti ovih granica. One mogu dovesti da DEA model nema dopustivo rešenje, jer uvođenje donje granice za težinu jednog ulaza ograničava gornju granicu težina svih ostalih ulaza. Pored toga, uvođenje ovog tipa ograničavanja težina može dovesti do različitih indeksa efikasnosti u zavisnosti da li je korišćen ulazno ili izlazno orijentisan CCR model (Podinovski & Athanassopoulos, 1998). Podinovski (1999) je analizirao efekte potpunog ograničavanja težina u DEA modelima. Pokazano je da rezultati modela sa ograničenjima na težine ne mere relativnu efikasnost posmatrane DMU, sa obzirom da izabrani set težina ne prikazuje posmatranu jedinicu u najboljem svetlu. To bi moglo dovesti do „sporednog efekata“ da se izabere pogrešan referentni skup za posmatranu DMU.

U cilju prevazilaženje pomenutih problema, za procenu granica pri potpunoj restrikciji težina mogu se koristiti sledeća 2 postupka:

1. dvofazni postupak u rešavanju DEA modela: U prvoj fazi treba rešiti DEA modele bez ikakvih ograničenja za težinske koeficijente. Da bi se odredile njihove granice koje će biti uključene u drugu fazu može se za određeni procenat odstupiti od ekstremnih vrednosti težinskih koeficijenata ili izračunati njihova srednja vrednost pa onda definisati odstupanja od nje.

2. na osnovu prosečnog ulaznog nivoa po jedinici izlaza. Ovaj postupak je razvijen za procenu efikasnosti jedinica koje koriste jedan ulaz za proizvodnju više izlaza ili onih koje imaju jedan izlaz i više ulaza. Metoda najmanjih kvadrata se primenjuje za procenu prosečnog ulaznog nivoa po jedinici izlaza (ili prosečnog izlaznog nivoa po jedinici ulaza). Na osnovu razumnog odstupanja od prosečnog nivoa mogu se definisati granice za težine.

Regioni sigurnosti -I tip

Ova kategorija restrikcija težina omogućuje da se zada relativan poredak između više ulaza ili više izlaza i uglavnom se koriste za implementaciju marginalnih stopa substitucije. Termin "*type I Assurance Regions*" predložen je u radu (Thompson, 1986), gde su primenjena sledeća ograničenja za težinske koeficijente:

$$k_i v_i + k_{i+1} v_{i+1} \leq v_{i+2} \tag{3.60}$$

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i+1}} \leq \beta_i \tag{3.61}$$

Prikazana ograničenja se odnose na težine za ulazne faktore. Analogno njima mogu biti formulisana ograničenja za težine izlaznih faktora. U literaturi se koristi i sledeća veza između težinskih koeficijenata ulaza 1 i 2:

$$c_2 v_1 - c_1 v_2 = 0 \tag{3.62}$$

Dodavanje ovakvog ograničenja je jednako kombinovanju prvog i drugog ulaza u jedan agregatni ulaz i ima smisla kada su oni izraženi u istoj mernoj jedinici.

Pri zadavanju granica k_l, α_l, β_l mora se voditi računa da su njihove vrednosti osetljive na jedinice mere ulaznih i izlaznih faktora. U praktičnim primenama za njihovo zadavanje uglavnom su korišćena mišljenja eksperata. Kada su za težinske koeficijente primenjena ograničenja data relacijama (3.60) i (3.61), DEA model će uvek imati dopustivo rešenje i postojaće bar jedna efikasna DMU. Bez obzira na orijentaciju modela kada se koristi ova kategorija restrikcije težina dobija se isti indeks efikasnosti.

Regioni sigurnosti -II tip

Ovaj tip restrikcije uspostavlja vezu između vrednosti težina pojedinih ulaza i težina pojedinih izlaza. Pod nazivom "*type II Assurance Regions*" predloženo je sledeće ograničenje za proširenje CCR modela:

$$\gamma_i v_i \geq u_r \tag{3.63}$$

U zavisnosti od zadate vrednosti za parametar γ_ℓ moguće je da DEA model nema dopustivo rešenje. Bez obzira na orijentaciju modela dobija se isti indeks efikasnosti.

Podešavanje posmatranih ulazno-izlaznih nivoa

Prema ovom pristupu vrednosna procena se uvodi u DEA tako što se podaci o ulazima i izlazima transformišu u "veštački" skup podataka koji se koristi za ocenu efikasnosti. Na taj način moguće je korišćenje i onih DEA programskih paketa koji na drugi način ne nude mogućnost restrikcija težina. Druga prednost je što je dozvoljeno korišćenje nula ili čak negativnih vrednosti kod stvarnih podataka o ulazima i izlazima. Nedostatak je što kada se dobiju rezultati podaci moraju biti ponovo transformisani u originalni oblik da bi se rezultati mogli interpretirati. Ovo može biti glomaznije nego direktna primena restrikcije težina na originalne podatke. U literaturi su poznata dva pristupa po kojima se vrši transformacija podataka o ulazima i izlazima da bi se simulirala restrikcija težina ovih ulaza i izlaza u osnovnom DEA modelu.

Prvi, "*cone-ratio*" pristup, obezbeđuje generisanje veštačkog skupa podataka tako da se dobije isti indeks efikasnosti koji daje CCR model proširen ograničenjima datim relacijom (3.63). Informaciju o ograničenju težinskih koeficijenata daju zatvoreni konveksni konusi:

$$\text{V}=\{\nu : D\nu \geq 0\ ,\ \nu \geq 0\}\ \text{- ulazni konusi,} \tag{3.64}$$

$$\text{U}=\{\mu : F\mu \geq 0\ , \mu \geq 0\}\ \text{- izlazni konus.} \tag{3.65}$$

Na osnovu elemenata matrica D i F izračunavaju se vrednosti elemenata matrica A i B na sledeći način:

$$\text{A}^T = (\text{D}^T \text{D})^{-1}\ \text{D}^T \tag{3.66}$$

$$\text{B}^T = (\text{F}^T \text{F})^{-1}\ \text{F}^T \tag{3.67}$$

Na primer, neka je rešen osnovni CCR model i neka su dobijene optimalne vrednosti težinskih koeficijenata za ulaz 1 i ulaz 2 jednake a_1 i a_2 za DMU_1 i b_1 i b_2 za DMU_2. Ako se želi nametnuti ograničenje $b_1 / b_2 \leq v_1 / v_2 \leq a_1 / a_2$ tada se može izračunati:

$$D = \begin{bmatrix} -b_2 & -b_1 \\ -a_2 & -b_1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Pomoću matrice A bi se izvršila transformacija polaznog skupa podataka za ulaz 1 i ulaz 2.

Pomoću elemenata ove dve matrice vrši se generisanje veštačkog skupa podataka za ulaze i izlaze. Pokazano je da sledeći model (M 3.10) daje isti indeks efikasnosti kao u slučaju korišćenja ograničenja za težinske koeficijente datih relacijom (3.63).

MODEL (M 3.10)

$$(Max)\ h_k = \sum_{r=1}^{s} g_r\ b_{rk} y_{rk} \tag{3.68}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ik} x_{ik} = 1 \tag{3.69}$$

$$\sum_{r=1}^{s} g_r b_{rj} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} x_{ij} \le 0, \quad j = 1, 2 \ldots, n \tag{3.70}$$

$$g_r \ge 0, \quad r = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.71}$$

$$w_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.72}$$

Ovaj pristup je vrlo često koristio Podinovski u svojim radovima (Podinovski & Athanassopoulos, 1998), (Podinovski, 1999) ili (Podinovski, 2007) .

Drugi pristup za podešavanje ulazno-izlaznih nivoa predložen u (Roll & Golany, 1993). Prema ovom pristupu uvode se redne relacije oblika $v_1 \ge v_2 \ge v_3 \ge \varepsilon$ (isto i za izlaze) između težinskih koeficijenata. Nedozvoljavajući težinama da imaju vrednost nula, dobijene vrednosti relativne efikasnosti su iste kao i one dobije transformacijom ulazno-izlaznih podataka u novi veštački skup podataka, sabiranjem odgovarajućih faktora. Golanijeve transformacije su zapravo specijalni slučaj transformacija konusnog racia. Na primer, ograničenja $v_1 \ge v_2 \ge v_3 \ge \varepsilon$ mogu biti izostavljena u DEA modelu zamenjujući x_{2j} sa $x_{2j} + x_{1j}$ i x_{3j} sa $x_{3j} + x_{2j} + x_{1j}$, za svako j , gde je x_{ij} nivo i-tog ulaza j-te jedinice o kojoj se odlučuje. Međutim, pokazano je da transformacije podataka koje je predložio Golani obezbeđuju odgovarajuće rešenje samo za stroge (znak > između težina), ali ne i za slabe redne relacije između težina usled toga što su one striktno pozitivne.

Više o mogućnostima ograničavanja težina i virtuelnih ulaza i izlaza, kao i originalna rešenja mogu se naći u (Martić, 1999) i (Sarrico & Dyson, 2004). U literaturi se takođe, mogu naći radovi vezani za promenu granice efikasnosti u cilju eliminacije slabe efikasnosti. U radu (Cook & Seiford, 2009) se navode dva osnovna pravca promene granice efikasnosti. Prvi pravac podrazumeva isključivanje slabo efikasne DMU iz proizvodnog skupa koji formira granicu efikasnosti, odnosno formiranje „najbljiže“ granice efikasnosti punih dimenzije koja se graniči sa osama prvog kvadranta i sledi princip Pareto efikasnosti. Drugi pravac podrazumeva uvođenje virtulene DMU koja proširuje postojeću granicu efikasnosti.

1.1.5. MODIFIKACIJE DEA MODELA SA OBZIROM NA STATUS VARIJABLI

Kako svaka oblast u kojoj je DEA našla primenu ima svoje specifičnosti, teorija je morala da pronađe način da prilagodi postojeće ili uvede nove modele koji će omogućiti dobijanje validnih rezultata. Modeli dati u ovom poglavlju se direktno naslanjaju na osnovne DEA modele i omogućuju:

- da neki od ulaza i/ili izlaza nisu pod kontrolom menadžmenta jedinice koja se ocenjuje,
- da neki od ulaza i/ili izlaza su kategorijske prirode ili dati kao ordinalni podaci.

DEA model sa nediskrecionim varijablama

Pri rešavanju realnih problema često se potrebno u analizu uključiti i varijable koje nisu pod direktnom kontrolom menadžmenta. Na primer, pri proceni efikasnosti banaka, fiksni troškovi koji se odnose na iznajmljivanje prostora se ne mogu proporcionalno smanjivati kao što je moguće smanjiti varijabilne troškove koji su vezani za zarade. Banker i Morey (Banker & Morey, 1986b) su modifikovali osnovni DEA model tako da se ne dozvoli redukcija nediskrecionih ulaza. U modelu M 3.10 skup ulaza (*I*) je podeljen na podskup diskrecionih *D* i skup nediskrecionih ulaza *ND* ($D \cup ND = I$). Ograničenje 3.27 koje se odnosi na vrednost virtulenog ulaza iz osnovnog DEA CCR modela M 3.5 je razbijeno na dva ograničenja 3.75 i 3.76 u modelu M 3.10. Ograničenje 3.75 se odnosi na diskrecione ulaze koji se mogu menjati, odgovara ograničenju 3.27 iz osnovnog modela. Za drugu grupu, nediskrecionih ulaza uvedeno je ograničenje 3.76, kojim se dozvoljava smanjenje ulaza x_{ik} posmatrane DMU$_k$ samo za vrednost dopunske promenljive $s_i^- \,(i \in ND)$ bez proporcionalnog smanjenja za iznos neefikasnosti kao što je slučaj za diskrecione varijable (ograničenje 3.75). Treba primetiti da se ove dopunske promenljive s_i^- $(i \in ND)$ ne pojavljuju u funkciji cilja što znači da se indeks efikasnosti izračunava samo na osnovu mogućih redukcija ulaza koji su pod kontrolom menadžmenta.

MODEL (M 3.11)

$$(\text{Min})\, Z_k - \varepsilon\Big(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i \in D} s_i^-\Big) \tag{3.73}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1,2,...,s \tag{3.74}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = Z_k \cdot x_{ik}, \quad i \in D \tag{3.75}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \quad i \in ND \tag{3.76}$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \; j = 1,2,...,n, \; r = 1,2,...,s, \; i = 1,2,...,m, \; Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.77}$$

Prema ovom modelu za neefikasnu DMU_k ciljne vrednosti ulaza koji se mogu kontrolisati dobijaju se primenom relacije (3.75), a za izlaze pomoću relacije (3.74). Na sličan način kao za izlaze mogu se dobiti i ciljane vrednosti za nediskrecione ulaze pomoću relacije (3.76). Dakle, ovi ciljevi dobijaju se prvo zajedničkom redukcijom svih ulaza koji su pod kontrolom jedinice na najmanju moguću proporciju njenih početnih nivoa, a zatim daljim pojedinačnim smanjivanjem ovih ulaza i pojedinačnim povećavanjem izlaza. Ciljni nivoi za ulaze koji nisu pod kontrolom jedinice koja se ocenjuje pokazuju koliko se spolja utvrđeni njihovi nivoi mogu smanjiti, a da se ne zahteva promena ostalih ciljnih nivoa.

Primenom teoreme dualnosti linearnih modela može se kreirati primalni DEA model sa nediskrecionim varijablama (Cook & Seiford, 2009). Takođe, analogno modelu sa nediskrecionim ulazima može se formirati model sa nediskrecionim izlazima.

DEA model sa egzogeno fiksiranim ulazima i izlazima

Menadžeri se često u praksi suočavaju sa situacijom da neke od ulaza ili izlaza ne mogu kontrolisati (reklame, konkurencija,...) sa obzirom da su to varijable čije vrednosti zavise od uslova u okruženju. Takvi ulazi i izlazi koji se ne mogu kontrolisati nazivaju se egzogeno fiksiranim. Da bi se procenila efikasnost ovakvih jedinica treba proširiti CCR i BCC modele tako da se odredi minimalni nivo ulaza koji se mogu kontrolisati koji je potreban da se proizvede postojeći nivo izlaza, a da se pri tome egzogeno fiksirani ulazi održe na tekućem nivou.

Ovo proširenje predložili su Banker i Morej (1986a) ocenjujući efikasnost 60 restorana brze hrane u okviru lanca restorana. U njihovoj analizi svaki od restorana koristio je 6 vrsta ulaza za proizvodnju 3 vrste izlaza. Dva ulaza su bili troškovi nabavke i plate radnika i oni su svakako pod kontrolom menadžmenta restorana. Sledeća dva ulaza bili su starost lokala i troškovi reklame (pretpostavljeno je da se odluke o reklamiranju donose na nivou lanca) za koje je smatrano da se ne mogu kontrolisati. Poslednja dva ulaza su bila demografskog karaktera i ukazivala su da li je lokal u urbanoj ili ruralnoj oblasti i da li je moguće posluživanje gosta u restoranu ili nije. Ove karakteristike koje se ne mogu kontrolisati tretirane su kao binarne vrednosti.

U ovom modelu sa I_C je označen podskup ulaza koji se mogu kontrolisati, a sa I_f podskup egzogeno fiksiranih ulaza ($I_c \cup I_f = I$). Analogno, skup izlaza O je podeljen na pod skup izlaza koji se mogu kontrolisati označen sa O_C i podskup izlaza koji se ne mogu kontrolisati O_f ($O_c \cup O_f = O$). Modifikovani dualni CCR model glasi:

MODEL (M 3.12)

$$(\text{Min})\, Z_k - \varepsilon\Big(\sum_{r \in O_c}^{s} s_r^+ + \sum_{i \in I_c} s_i^- \Big) \tag{3.78}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r \in O_c \tag{3.79}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} = y_{rk}, \qquad r \in O_f \tag{3.80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = Z_k \cdot x_{ik}, \qquad i \in I_c \tag{3.81}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \qquad i \in I_f \tag{3.82}$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0;\ j = 1,2,...,n,\ r = 1,2,...,s,\ i = 1,2,...,m,\ Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.83}$$

Da bi neefikasna jedinica postala efikasna dopušta se da proporcionalno smanji vrednosti samo za one ulaze koji se mogu kontrolisati (ograničenja 3.79 i 3.81). Treba primetiti da se ove dopunske promenljive ne pojavljuju u funkciji cilja što znači da se indeks efikasnosti izračunava samo na osnovu mogućih redukcija ulaza koji su pod kontrolom i mogućih povećanja izlaznih nivoa.

Ciljane vrednosti kontrolisanih ulaza i izlaza za neefikasnu DMU$_k$ se dobijaju primenom relacije (3.79) i (3.81). Egzogeno fiksirani ulazi i izlazi se ne mogu menjati (ograničenja 3.80 i 3.82). Iz ovih ograničenja sledi da se vrednosti $\lambda_j,\ j = 1,2,...,n$ se biraju tako da vrednosti virtulenih egzogeno fiksiranih ulaza $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij},\ i \in I_f$ i izlaza $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj}, r \in O_f$ ostanu iste kao vrednosti ulaza odnsno izlaza DMU$_{k,}$ a da se pri tome maksimizira njena efikasnost.

DEA model sa kategorijskim ulazima ili izlazima

U do sada prikazanim DEA modelima pretpostavlja se da su vrednosti za ulaze i izlaze kontinualne. Dualni osnovni DEA modeli procenu efikasnosti izvode poređenjem jedinice koja se ocenjuje sa hipotetičkom kompozitnom jedinicom koja se pokušava konstruisati izvan postojećih jedinica. Ona je linearna (CCR) ili konveksna (BCC) kombinacija referentnih jedinica jedinice koja se ocenjuje.

Međutim, u realnim problemima često neki ulazi i izlazi mogu izražavati neku karakteristiku i uzimati samo diskretne vrednosti iz određenog skupa vrednosti. U tim situacijama, pri formiranju hipotetičke kompozitne jedinice mogu nastupiti određene poteškoće. Na primer, pri proceni univerzitetskih istraživačkih jedinica neki od izlaza može biti procenjen samo na ordinalnoj skali (dobar, bolji, odličan). U ovakvim slučajevima ovaj izlaz kompozitne jedinice, formiran kao linearna ili konveksna kombinacija odgovarajućih ordinalnih vrednosti referentnih jedinica teško da bi imao smisla, jer bi se ordinalne vrednosti koristile kao da su merene na intervalnoj skali. Isto tako ako neki ulaz ima vrednost 0 kada jedinica nema neku osobinu ili sredstvo, a vrednost 1 ako ima, onda bi taj ulaz kod kompozitne jedinice mogao imati vrednost 0.5 što je besmisleno.

Da bi prevazišli ove probleme Banker i Morej (1986b) su modifikovali originalni dualni DEA model da bi obezbedili da se referentna grupa jedinice koja se procenjuje može sastojati samo od onih jedinica koje imaju iste ili lošije vrednosti za kategorijske varijable od nje same. Dakle, jedinica koja se ocenjuje upoređuje se samo sa onim jedinicama koje posluju u sličnim ili lošijim uslovima od onih u kojima ona deluje. Ako bude procenjena kao neefikasna, menadžment ove jedinice ne može neefikasnost pravdati lošim uslovima poslovanja. Razmatran je slučaj kada postoji jedan ulaz koji je kategorijske prirode i nije pod kontrolom jedinice koja se ocenjuje (u praksi su ulazi kategorijske prirode uglavnom egzogeno fiksirani).

Banker i Morej su ocenjivali efikasnost 69 apoteka na osnovu podataka za 4 ulaza i 2 izlaza. Kao ulazi razmatrani su plate radnika, operativni troškovi, prosečna veličina zaliha i veličina tržišta izražena kao broj stanovnika u gradu u kome se apoteka nalazi. Jasno je da je četvrti ulaz uticaj okruženja i da nije pod kontrolom posmatranih jedinica. Vrednosti za ovaj ulaz bile su od 500 stanovnika do 220 000. Izlazi koji su uzeti u obzir su broj recepata i vrednost prodaje. Primenom modela M8 dobijeno je da 28 apoteka posluje efikasno, a da je najniži indeks efikasnosti 0.403. Analizom dobijenih rezultata primećeno je da pojedine apoteke imaju nizak indeks efikasnosti, iako su imale solidnu prodaju u odnosu na veličinu tržišta. Kombinacijom efikasnih jedinica iz gradova sa velikim brojem stanovnika sa onim sa malom veličinom tržišta uglavnom je bilo moguće konstruisati kompozitnu jedinicu koja je izrazito dominantna nad jedinicom koja se ocenjuje. Da bi rešili ovaj problem autori su veličinu tržišta proglasili za kategorijsku promenljivu koja može uzeti vrednost od 1 do 11 (broj stanovnika svakog od gradova "upada" u jedan od mogućih intervala).

Banker i Morej su uveli *L* novih binarnih promenljivih d^{1}_{k} za svaku DMU, gde je *L*+1 ukupan broj vrednosti koje jedan ulaz kategorijske prirode može uzeti (u opisanom primeru *L* je 10). U zavisnosti od kategorije kojoj vrednost tog ulaza pripada, za jedinicu koja se ocenjuje promenljive d_k imaju sledeće vrednosti:

$d^{\ell}_{k} = 0$, $\ell = 1,2,\dots L$; *ako* DMU_k *ima najnižu vrednost (kategorija 1),*

$d^{\ell}_{k} = 1$, $d^{l}_{k} = 0$, $\ell = 2,3,\dots L$; *ako* DMU_k *pripada kategoriji 2.*

$d^{\ell}_{k} = 1$, $d^{2}_{k} = 1$, $d^{l}_{k} = 0$, $\ell = 3,4,\dots L$; *ako* DMU_k *pripada kategoriji 3.*

. . .

$d^{\ell}_{k} = 1$, $\ell = 1,2,\dots L$; *ako* DMU_k *pripada kategoriji* L+*1.*

Pod pretpostavkom da je *m* - ti ulaz kategorijske prirode onda se procena *k*-te DMU može izvršiti primenom sledećeg modela:

MODEL (M 3.13)

$$(\text{Min})\ Z_k - \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} s_r^{+} + \sum_{i=1}^{m} s_i^{-}\right) \tag{3.84}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^{+} = y_{rk}, \qquad r = 1,2,\dots,s \tag{3.85}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^{-} = Z_k \cdot x_{ik}, \qquad i = 1,\dots,m-1 \tag{3.86}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j d_j^{l} \le d_k^{l}, \quad l = 1,2,\dots L \tag{3.87}$$

$$\lambda_j, s_r^{+}, s_i^{-} \ge 0;\ j = 1,2,\dots,n,\ r = 1,2,\dots,s,\ i = 1,2,\dots,m,\ Z_k \text{-neograničeno} \tag{3.88}$$

$$d_j^{l} = \{0,1\} \qquad j = 1,2,\dots,n,\ \ l = 1,2\dots L \tag{3.89}$$

U modelu (M 3.13) je dodato novih *L* ograničenja datih relacijom (3.89). Ova ograničenja obezbeđuju da se referentna grupa za DMU_k sastoji samo od onih jedinica koje imaju *m*-ti ulaz u istoj ili nižoj kategoriji od nje same. Samo one dualne težine λ_i koje se odnose na jedinice iz "iste" ili "nižih" kategorija mogu dobiti pozitivnu vrednost.

Do sada je razmatran problem kada je jedan od ulaza kategorijske prirode i kada je on egzogeno fiksiran. Izloženi model se može lako prilagoditi situaciji kada je više ulaza kategorijske prirode i egzogeno fiksirano. Međutim teškoće se javljaju kada je neki od ulaza kategorijske prirode i pod kontrolom jedinica koje se ocenjuju. Banker i Morej su za taj slučaj formulisali matematički model mešovitog celobrojnog linearnog programiranja. Pokazano je da je mnogo jednostavniji pristup modifikovati postupak rešavanja osnovnih DEA modela. Predlaže se da se sve DMU koje se ocenjuju podele u L klasa (D_1, D_2, … D_L) i da se prvo uključe u model samo jedinice iz klase 1 i da se njihova efikasnost oceni, zatim da se ocene jedinice iz klase 2 uključujući u analizu jedinice iz prve 2 klase, itd. Analogno izloženom modelu (M 3.13) dobija se model za procenu efikasnosti jedinica kada je jedan ili više izlaza kategorijske prirode.

DEA model sa ordinalnim ulazima ili izlazima

DEA analiza je najčešće bazirana na skupu ulaza i izlaza sa kvantitativnim vrednostima. Međutim, u nekim specijalnim slučajevima u analizu se uključuju i kvalitativne varijabile na osnovu kojih se mogu izvršiti rangiranje jedinca o kojima se odlučuje, dok je njihova kvantifikacija komplikovana. U radu (Cook & Seiford, 2009) se navodi da se u literaturi mogu naći pristupi koji se bave rang-ordinalnim i nepreciznim podacima na sličan način. Ovakvi podaci se inkorporiraju u DEA model tako što se, na primer za izlaz r, pretpostavi da DMU_k može biti rangirana na neku od L poziciju ($L \leq n$). Dodeljeni rang δ se može posmatrati kao vrednost izlaza ili mu se može dodeliti odgovarajuća vrednost $y_r(\delta)$.

1.1.6. DEA MODELI ZA RANGIRANJE

Jedan od nedostatka prikazanih DEA modela je što se svim efikasnim jedinicama dodeljuje ista vrednost indeksa efikasnosti. Ako je DEA mera radijalna, indeks efikasnosti je jednak 1, dok kod neradijalnih mera indeks je jednak 0 i prema nivou efikasnosti nije moguće napraviti redosled efikasnih DMU. Uzimajući u obzir činjenicu da je u uslovima ubrzanog razvoja i sve jače konkurencije često potrebno porediti i efikasne organizacije međusobno, razvijeno je nekoliko pristupa za potpuno rangiranje svih jedinica.

Pregled analitičkih pristupa za rangiranje zasnovan na DEA modelima je dat u radovima (Adler, Friedman, & Sinuan, 2002) i (Jablonski, 2011). Ovi pristupi su razvijeni kao modifikacije DEA modela prikazanih u prethodnim poglavljima ili povezivanjem sa drugim, najčešće višekriterijumskim, metodama. U poglavlju 3.1.4 je napomenuto da se ograničavanjem težina, ograničava i skup dopustivih rešenja DEA modela, odnosno da se poboljšava diskriminacija jedinica koje se procenjuju. Međutim, potpuno rangiranje može zahtevati da se dopustiva oblast veoma suzi, što značajno ograničava fleksibilnost DEA metode u izboru težina za ulaze i izlaze.

Pored toga, menadžment ne može uvek realistično da definiše region sigurnosti što otežava uvođenje dopunskih ograničenja u DEA modele. Zbog toga su razvijeni i drugi pristupi za rangiranje. Neki od njih su prikazani u ovom poglavlju.

Rangiranje pomoću matrice unakrsne efikasnosti

Način na koji se izračunava efikasnost i unakrsna efikasnost i njihovo značenje su detaljno prikazani u radu (Doyle & Green, 1994). Matrica unakrsne efikasnosti je matrica dimenzije n x n (n - broj DMU) u kojoj vrednost na polju (i,j) predstavlja relativnu efikasnost jedinice j sa optimalnim vrednostima težinskih koeficijenata za ciljnu jedinicu i. Vrednosti na glavnoj dijagonali su predhodno dobijeni indeksi efikasnosti DMUk (k=1,…,n). Može se primetiti da DMU1 ima relativnu efikasnost 1 sa njenim sopstvenim težinama (efikasna je), relativnu efikasnost 0.8 sa težinama optimalnim za jedinicu 2, 0.92 sa optimalnim vrednostima težinskih koeficijenta jedinice 3, itd. Za svaku kolonu (DMU) može se izračunati srednjra vrednost efikasnosti koja pokazuje kako je ta jedinica procenjena od strane preostalih jedinica. Na osnovu ovih srednjih vrednosti moguće je rangirati posmatrane DMU. Relativno efikasna jedinica koja ima najveću srednju vrednost efikasnosti je primer dobre operativne prakse za druge jedinice jer je i sa različitim kombinacijama vrednosti težinskih koeficijenata uvek dobro procenjena. Jedinice koje imaju malu srednju vrednost efikasnosti su dobro procenjene samo sa vrednostima težinskih koeficijenata koje njima najviše odgovaraju i njihove težinske strukture se razlikuju u odnosu na većinu preostalih jedinica. Za njihovu ocenu efikasnosti se ne može reći da je stabilna i one ne mogu biti primer dobre operativne prakse.

Dalja razmatranja su pokazala da rešenje nije uvek jedinstveno sa obzirom da je moguće postojanje alternativne šeme težinskih koeficijenata koja daje iste vrednosti indeksa efikasnosti. Za prevazilaženje ovog problema može se koristiti ciljno programiranje za izračunavanje indeksa efikasnosti (Adler, Friedman, & Sinuan, 2002). Takođe, pored prosečne vrednosti mogu se koristiti i druge statističke mere, kao što su medijana, varijansa ili odstupanje od prosečne efikasnosti svih jedinica sa kojima se DMUk poredi (tzv. *„maverick index“*).

DEA modeli za procenu unakrsne efikasnosti su detaljno prikazani u poglavlju 5., i korišćeni su kao osnova za formiranje modela za alokaciju resursa.

DEA modeli za ocenu superefikasnosti

Procena super efikasnosti pretpostavlja modifikaciju DEA modela tako da se efikasnim jedinicama može dodeliti indeks veći od 1 i da se na taj način omogući diskriminacija među njima. Anderesen i Petersen (1993) su predložili modifikovani DEA model kojim je omogućeno rangiranje efikasnih jedinica tj. ocena superefikasnosti. Modifikacija primalnog modela se sastoji u tome što se iz skupa ograničenja zadatih relacijom (3.8) u primalnom CCR DEA modelu (M 3.2) izostavlja ono ograničenje koje odgovara DMU$_k$ kao što je prikazano u ograničenju (3.92) modela M 3.14.

MODEL (M 3.14)

$$\text{(Max) } h_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \tag{3.90}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \tag{3. 91}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1,\ 2 \ldots, n, j \neq k \tag{3. 92}$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \ldots, s \tag{3.93}$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.94}$$

U dualnom CCR modelu pri definisanju ulazno-izlaznog miksa kompozitne jedinice ne uzima se u obzir DMU$_k$ čija se efikasnost ocenjuje. Na taj način se efikasna jedinica upoređuje sa novom granicom efikasnosti koja se formira ne uzimajući ovu jedinicu u obzir. Ograničenja zadata relacijama (3.12) i (3.13) u modelu M 3.3 se modifikuju i izgledaju kao ograničenja (3.96) i (3.97) u medelu 3.15.

MODEL (M 3.15)

$$\text{(Min) } Z_k - \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^- \right) \tag{3.95}$$

p.o.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j x_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1, 2, \ldots s \tag{3.96}$$

$$Z_k x_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m \tag{3.97}$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \ j = 1, 2, \ldots, n, \ r = 1, 2, \ldots, s, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ Z_k \text{ -neograničeno} \tag{3.98}$$

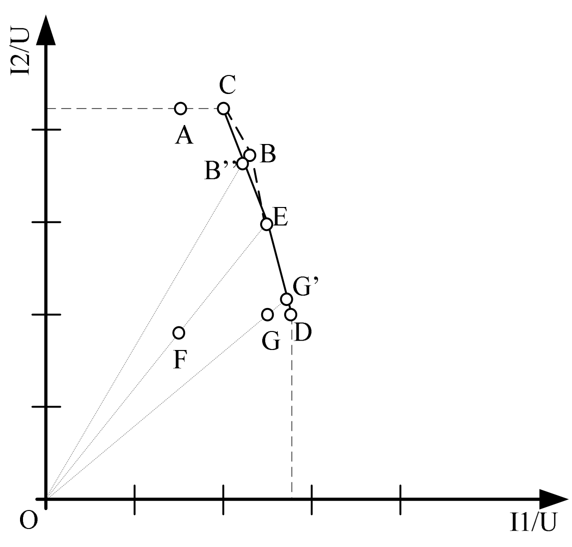
Ovako modifikovani ulazno-orijentisani DEA modeli omogućavaju da se efikasne jedinice rangiraju slično kao neefikasne na osnovu indeksa efikasnosti koji je veći ili jednak 1. Indeks efikasnosti koji daje ovaj model predstavlja maksimalno moguće proporcionalno povećanje ulaznih nivoa pri kom jedinica ostaje efikasna. Do sada su izložene modifikacije koje su Andersen i Petersen predložili za ulazno orijentisane CCR modele. Analogne modifikacije važe i za izlazno orijentisane modele. Posledice isključivanja jedinice čija se efikasnost ocenjuje pri definisanju kompozitne jedinice ilustrovane su u sledećem primeru.

Primer 5.

U tabeli 4. su prikazani rezultati koji se dobijaju primenom ulazno-orijentisanog CCR modela i rezultati dobijeni primenom Andersen-Petersenovog modela pri čemu su korišćeni podaci iz primera 2.

Tabela 1.6. *Rezultati rangiranje efikasnih jedinica tj. Merenje superefikasnosti*

DMU	U	I1	I2	Ulazno orijentisani CCR model			Ulazno orijentisani AP model	
				U/I1	U/I2	h_k	$h_k^{'}$	Rang
A	50	75	210	4.20	2.80	1.00	1.00	5
B	50	110	190	3.80	1.73	**1.00**	**1.01**	**4**
C	60	120	252	4.20	2.10	**1.00**	**1.06**	**2**
D	100	275	200	2.00	0.73	**1.00**	**1.10**	**1**
E	40	100	120	3.00	1.20	**1.00**	**1.02**	**3**
F	50	75	90	1.80	1.20	0.60	0.60	7
G	90	225	180	2.00	0.80	0.92	0.92	6



Slika 1.8. *Rangiranje efikasnih jedinica (merenje superefikasnosti)*

Ako se uporede rezultati dobijeni primenom osnovnog CCR DEA modela i modifikovanog DEA modela za rangiranje može se zaključiti da su sve efikasne jedinice i dalje efikasne, a neefikasne su i dalje neefikasne sa istom vrednošću indeksa efikasnosti $h_k = h_k^{'}$. Ako se dobijeni rezultati prikažu grafički (Slika 3.8.) vidi se da je granica efikasnosti ista kao na Slici 3.5. Razlika se javlja samo kod vrednosti indeksa za efikasne jedinice ($h_k^{'} \geq 1$) koji je prema osnovnom modelu uvek bio jednak 1. Način na koji se dobija novi indeks efikasnosti biće objašnjen na primeru efikasne DMU B.

Ako se tačka B isključi iz analize pri određivanju h_B onda granicu efikasnosti čine jedinice D, E i C umesto D, E, B i C. Na novoj granici efikasnosti uočava se hipotetička jedinica B'' koja se koristi za izračunavanje indeksa efikasnosti tačke B korišćenjem iste relacije kao za neefikasne jedinice $h_B = \mathrm{OB}/\mathrm{OB}''$. Pošto je radijalno rastojanje tačke B'' od koordinatnog početka veće od radijalnog rastojanja tačke B od koordinantnog početka jasno je da će indeks efikasnosti biti veći od 1. Analogna analiza se može izvršiti za sve efikasne jedinice i može se utvrditi da će njihov indeks efikasnosti uvek biti veći ili jednak 1. Vrednosti indeksa efikasnosti su iskorišćene za rangiranje jedinica pa se može primetiti da je D najbolje, a F najlošije rangirana jedinica. Rangiranje se vrši po opadajućem redosledu vrednosti indeksa efikasnosti. DMU D bi mogla da smanji izlaze za 10% a da i dalje ostane efikasna. Indeks efikasnosti bi u tom slučaju bio jednak 1. Na isti način se može vršiti rangiranje pomoću izlazno-orijentisanog modela gde će sve efikasne jedinice imati indeks efikasnosti manji ili jednak jedan i najbolje će biti rangirana jedinica sa najmanjom vrednošću h_k ili Z_k. Ova vrednost bi pokazivala za koliko procentualno DMU$_k$ može da smanji izlaze ili poveća ulaze, a da i dalje ostane efikasna.

Međutim, dešava se da model za procenu superefikasnosti nema dopustivo rešenje. Ovakva situacija se može javiti, kao posledica lošeg skaliranja, kada se pretpostavi varijabilni prinos na obim. Jedno od rešenja ovog problema je predložio Čen (Chen, 2004). Sugeriše se rešavanje i ulazno i izlazno orijentisanog VRS DEA modela za ocenu superefikasnosti. Međutim i kod ovog pristupa se javlja problem ako je rešenje nedopustivo u oba slučaja. Drugo rešenje, je predloženo u radu (Cook, Liang, Zha, & Zhu, 2008), podrazumeva da je cilj pronaći minimalne neophodne promene u vrednostima ulaza i izlaza istovremeno (minimalna pomeranja DMU) da bi se dostigla granica efikasnosti.

Jedan od pristupa za ocenu superefikasnosti zasnovan na modelima M 3.14 i M 3.15 (Wang, Chin, & Yang, 2007) uvodi koncept optimističke i pesimističke efikasnosti. Optimistička efikasnost se određuje pomoći standardnih DEA modela, a superefikansost pomoću modela M 3.14 ili M 3.15. Pesimistička efikasnost se računa tako što se u funkciji cilja (3.90) primalnog modela M 3.14 minimizira virtuelni izlaz i formira odgovarajući dualni model, dok bi se kod izlazno orijentisanog modela maksimizirao virtuelni ulaz. Konačna ocena efikasnosti se dobija kao geometrijska sredina ove dve ocene.

Sa druge strane, Banker i Čeng (Banker & Chang, 2006) su dokazali da se Andersen-Petersenov model može uspešno koristiti za otkrivanje nestandardnih opservacija (*outlier*), iako nije uvek pogodan za rangiranje. Praksa je da se iz analize isključuju opservacije čiji je indeks efikasnosti veći od 3 kod ulazno orijentisanih modela pošto se na taj način unosi „šum" u analizu i dovode do toga da ne postoji dopustivo rešenje ako se pretpostavi varijabilni prinos na obim.

Na osnovu SBM modela M 3.7 je formiran SBM model za merenje superefikasnosti (Tone, 2002). Osnovna ideja je ista slična kao kod Andersen-Petersenovog DEA modela (M 3.15). Jedinica koja se procenjuje se isključuje iz proizvodnog skupa koji formira granicu efikasnosti. Posle ovog isključivanja traži se jedinica DMU* sa ulazima $x_i^*\,(x_i^* \geq x_{ik}, i = 1,\ldots,m)$ i izlazima $y_r^*\,(y_r^* \leq y_{rk}, r = 1,\ldots,s)$ koja će biti SBM efikasna odnosno imaće indeks efikasnosti 1 (model M 3.16).

MODEL (M 3.16)

$$(\min)\,\rho = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^* / x_{ik}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} y_r^* / y_{rk}} \tag{3.99}$$

p.o

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1,\ldots,m \tag{3.100}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} y_{rj}\lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1,\ldots,s \tag{3.101}$$

$$x_i^* \geq x_{ik} \quad i = 1,\ldots,m \tag{3.102}$$

$$y_r^* \leq y_{rk} \quad r = 1,\ldots,s \tag{3.103}$$

$$\lambda_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n,\ s_i^- \geq 0, i = 1,\ldots,m,\ s_r^+ \geq 0, r = 1,\ldots,s \tag{3.104}$$

Prikazani model daje indeks efikasnosti veći ili jednak od 1, simultano uzimajući u obzir vrednosti ulaza i izlaza i njihovo rastojanje od referentne tačke na granici efikasnosti. Brojilac u funkciji cilja (3.99) pokazuje stopu mogućeg prosečnog povećanja svih ulaza i govori o tome za koliko je moguće povećanje svakog od ulaza $(x_i^* - x_{ik}, i = 1,\ldots,m)$ pojedinačno, a da superefikasna jedinica DMU$_k$ i dalje ostane efikasna. Sa druge strane, imenilac u funkciji cilja pokazuje stopu mogućeg prosečnog smanjena svih izlaza i govori o tome za koliko je moguće smanjenje svakog od izlaza $(y_r^* - y_{rk}, r = 1,\ldots,s)$ pojedinačno, a da superefikasna jedinica DMU$_k$

i dalje ostane efikasna. Problem kod ovakvog načina ocene superefikasnosti je što će svakoj neefikasnoj DMU biti dodeljen indeks efikasnosti jednak 1, što onemogućava njihovu diskriminiaciju.

Ostali pristupi rangiranju

Neki od pristupi rangiranju podrazumevaju korišćenje uzornih jedinica za rangiranje kao što je navedeno u radu (Adler, Friedman, & Sinuan, 2002). Efikasne jedinice se rangiraju prema broju pojavljivanja u skupu referentnih jedinica, odnosno prema tome koliko puta su bile uzor (*benchmark*) nekoj neefikasnoj DMU. Drugi pristup pretpostvlja uvođenje fiktivne idealne DMU* čije će vrednosti ulaza biti minimalne $x_i^* = \min_j(x_{ij}), i = 1,\dots,m$, a vrednosti izlaza maksimalne $y_r^* = \min_j(y_{rj}), r = 1,\dots,s$ u odnosu na sve ostale DMU u posmatranom skupu. Prema tome, DMU* ima bolje performanse od svih ostalih jedinica u posmatranom skupu, tako da će indeks efikasnosti svim realnih DMU biti manji od 1, čime je omogućeno njihovo rangiranje. Ovaj pristup je problematičan kada se uvede varijabilni prinos na obim, pošto se može desiti da su neke DMU neuporedive sa DMU* prema obimu poslovanja i biće za efikasne, a rangiranje onemogućeno.

Sličan pristup sa uvođenjem novih agregiranih jedinica je primenjen u radu (Lotfi, Noora, Jahanshahloo, & Reshadi, 2011). Uvodi se n+1 agregirana DMU. Jedna DMU* se formira tako što se za vrednost ulaza/izlaza uzme zbir ulaza/izlaza svih jedinica u posmatranom skupu ($x_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $y_r^* = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}$, $r = 1,\dots,s$). Ostale agregirane jedinice DMU$_k^*$ se formiraju tako što se za vrednost ulaza/izlaza uzme zbir ulaza/izlaza svih DMU u posmatranom skupu iz koga je isključena DMU$_k$ ($x_{ik}^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} x_{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $y_r^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} y_{rj}$, $r = 1,\dots,s$). Efikasnost DMU$_k$ (e_k) se računa kao razlika efikasnosti agregirane jedinice DMU* (e*) i efikasnosti agregirane jedinice DMU$_k^*$ (e_k*) koje se dobijaju primenom odnovnih DEA modela. Efikasnost e_k= e*- e_k* pokazuje koliki uticaj na generičku efikasnost ima isključivanje iz proizvodnog skupa DMU$_k$ koja se procenjuje. Ona DMU koja ima najveći uticaj imaće i najveći vrednosti indeksa e_k i biće rangirana na prvo mesto.

1.1.7. DEA MODELI ZA PRAĆENJE PROMENA EFIKASNOSTI I PRODUKTIVNOSTI

Primena do sada prikazanih DEA modela se najčešće svodi na ocenu statičke efikasnosti. Međutim, rezultati dobijeni primenom DEA modela za procenu performansi entiteta na osnovu vrednosti ulaza i izlaza za ceo vremenski interval često mogu navesti na stranputicu posto se gubi vremenska dimenzija. Da bi se u analizu uključila dinamička komponenta razvijena je takozvana *Window* DEA analiza. Pored toga, za analizu sveukupnih performansi sistema koriste se i Malmkvistovi indeksi za ocenu produktivnosti koji istovremeno pokazuju promenu tehničke efikasnosti i promene granične tehnologije između dva vremenska intervala.

Window DEA analiza

Naziv metode asocira da se analiza vrši pomoću *prozora*. Odnosno, ako je potrebno odrediti performanse jedinica za nekoliko vremenskih perioda, a istovremeno i pratiti njihovu dinamiku, na početku se definiše dužina i broj *prozora* u okviru kojih se preklapaju vremenski periodi. Može se reći da je *Window* analiza zasnovana na principu pokretnih sredina i da je vrlo korisna pri određivanju trendova performansi entiteta (Paradi, Asmild, Aggarwall, & Schaffnit, 2003). Svaka jedinica se u različitom vremenskom periodu tretira kao različita DMU. Prema tome, performanse posmatrane DMU se porede sa njenim performansama u ostalim vremenskim periodima i sa performansama svih ostalih jedinica obuhvaćenih jednim *prozorom.*

Window analiza se sastoji od serije analiza sa vremenski zavisnim jedinicama o kojima se odlučuje koje se menjaju za svaku analizu da bi imitirale pristup pokretnih sredina (Kovačić, 1997). Formalno, posmatra se *n* DMU ($j=1,\ldots,n$) u P vremenskih intervala ($t=1,\ldots,P$) i sve koriste *s* ulaza za proizvodnju *m* izlaza. Znači posmatrani skup se sastoji od $n\times P$ entiteta i jedan entitet *j* u periodu *t*, DMU_j^t ima *s*-dimenzioni ulazni i *m*-dimenzioni izlazni vektor (x_j^t i y_j^t). Prozor koji počinje u trenutku *l*, $1\le l\le P$ i ima dužinu *w*, $1\le w\le P-l$, se označava sa l_w i sastoji se od $n\times w$ observacija.

Matrica ulaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$X_{l_w}=(x_1^l,x_2^l,\ldots,x_n^l,x_1^{l+1},x_2^{l+1},\ldots,x_n^{l+1},x_1^{l+w},x_2^{l+w},\ldots,x_n^{l+w}),$$

a matrica izlaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$Y_{l_w}=(y_1^l,y_2^l,\ldots,y_n^l,y_1^{l+1},y_2^{l+1},\ldots,y_n^{l+1},y_1^{l+w},y_2^{l+w},\ldots,y_n^{l+w}),$$

Na osnovu prethodnih pretpostavki može se definisati ulazno-orijentisani DEA *window* problem:

MODEL (M 3.17)

$$(\text{Min})\, Z_{kl_w}^t \qquad (3.105)$$

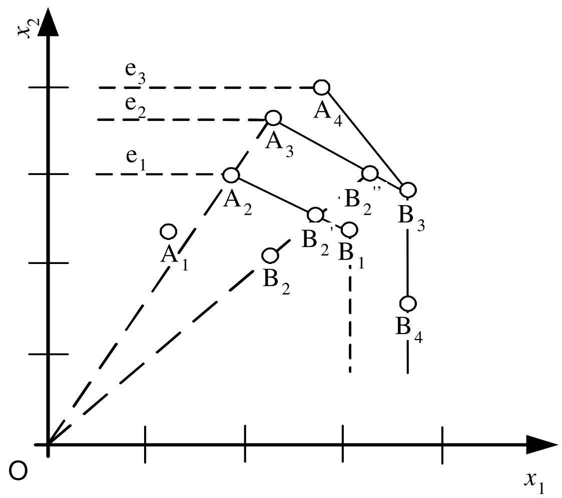
p.o.

$$Y_{l_w}\lambda \geq y^t_{kl_w}, \tag{3.106}$$

$$Z^t_{k\,l_w} \cdot X^t_{kl_w} - X_{l_w}\lambda \geq 0 \tag{3.107}$$

$$\lambda_s \geq 0;\; s = 1,2,...,n \times w \tag{3.108}$$

Slično kao kod osnovnih DEA modela, moguće je kreirati DEA *window* model izlazne orijentacije.



Slika 1.9. *Ilustracija DEA window analize*

Na Slici 3.8. je prikazan način formiranja granice efikasnosti kod izlazno-orijentisanog *window* DEA modela. U prikazanom primeru procenjuju se jedinice A i B ($n = 2$) u četiri vremenska perioda, a dužina prozora iznosi dva vremenska intervala ($w = 2$). Broj jedinica koje se procenjuju u svakom prozoru iznose $n \times w = 4$. Prema tome u prvom prozoru se procenjuju DMU A_1, A_2, B_1 i B_2, u drugom A_2, A_3, B_2 i B_3 i u trećem A_3, A_4, B_3 i B_4. Granicu efikasnosti u prvom prozoru čine DMU B_1 i A_2, a DMU B_2' predstavlja referentnu jedinicu za B_2, dok u drugom prozoru granicu efikasnosti čine tačke B_3 i A_3, dok je tačka B_2'' referentna jedinica za B_2, a A_3 referentna tačka za neefikasnu jedinicu A_1. Može se primetiti da je jedinica A bila neefikasna u prvom, a efikasna u drugom vremenskom intervalu, pa ponovo efikasna u trećem i četvrtom periodu. Na isti način se može pratiti trend efikasnosti jedinice B i svih DMU u posmatranom skupu.

Malmkvistovi DEA indeksi i merenje ukupne produktivnosti

Koncept produktivnosti postoji dugi niz godina. Klasičan način merenja produktivnosti podrazumeva odnos izlaza i ulaza. To znači da se produktivnost može tumačiti kao efikasnost korišćenja resursa kao što su rad, kapital, materijal i energija. Izlazi mogu biti proizvodi ili usluge.

Merenje produktivnosti se obično vrši sa dva aspekta, uzimajući u obzir nivo i trend produktivnosti. Racio produktivnosti predstavlja njen nivo u datom trenutku, izražen odnosom proizvedenog izlaza i kombinacije iskorišćenih ulaza. Mere produktivnosti se mogu podeliti u sledeće grupe:

Parcijalna produktivnost (PP). Ovo je pojedinačna mera koja uzima u obzir odnos samo jednog izlaza i jednog ulaza (npr. radna produktivnost koja pokazuje odnos izlaza i broja radnika ili kapitalna produktivnost koja se dobija kada se vrednost izlaza podeli sa vrednošću uloženog kapitala). Prednost je što je lako razumljiva.

Ukupna faktorska produktivnost (UFP). Ovo je mnogo više korišćen i teoretski bolje razrađen koncept koji uzima u obzir mogućnost supstitucije rada i kapitala, ali je teži za razumevanje i primenu.

Ukupna produktivnost (UP). Ovo je najpotpunija mera produktivnosti, ali se ponovo javljaju problemi kod njenog razumevanja i primene.

Osnovne formule za izračunavanje produktivnosti su date u tabeli 7.

Tabela 1.7. *Mere produktivnosti*

$PP = \dfrac{y}{R\ (\text{ ili } K, M, E, m)}$	$UP = \dfrac{y}{R+K}$	$UP = \dfrac{y}{R+K+M+E+m}$
y - izlaz R – rad	K – kapital M – materijal	E - energija m - ostali ulazi

Drugi aspekt produktivnosti su trendovi koji se definišu posmatranjem promena u toku vremena. Rast produktivnosti je jedan od osnovnih izvora ekonomskog razvoja i razumevanje faktora koji na njega utiču je veoma značajno. Poslednjih godina merenje i analiza promena produktivnosti su postali predmet interesovanja mnogih istraživača koji se bave ispitivanjem performansi firmi i njihovog ponašanja. Istraživači se najčešće fokusiranu na uzroke promena produktivnosti i njihovu dekompoziciju. Dekompozicija produktivnosti omogućuje određivanje determinanti za postizanje boljih performansi i obezbeđuje važne informacije o poslovanju za menadžere i planere u posmatranim entitetima i u privatnom i u javnom sektoru. U ranim istraživanjima u ovom polju promena produktivnosti se objašnjavala samo tehničkim promenama, ali u poslednje vreme široko je prihvaćeno mišljenje da i promene efikasnosti mogu uticati na produktivnost. Trend racia produktivnosti se obično pretvaraju u indekse koji se zajedno sa ulazima i izlazima mogu grafički prikazati. Malmkvistove indekse bazirane na DEA razvili su Fare i drugi (1994) da bi merili promenu produktivnosti kroz vreme, i istovremeno pratili tehničko-tehnološke i promene efikasnosti koje utiču na rast ili smanjenje performansi posmatrane organizacije.

Malmkvist je prvi 1953. predložio kvantitativne indekse za merenje uspešnosti korišćenja ulaza za proizvodnju izlaza. Polazeći od mere ukupne faktorske produktivnosti i Kob-Daglasove proizvodne funkcije Malmkvist je u (Malmquist, 1953) kreirao kvantitativne indekse sa osnovnom idejom da se izvrši poređenje između ekonomija A i B. Pretpostavlja se da su poznate proizvodne funkcije za obe ekonomije $y_{AA} = f_A(K_A, L_A)$ i $y_{BB} = f_B(K_B, L_B)$. Ako se ulazi ekonomije A zamene sa ulazima ekonomije B i obrnuto dobijaju se još dve vrednosti $y_{AB} = f_A(K_B, L_B)$ i $y_{BA} = f_B(K_A, L_A)$. Malmkvistov indeks A u odnosu na B predstavlja geometrijsku sredinu y_{AA} / y_{AB} i y_{BA} / y_{BB}. On će biti veći od 1 ako je proizvodna tehnologija A bolja B. Na isti način se može dobiti Malmkvistov indeks ako se umesto ekonomija A i B u razmatranje uzmu dva vremenska intervala *t* i *t*+1.

Malmkvistov indeks produktivnosti baziran na DEA se računa kao geometrijska sredina dva osnovna Malmkvistova indeksa produktivnosti koji se definišu kao funkcije rastojanja $D(\cdot)$ Funkcije rastojanja su uveli Kaves i drugi u (Caves, Christensen, & Diewert, 1982), pretpostavljajući da je tehnologija za posmatranu jedinicu *k* efikasna ($D_k(x_k, y_k) \equiv 1$). Pored toga oni su postavili teoremu i dokazali da postoji ekvivalencija između Malmkvistovih indeksa produktivnosti (ako se pretpostavi da je proizvodna funkcija tipa *translog*) i Torkvistovih indeksa ili *Solow* reziduala (Lee, 2005) koji se najčešće koriste za praćenje promena ukupne produktivnosti. Fare i drugi (1994) su kombinovanjem Malmkvistovog indeksa sa Farelovom idejom merenja efikasnosti i Kavesovom idejom merenja produktivnosti konstruisali Malmkvistove indekse direktno iz ulaznih i izlaznih podataka koristeći DEA analizu. Oni su uveli neefikasnost u razmatranje i kreirali indekse koji prate promene produktivnosti skupa posmatranih jedinica u periodima $t,\ t = 1, \ldots, T$.

Malmkvistovi indeksi se mogu definisati polazeći od pretpostavki da postoji dopustivi skup izlaza i definisana proizvodna funkcija (Lovell, 2000):

$$P^t(x^t) \ = \ \{ y^t : \ x^t \text{ moze da proizvede } y^t, x^t \in R_+^N, y^t \in R_+^M, t = 1, \ldots, T \}.$$

Ulazna funkcija rastojanja za period *t* kao inicijalni period, može se definisati kao:

$$D^t(x^t, y^t) = \min\{Z : \frac{y^t}{Z} \in P^t(x^t)\} \tag{3.109}$$

Ukoliko je Z minimalno, y^t/Z je maksimalno i može se reći da funkcija rastojanja meri maksimalan mogući izlaz koji se može proizvesti sa datom količinom ulaza. To je mera tehničke efikasnosti. Na sličan način se može definisati funkcija rastojanja za period t+1 ($D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$ $= \min\{Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1})\}$). Ove dve mere moraju imati vrednosti manje ili jednake od 1. Za proveru uticaja promene tehnologije definišu se dve funkcije rastojanja koje pokazuju koliko bi bila vrednost izlaza ako se koristi proizvodna funkcija iz perioda t a vrednosti ulaza (npr. rad i kapital) iz perioda t+1 i obrnuto ($D^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min\{Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1})\}$ i $D^{t+1}(x^t, y^t) = \min\{Z : \frac{y^t}{Z} \in P^{t+1}(x^t)\}$). Kombinovane mere mogu imati i vrednosti veće od 1 pošto tehnologija iz drugog perioda npr. t+1 ne mora biti dopustiva za ulaze iz perioda t i obrnuto (Grifell-Tatje & Lovell, 1995).

Ukoliko se pretpostavi da postoje proizvodne funkcije za dva perioda t i $t+1$, izračunavanje Malmkvistovog DEA indeksa zahteva izračunavanje dve mere za jedinstveni period i dve kombinovane mere. Mera za jedinstveni period se izračunava kao CCR DEA indeks efikasnosti za DMU$_k$ u posmatranom periodu t:

MODEL (M 3.18)

$$D_k^t(x_k^t, y_k^t) = (\text{Min})\, Z_k^t \tag{3.110}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj}^t \geq y_{rk}^t, \qquad r = 1,2,\ldots,s \tag{3. 111}$$

$$Z_k^t \cdot x_{ik}^t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3. 112}$$

$$\lambda_j \geq 0; \ \ j = 1,2,\ldots,n, \tag{3. 113}$$

gde x_{ij}^t i y_{rj}^t predstavljaju i-ti ulaz odnosno r-ti izlaz DMUj u periodu t. Indeks efikasnosti ($D_k^t(x_k^t, y_k^t) = Z_k^{t*}$) određuje vrednost za koju ulaz posmatrane jedinice može biti proporcionalno smanjen, a da i dalje proizvodi traženi izlaz u periodu t. Ako se umesto podataka za period t koriste podaci iz perioda t+1 za jedincu DMU$_k$ se izračunava skor tehničke efikasnosti u periodu

$t+1$ ($D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = Z_k^{(t+1)*}$). Prva mera za kombinaciju perioda t i t+1 ($D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$, gde je t+1 polazni period, za svaku DMU$_k$, $k = 1,\ldots,n$, se dobija kao optimalna vrednost sledećeg linearnog problema:

MODEL (M 3.19)

$$D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = (\text{Min})\, Z \tag{3. 114}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj}^t \geq y_{rk}^{t+1}, \qquad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.115}$$

$$Z \cdot x_{ik}^{t+1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.116}$$

$$\lambda_j \geq 0; \; j = 1,2,\ldots,n, \tag{3.117}$$

Na sličan način se dobija i druga mera za kombinaciju perioda $D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)$ ako se u modelu (M 3.19) zamene indeksi t i $t+1$. To znači da će se za DMU$_k$ uzimati vrednosti iz perioda t, a za svaku DMU$_j$, $j = 1,\ldots,n$, vrednosti za period $t+1$. Modeli M 3.17 i M 3.18 predstavljaju ulazno orijentisane Malmkvistove indekse produktivnosti.

Kada su poznati sve četiri mere rastojanja može se izračunati Malmkvistov indeks produktivnosti koji predstavlja njihovu geometrijsku sredinu i meri promenu performansi između perioda t i $t+1$ za posmatranu DMU$_k$:

$$M_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \tag{3.118}$$

Ako je $M_k > 1$, produktivnost je porasla, ako je $M_k < 1$ produktivnost se smanjila i ako je $M_k = 1$ produktivnost DMU$_k$ je ostala ista u periodu t+1 kao u periodu t. Drugi deo jednakosti (3.118) pokazuje kako se dekomponuje Malmkvistov indeks produktivnosti. Prvi količnik indeksa M_k predstavlja promenu tehničke efikasnosti:

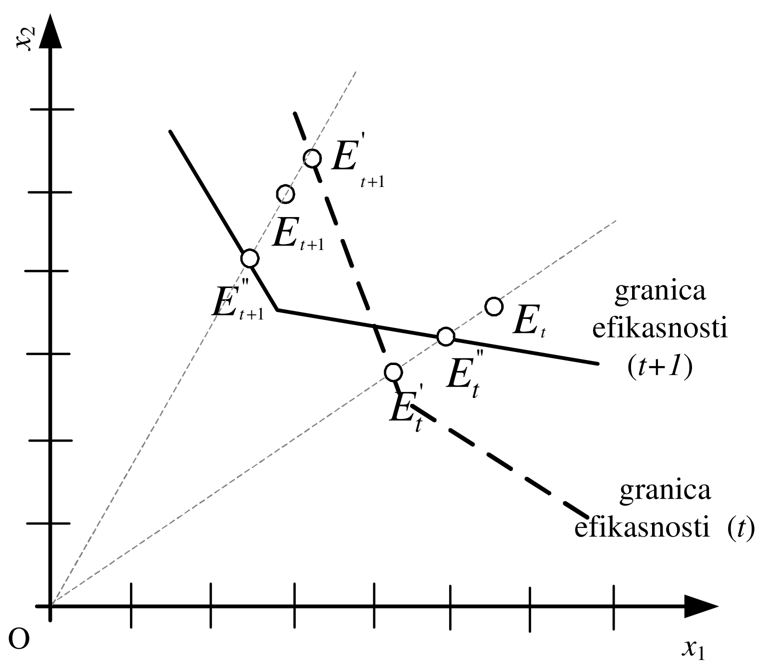
$$E_k = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \tag{3.119}$$

Druga komponenta M_k predstavlja meru tehničke promene proizvodne tehnologije (Kirikal, 2004) između t i t+1:

$$P_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \quad (3.120)$$

Može se zaključiti da važi relacija $M_k = E_k \times P_k$. Promena produktivnosti između perioda t i t+1 prikazana je na Slici 3.10. u najjednostavnijem slučaju (dva ulaza i jedan izlaz sa konstantnim prinosom na obim).

Tačke E_t i E_{t+1} na Slici 3.10. prikazuju ulazno-izlazne kombinacije proizvodnih jedinica u periodima t i t+1. U oba slučaja, jedinice funkcionišu ispod svojih granica proizvodnih mogućnosti. Indeks tehničke efikasnosti u periodu t se može prikazati kao $E_t^{'}/E_t < 1$, a u periodu t+1 kao $E_{t+1}^{''}/E_{t+1} < 1$. Odavde sledi da se promena tehničke efikasnosti može prikazati kao $E_k = (E_{t+1}^{''}/E_t^{'})(E_t/E_{t+1}) < 1$.



Slika 1.10. *Dekompozicija Malmkvistovih indeksa produktivnosti*

Promena granice proizvodne tehnologije se može izračunati kada se odrede mere odstojanja $E_t^{''}/E_t < 1$ i $E_{t+1}^{'}/E_{t+1} > 1$ koje pokazuje kako bi se ponašala jedinica iz perioda t ako se primeni proizvodna tehnologija t+1 i obrnuto . Može se primetiti da su vrednosti obe ove mere veće od vrednosti mera za odstojanje od granice efikasnosti za period t. Uticaj promene proizvodne tehnologije se predstavlja kao $P_k = \sqrt{(E_{t+1}^{'}/E_{t+1}^{''})(E_t^{'}/E_t^{''})}$. Na osnovu vrednosti pojedinačnih količnika ne može se zaključiti da li je promena granice efikasnosti tj. promena proizvodne tehnologije pozitivno uticala na jedinicu *E* posto je jedna vrednost funkcije rastojanja veća, a druga manja od 1, tako da se ne može doneti ni zaključak o konačnoj vrednosti Malmkvistovog indeksa produktivnosti. Detaljna analiza zaključaka do kojih se može doći ako se kombinuju vrednosti indeksa E_k i P_k je data u (Grifell-Tatje & Lovell, 1995).

Prikazani Malmkvistov indeks je ulazno-orijentisan pošto su korišćeni ulazno orijentisani DEA modeli za izračunavanje mera distance $D(\cdot)$ i vrednost indeksa dobijena rešavanjem modela M12 mora biti manja ili jednaka 1, dok vrednosti indeksa dobijenih rešavanjem modela M13 mogu imati bilo koju vrednost $\left(\substack{\le \\ = \\ \ge} 1\right)$. Ukoliko je potrebno izračunati izlazno-orijentisani indeks, modele M 3.17 i M 3.18 treba zameniti sa analognim izlazno orijentisanim DEA modelima. U praksi se često koristi *Window* DEA analiza za dužinom prozora $w = 1$ za računanje vrednosti $D_k^t(x_k^t, y_k^t)$ i $D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$, $k = 1, \ldots, n$, da bi se izbeglo dvostruko rešavanje i kreiranje linearnih modela za istu jedinicu DMU_k.

Malmkvistovi indeksi pružaju potpuniju sliku o performansama posmatranih entiteta i pokazuju trend promena iz perioda u period, dok *Window* analiza može da poveća broj posmatranih jedinica i pokaže trend koristeći panel podatke.