1.1.1. DEA MODELI ZA PRAĆENJE PROMENA EFIKASNOSTI I PRODUKTIVNOSTI

Primena do sada prikazanih DEA modela se najčešće svodi na ocenu statičke efikasnosti. Međutim, rezultati dobijeni primenom DEA modela za procenu performansi entiteta na osnovu vrednosti ulaza i izlaza za ceo vremenski interval često mogu navesti na stranputicu posto se gubi vremenska dimenzija. Da bi se u analizu uključila dinamička komponenta razvijena je takozvana *Window* DEA analiza. Pored toga, za analizu sveukupnih performansi sistema koriste se i Malmkvistovi indeksi za ocenu produktivnosti koji istovremeno pokazuju promenu tehničke efikasnosti i promene granične tehnologije između dva vremenska intervala.

Window DEA analiza

Naziv metode asocira da se analiza vrši pomoću *prozora*. Odnosno, ako je potrebno odrediti performanse jedinica za nekoliko vremenskih perioda, a istovremeno i pratiti njihovu dinamiku, na početku se definiše dužina i broj *prozora* u okviru kojih se preklapaju vremenski periodi. Može se reći da je *Window* analiza zasnovana na principu pokretnih sredina i da je vrlo korisna pri određivanju trendova performansi entiteta (Paradi, Asmild, Aggarwall, & Schaffnit, 2003). Svaka jedinica se u različitom vremenskom periodu tretira kao različita DMU. Prema tome, performanse posmatrane DMU se porede sa njenim performansama u ostalim vremenskim periodima i sa performansama svih ostalih jedinica obuhvaćenih jednim *prozorom.*

Window analiza se sastoji od serije analiza sa vremenski zavisnim jedinicama o kojima se odlučuje koje se menjaju za svaku analizu da bi imitirale pristup pokretnih sredina (Kovačić, 1997). Formalno, posmatra se n DMU ($j=1,\dots,n$) u P vremenskih intervala ($t=1,\dots,P$) i sve koriste s ulaza za proizvodnju m izlaza. Znači posmatrani skup se sastoji od $n\times P$ entiteta i jedan entitet j u periodu t, DMU_j^t ima s-dimenzioni ulazni i m-dimenzioni izlazni vektor (x_j^t i y_j^t). Prozor koji počinje u trenutku l, $1\le l\le P$ i ima dužinu w, $1\le w\le P-l$, se označava sa l_w i sastoji se od $n\times w$ observacija.

Matrica ulaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$X_{l_w}=(x_1^l,x_2^l,\dots,x_n^l,x_1^{l+1},x_2^{l+1},\dots,x_n^{l+1},x_1^{l+w},x_2^{l+w},\dots,x_n^{l+w}),$$

a matrica izlaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$Y_{l_w}=(y_1^l,y_2^l,\dots,y_n^l,y_1^{l+1},y_2^{l+1},\dots,y_n^{l+1},y_1^{l+w},y_2^{l+w},\dots,y_n^{l+w}),$$

Na osnovu prethodnih pretpostavki može se definisati ulazno-orijentisani DEA *window* problem:

MODEL (M 3.17)

$$(\text{Min})\, Z^t_{kl_w} \tag{3.105}$$

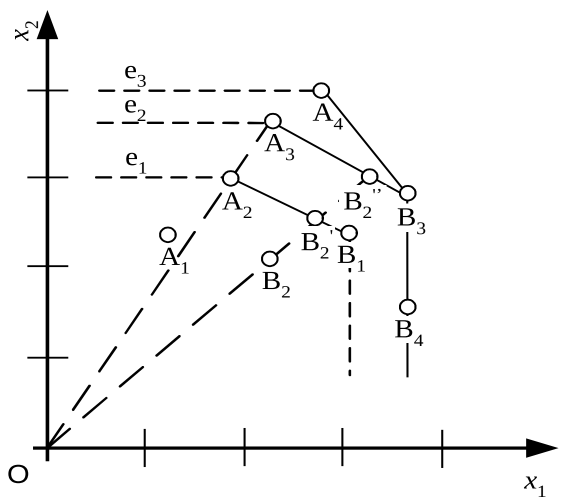
p.o.

$$Y_{l_w}\lambda \geq y^t_{kl_w}, \tag{3.106}$$

$$Z^t_{k\, l_w} \cdot X^t_{kl_w} - X_{l_w}\lambda \geq 0 \tag{3.107}$$

$$\lambda_s \geq 0;\ s = 1, 2, \ldots, n \times w \tag{3.108}$$

Slično kao kod osnovnih DEA modela, moguće je kreirati DEA *window* model izlazne orijentacije.



Slika 2.1. *Ilustracija DEA window analize*

Na Slici 3.8. je prikazan način formiranja granice efikasnosti kod izlazno-orijentisanog *window* DEA modela. U prikazanom primeru procenjuju se jedinice A i B ($n = 2$) u četiri vremenska perioda, a dužina prozora iznosi dva vremenska intervala ($w = 2$). Broj jedinica koje se procenjuju u svakom prozoru iznose $n \times w = 4$. Prema tome u prvom prozoru se procenjuju DMU A_1, A_2, B_1 i B_2, u drugom A_2, A_3, B_2 i B_3 i u trećem A_3, A_4, B_3 i B_4. Granicu efikasnosti u prvom prozoru čine DMU B_1 i A_2, a DMU B_2' predstavlja referentnu jedinicu za B_2, dok u drugom prozoru granicu efikasnosti čine tačke B_3 i A_3, dok je tačka B_2'' referentna jedinica za B_2, a A_3 referentna tačka za neefikasnu jedinicu A_1. Može se primetiti da je jedinica A bila neefikasna u prvom, a efikasna u drugom vremenskom intervalu, pa ponovo efikasna u trećem i četvrtom periodu. Na isti način se može pratiti trend efikasnosti jedinice B i svih DMU u posmatranom skupu.

Malmkvistovi DEA indeksi i merenje ukupne produktivnosti

Koncept produktivnosti postoji dugi niz godina. Klasičan način merenja produktivnosti podrazumeva odnos izlaza i ulaza. To znači da se produktivnost može tumačiti kao efikasnost korišćenja resursa kao što su rad, kapital, materijal i energija. Izlazi mogu biti proizvodi ili usluge.

Merenje produktivnosti se obično vrši sa dva aspekta, uzimajući u obzir nivo i trend produktivnosti. Racio produktivnosti predstavlja njen nivo u datom trenutku, izražen odnosom proizvedenog izlaza i kombinacije iskorišćenih ulaza. Mere produktivnosti se mogu podeliti u sledeće grupe:

Parcijalna produktivnost (PP). Ovo je pojedinačna mera koja uzima u obzir odnos samo jednog izlaza i jednog ulaza (npr. radna produktivnost koja pokazuje odnos izlaza i broja radnika ili kapitalna produktivnost koja se dobija kada se vrednost izlaza podeli sa vrednošću uloženog kapitala). Prednost je što je lako razumljiva.

Ukupna faktorska produktivnost (UFP). Ovo je mnogo više korišćen i teoretski bolje razrađen koncept koji uzima u obzir mogućnost supstitucije rada i kapitala, ali je teži za razumevanje i primenu.

Ukupna produktivnost (UP). Ovo je najpotpunija mera produktivnosti, ali se ponovo javljaju problemi kod njenog razumevanja i primene.

Osnovne formule za izračunavanje produktivnosti su date u tabeli 7.

Tabela 2.1. *Mere produktivnosti*

$PP = \frac{y}{R\ (\text{ili } K, M, E, m)}$	$UP = \frac{y}{R+K}$	$UP = \frac{y}{R+K+M+E+m}$
y - izlaz R – rad	K – kapital M – materijal	E - energija m - ostali ulazi

Drugi aspekt produktivnosti su trendovi koji se definišu posmatranjem promena u toku vremena. Rast produktivnosti je jedan od osnovnih izvora ekonomskog razvoja i razumevanje faktora koji na njega utiču je veoma značajno. Poslednjih godina merenje i analiza promena produktivnosti su postali predmet interesovanja mnogih istraživača koji se bave ispitivanjem performansi firmi i njihovog ponašanja. Istraživači se najčešće fokusiranu na uzroke promena produktivnosti i njihovu dekompoziciju. Dekompozicija produktivnosti omogućuje određivanje determinanti za postizanje boljih performansi i obezbeđuje važne informacije o poslovanju za menadžere i planere u posmatranim entitetima i u privatnom i u javnom sektoru. U ranim istraživanjima u ovom polju promena produktivnosti se objašnjavala samo tehničkim promenama, ali u poslednje vreme široko je prihvaćeno mišljenje da i promene efikasnosti mogu uticati na produktivnost. Trend racia produktivnosti se obično pretvaraju u indekse koji se zajedno sa ulazima i izlazima mogu grafički prikazati. Malmkvistove indekse bazirane na DEA razvili su Fare i drugi (1994) da bi merili promenu produktivnosti kroz vreme, i istovremeno pratili tehničko-tehnološke i promene efikasnosti koje utiču na rast ili smanjenje performansi posmatrane organizacije.

Malmkvist je prvi 1953. predložio kvantitativne indekse za merenje uspešnosti korišćenja ulaza za proizvodnju izlaza. Polazeći od mere ukupne faktorske produktivnosti i Kob-Daglasove proizvodne funkcije Malmkvist je u (Malmquist, 1953) kreirao kvantitativne indekse sa osnovnom idejom da se izvrši poređenje između ekonomija A i B. Pretpostavlja se da su poznate proizvodne funkcije za obe ekonomije $y_{AA} = f_A(K_A, L_A)$ i $y_{BB} = f_B(K_B, L_B)$. Ako se ulazi ekonomije A zamene sa ulazima ekonomije B i obrnuto dobijaju se još dve vrednosti $y_{AB} = f_A(K_B, L_B)$ i $y_{BA} = f_B(K_A, L_A)$. Malmkvistov indeks A u odnosu na B predstavlja geometrijsku sredinu y_{AA}/y_{AB} i y_{BA}/y_{BB}. On će biti veći od 1 ako je proizvodna tehnologija A bolja B. Na isti način se može dobiti Malmkvistov indeks ako se umesto ekonomija A i B u razmatranje uzmu dva vremenska intervala t i t+1.

Malmkvistov indeks produktivnosti baziran na DEA se računa kao geometrijska sredina dva osnovna Malmkvistova indeksa produktivnosti koji se definišu kao funkcije rastojanja $D(\cdot)$ Funkcije rastojanja su uveli Kaves i drugi u (Caves, Christensen, & Diewert, 1982), pretpostavljajući da je tehnologija za posmatranu jedinicu k efikasna ($D_k(x_k, y_k) \equiv 1$). Pored toga oni su postavili teoremu i dokazali da postoji ekvivalencija između Malmkvistovih indeksa produktivnosti (ako se pretpostavi da je proizvodna funkcija tipa *translog*) i Torkvistovih indeksa ili *Solow* reziduala (Lee, 2005) koji se najčešće koriste za praćenje promena ukupne produktivnosti. Fare i drugi (1994) su kombinovanjem Malmkvistovog indeksa sa Farelovom idejom merenja efikasnosti i Kavesovom idejom merenja produktivnosti konstruisali Malmkvistove indekse direktno iz ulaznih i izlaznih podataka koristeći DEA analizu. Oni su uveli neefikasnost u razmatranje i kreirali indekse koji prate promene produktivnosti skupa posmatranih jedinica u periodima $t,\ t = 1, \ldots, T$.

Malmkvistovi indeksi se mogu definisati polazeći od pretpostavki da postoji dopustivi skup izlaza i definisana proizvodna funkcija (Lovell, 2000):

$$P^t(x^t) = \{y^t : x^t \text{ moze da proizvede } y^t, x^t \in R_+^N, y^t \in R_+^M, t = 1, \ldots, T\}.$$

Ulazna funkcija rastojanja za period t kao inicijalni period, može se definisati kao:

$$D^t(x^t, y^t) = \min\{Z : \frac{y^t}{Z} \in P^t(x^t)\} \qquad (3.109)$$

Ukoliko je Z minimalno, y^t/Z je maksimalno i može se reći da funkcija rastojanja meri maksimalan mogući izlaz koji se može proizvesti sa datom količinom ulaza. To je mera tehničke efikasnosti. Na sličan način se može definisati funkcija rastojanja za period t+1 ($D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min\{Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1})\}$). Ove dve mere moraju imati vrednosti manje ili jednake od 1. Za proveru uticaja promene tehnologije definišu se dve funkcije rastojanja koje pokazuju koliko bi bila vrednost izlaza ako se koristi proizvodna funkcija iz perioda t a vrednosti ulaza (npr. rad i kapital) iz perioda t+1 i obrnuto ($D^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min\{Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1})\}$ i $D^{t+1}(x^t, y^t) = \min\{Z : \frac{y^t}{Z} \in P^{t+1}(x^t)\}$). Kombinovane mere mogu imati i vrednosti veće od 1 pošto tehnologija iz drugog perioda npr. t+1 ne mora biti dopustiva za ulaze iz perioda t i obrnuto (Grifell-Tatje & Lovell, 1995).

Ukoliko se pretpostavi da postoje proizvodne funkcije za dva perioda t i $t+1$, izračunavanje Malmkvistovog DEA indeksa zahteva izračunavanje dve mere za jedinstveni period i dve kombinovane mere. Mera za jedinstveni period se izračunava kao CCR DEA indeks efikasnosti za DMU$_k$ u posmatranom periodu t:

MODEL (M 3.18)

$$D_k^t(x_k^t, y_k^t) = (\text{Min})\, Z_k^t \qquad (3.110)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,.\, y_{rj}^t \ge y_{rk}^t, \qquad r = 1,2,\dots,s \qquad (3.\ 111)$$

$$Z_k^t \,.\, x_{ik}^t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \ge 0, \qquad i = 1,2,\dots,m \qquad (3.\ 112)$$

$$\lambda_j \ge 0; \ \ j = 1,2,\dots,n, \qquad (3.\ 113)$$

gde x_{ij}^t i y_{rj}^t predstavljaju i-ti ulaz odnosno r-ti izlaz DMUj u periodu t. Indeks efikasnosti ($D_k^t(x_k^t, y_k^t) = Z_k^{t*}$) određuje vrednost za koju ulaz posmatrane jedinice može biti proporcionalno smanjen, a da i dalje proizvodi traženi izlaz u periodu t. Ako se umesto podataka za period t koriste podaci iz perioda t+1 za jedincu DMU$_k$ se izračunava skor tehničke efikasnosti u periodu $t+1$ (

$D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = Z_k^{(t+1)*}$). Prva mera za kombinaciju perioda t i t+1 ($D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$, gde je t+1 polazni period, za svaku DMU$_k$, $k = 1, \dots, n$, se dobija kao optimalna vrednost sledećeg linearnog problema:

MODEL (M 3.19)

$$D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = (\text{Min})\, Z \tag{3. 114}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj}^t \ge y_{rk}^{t+1}, \qquad r = 1, 2, \dots, s \tag{3.115}$$

$$Z \cdot x_{ik}^{t+1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \ge 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.116}$$

$$\lambda_j \ge 0; \; j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.117}$$

Na sličan način se dobija i druga mera za kombinaciju perioda $D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)$ ako se u modelu (M 3.19) zamene indeksi t i $t+1$. To znači da će se za DMU$_k$ uzimati vrednosti iz perioda t, a za svaku DMU$_j$, $j = 1, \dots, n$, vrednosti za period $t+1$. Modeli M 3.17 i M 3.18 predstavljaju ulazno orijentisane Malmkvistove indekse produktivnosti.

Kada su poznati sve četiri mere rastojanja može se izračunati Malmkvistov indeks produktivnosti koji predstavlja njihovu geometrijsku sredinu i meri promenu performansi između perioda t i $t+1$ za posmatranu DMU$_k$:

$$M_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \tag{3.118}$$

Ako je $M_k > 1$, produktivnost je porasla, ako je $M_k < 1$ produktivnost se smanjila i ako je $M_k = 1$ produktivnost DMU$_k$ je ostala ista u periodu t+1 kao u periodu t. Drugi deo jednakosti (3.118) pokazuje kako se dekomponuje Malmkvistov indeks produktivnosti. Prvi količnik indeksa M_k predstavlja promenu tehničke efikasnosti:

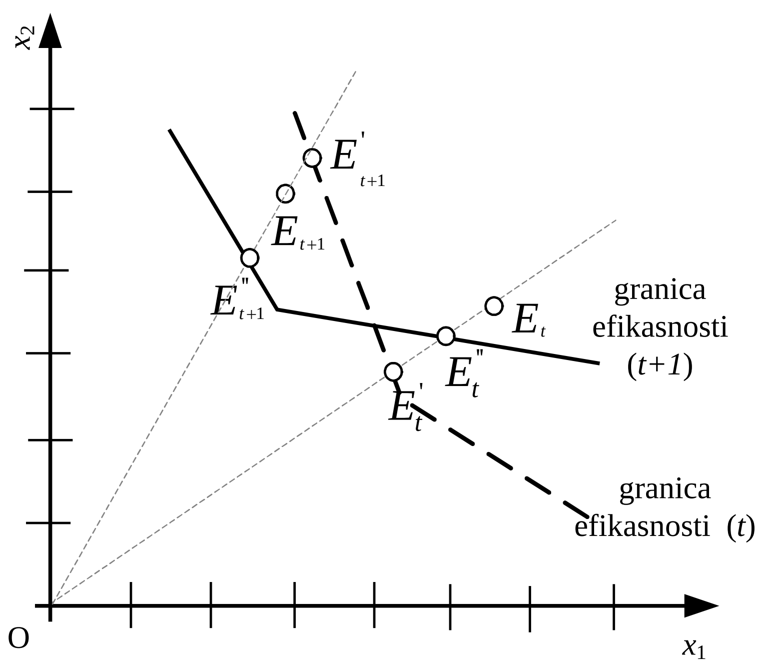
$$E_k = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \tag{3.119}$$

Druga komponenta M_k predstavlja meru tehničke promene proizvodne tehnologije (Kirikal, 2004) između t i t+1:

$$P_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \tag{3.120}$$

Može se zaključiti da važi relacija $M_k = E_k \times P_k$. Promena produktivnosti između perioda *t* i *t*+1 prikazana je na Slici 3.10. u najjednostavnijem slučaju (dva ulaza i jedan izlaz sa konstantnim prinosom na obim).

Tačke E_t i E_{t+1} na Slici 3.10. prikazuju ulazno-izlazne kombinacije proizvodnih jedinica u periodima *t* i *t*+1. U oba slučaja, jedinice funkcionišu ispod svojih granica proizvodnih mogućnosti. Indeks tehničke efikasnosti u periodu *t* se može prikazati kao $E_t^{'} / E_t < 1$, a u periodu *t*+1 kao $E_{t+1}^{''} / E_{t+1} < 1$. Odavde sledi da se promena tehničke efikasnosti može prikazati kao E_k = $(E_{t+1}^{''} / E_t^{'})(E_t / E_{t+1}) < 1$.



Slika 2.2. *Dekompozicija Malmkvistovih indeksa produktivnosti*

Promena granice proizvodne tehnologije se može izračunati kada se odrede mere odstojanja $E_t^{''} / E_t < 1$ i $E_{t+1}^{'} / E_{t+1} > 1$ koje pokazuje kako bi se ponašala jedinica iz perioda *t* ako se primeni proizvodna tehnologija *t*+1 i obrnuto . Može se primetiti da su vrednosti obe ove mere veće od vrednosti mera za odstojanje od granice efikasnosti za period *t*. Uticaj promene proizvodne tehnologije se predstavlja kao $P_k = \sqrt{(E_{t+1}^{'} / E_{t+1}^{''})(E_t^{'} / E_t^{''})}$. Na osnovu vrednosti pojedinačnih količnika ne može se zaključiti da li je promena granice efikasnosti tj. promena proizvodne tehnologije pozitivno uticala na jedinicu *E* posto je jedna vrednost funkcije rastojanja veća, a druga manja od 1, tako da se ne može doneti ni zaključak o konačnoj vrednosti Malmkvistovog indeksa produktivnosti.

Detaljna analiza zaključaka do kojih se može doći ako se kombinuju vrednosti indeksa E_k i P_k je data u (Grifell-Tatje & Lovell, 1995).

Prikazani Malmkvistov indeks je ulazno-orijentisan pošto su korišćeni ulazno orijentisani DEA modeli za izračunavanje mera distance $D(\cdot)$ i vrednost indeksa dobijena rešavanjem modela M12 mora biti manja ili jednaka 1, dok vrednosti indeksa dobijenih rešavanjem modela M13 mogu imati bilo koju vrednost $(\overset{\le}{\underset{\ge}{=}} 1)$. Ukoliko je potrebno izračunati izlazno-orijentisani indeks, modele M 3.17 i M 3.18 treba zameniti sa analognim izlazno orijentisanim DEA modelima. U praksi se često koristi *Window* DEA analiza za dužinom prozora $w = 1$ za računanje vrednosti $D_k^t(x_k^t, y_k^t)$ i $D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$, $k = 1, \ldots, n$, da bi se izbeglo dvostruko rešavanje i kreiranje linearnih modela za istu jedinicu DMU_k.

Malmkvistovi indeksi pružaju potpuniju sliku o performansama posmatranih entiteta i pokazuju trend promena iz perioda u period, dok *Window* analiza može da poveća broj posmatranih jedinica i pokaže trend koristeći panel podatke.

2. DEA MODELI ZA ALOKACIJU RESURSA

Sa stanovišta menadžmenta postavljanje odgovarajućih ciljeva kao i adekvatna alokacija resursa i troškova, od kojih u velikoj meri zavisi profit, su od ključnog značaja u procesu upravljanja.

Kao što je već prikazano u prethodnim poglavljima, Analiza obavijanja podataka omogućuje klasifikaciju posmatranih jedinica odlučivanja na efikasne i neefikasne. U poglavljima 3.2 i 3.3 su prikazani osnovni i modifikovani DEA modeli i načini određivanja ciljanih vrednosti prema jednačinama (3.18) i (3.19). Međutim, ako je potrebno postaviti ciljeve u skladu sa realnim okruženjem ili izvršiti alokaciju fiksnih zajedničkih resursa, neophodno je izvršiti dodatne modifikacije modela i postaviti nove procedure primene. U ovom poglavlju je dat pregled modela i predložene nova više-etapna procedura za alokaciju resursa i postavljanje ciljeva.

2.1. PREGLED LITERATURE

U mnogim realnim aplikacijama se procenjuje efikasnost jedinica koje posluju u jednom sistemu, pri čemu se odluke o raspodeli resursa donose centralizovano. Adekvatna raspodela resursa i fiksnih troškova podrazumeva zadovoljavanje potrebe ali i ravnomerno opterećenje svih posmatranih jedinica. Takav je slučaj, na primer, bankarskih filijala kojima je potrebno rasporediti odgovarajući broj službenika ili bankarskih proizvoda na koje je potrebno alocirati fiksne troškove poslovanja ili reklamiranja. Sličan je primer lanaca supermarketa gde se svakom supermarketu dodeljuju odgovarajući logistički troškovi, a da pri tome ukupni troškovi ne smeju da prekorače predviđeni budžet.

Jedan od ključnih problema je fer alokacija troškova. Postoje tri osnovna tipa alokacije troškova (Horngren, Sundem, Stratton, & Treall):

1. *Alokacija zajedničkih (opštih) troškova na organizacione jedinice koje su nosioci troškova.* Na primer, troškovi za rentu se alociraju na osnovu veličine prostora koji se koristi, troškovi amortizacije na osnovu radnih sati mašina, dok se opšti administrativni troškovi alociraju na bazi ukupnih direktnih troškova.
2. *Realokacija troškova sa jednog nosioca na drugi.* Kada neke organizacione jedinice proizvode krajnje proizvode ili usluge (izlaze), troškovi se vezuju za količinu proivoda ili usluga. Troškovi ostalih organizacionih jedinica, uslužnih departmana kao što su finansije, ljudski resursi, logistička ili pravna služba, se u potpunosti realociraju.
3. *Alokacija varijabilnih troškova na izlaze (proizvode i usluge) posebnih organizacionih jedinica.*

Najkompleksija je alokacija druge grupe troškova, odnosno fer alokacija fiksnih ili zajedničkih (opštih) troškova na sve proizvodne i uslužne organizacione jedinice. U praksi upravljanja troškovima postoji nekoliko knjigovodstvenih metoda za njihovu alokaciju u zavisnosti od tipa troška i tipa organizacije u kojoj se vrši upravljanje:

1. *Direktna alokacija* svih fiksnih troškova na organizacione jedinice koje proizvode profit.
2. *Višeetapna alokacija*: u prvom koraku se alociraju opšti ili fiksni troškovi na sve organizacione jedinice, a zatim se u drugom koraku realociraju na organizacione jedinice koje proizvode profit.
3. *Recipročna alokacija* kada organizacione jedinice međusobno pružaju usluge jedna drugoj.

Pri praktičnoj primeni bilo koje od metoda bitno je odrediti adekvatnu osnovu za alokaciju troškova. Relativna efikasnost organizacionih jedinica, kao što su filijale banka, koje su međusobno uporedive kao delovi jedne kompanije (banke) može se koristiti kao osnova za alokaciju fiksnih troškova ili drugih zajedničkih resursa.

Kuk i Kres su u (Cook & Kress, 1999) koristili rezultate DEA analize kao polaznu osnovu za ravnomernu raspodelu resursa, uvodeći principe očuvanja postignutog nivoa efikasnosti (invarijantnost) i *ulaznog Pareto minimuma*. Alokacija troškova će biti ulazno Pareto minimalna ako troškovi ne mogu biti realocirani bez narušavanja principa invarijantnosti. Autori su razvili proširenu verziju DEA modela tako da se fiksni troškovi dodeljuju jedinicama proporcionalno upotrebi varijabilnih resursa. Za primenu u opštem slučaju razvijen je model M 5.1. Za planski period, poznati su ukupni fiksni troškovi R, pri čemu je r_j trošak dodeljen DMU$_j$ (j=1,...,n) proporcionalno njenom virtuelnom odnosno agregiranom ulazu.

MODEL (M 5.1)

$$(\min) q_k = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + v_{m+1} r_k \tag{5.1}$$

p.o

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rk} = 1 \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + v_{m+1} r_j \geq 0, \quad j = 1,\ 2 \ldots, n \tag{5.3}$$

$$\mu_r \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{5.4}$$

$$\upsilon_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m \tag{5.5}$$

Očigledno je osnovni CCR DEA model proširen uvođenjem varijabli r_j (j=1,...,n) i odgovarajućih težinskih koeficijenata v_{m+1}. U prikazanom modelu M 5.1 potrebno je pronaći minimum funkcije cilja koja predstavlja zbir virtuelnog ulaza $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}$ i virtuelnog fiksnog resursa $v_{m+1} r_k$ posmatrane DMU$_k$. Za model M 5.1 se može formirati dualni model M 5.2.

MODEL (M 5.2)

$$(\max)\,\phi_k \tag{5.6}$$

p.o

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{ik}, \quad i = 1,\ldots,m \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j \le r_k \tag{5.7}$$

$$z_k y_{rk} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \le 0, \quad r = 1,\ldots,s \tag{5.8}$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{5.9}$$

Na osnovu analize modela M 5.1 i M 5.2 autori su postavili uslove (5.10) i (5.11) koje optimalno rešenje mora da zadovolji da bi se postigla ravnomerna alokacija, a da pri tome svaka DMU zadržava nivo efikasnosti postignut pre alokacije resursa.

$$\sum_{r=1}^{n} r_j = R \tag{5.10}$$

$$r_k = \sum_{j \in J_c} \lambda_j^k r_j, \forall j \in J_c \text{ , } J_c \text{ je skup neefikasnih DMU} \tag{5.11}$$

Ovaj pristup je proširen u radu koji je objavljen 2005, godine (Cook & Zhu, Allocation of shared costs among decision making units: A DEA approach, 2005). Prikazano je da se pristup može primeniti bez obzira na orijentaciju modela i pretpostavljeni prinos na obim. U prvoj fazi se rešava odgovarajući dualni DEA model u cilju pronalaženja optimalnih vrednosti $\lambda_j^* \ge 0$, j=1,...,n . U drugoj fazi se rešava model u kom se minimizira arbitrarno postavljena funkcija, ograničenja predstavljaju jednačine (5.10) i (5.11) u koje su uvršćene optimalne dualne težine $\lambda_j^* \ge 0$, j=1,...,n. Na taj način se postiže ravnomerna alokacija resursa na sve jedinice, bez obzira da li su ocenjene kao efikasne ili kao neefikasne.

Primer 2-1

Predloženi modeli su ilustrovani na primeru alokacije fiksnih troškova R=800 na osam posmatranih DMU koje koriste ulaz X za proizvodnju izlaza Y. U drugoj i trećoj koloni tabeli su prikazane vrednosti ulaza i izlaza za 8 posmatranih DMU. Rezultati prikazani u tabeli 5.1 su dobijeni rešavanjem CCR DEA modela i preuzeti su iz softvera DEA-solver software (Cooper, Seiford, & Tone, 2006).

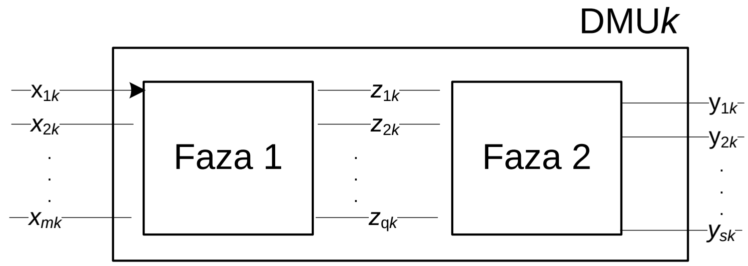
Tabela 2.1. *Alokacija fiksnih resursa ((Cook & Kress, 1999) i (Cook & Zh , 2005))*

	Faza 1					Faza 2			
DMU	X	Y	ϕ	Uzorne jedinice	λ	*R*	ϕ	*X/Y*	*R/Y*
A	75	210	*1.000*	A	1.00	*150*	*1.000*	*0.36*	*0.71*
B	50	100	*1.400*	H	1.00	*0*	*1.400*	*0.50*	*0.00*
C	120	252	*1.333*	H	2.40	*0*	*1.333*	*0.48*	*0.00*
D	100	225	*1.244*	H	2.00	*0*	*1.244*	*0.44*	*0.00*
E	100	120	*2.333*	A	1.33	*200*	*2.333*	*0.83*	*1.67*
F	75	180	*1.167*	H	1.50	*0*	*1.167*	*0.42*	*0.00*
G	225	200	*3.150*	A	3.00	*450*	*3.150*	*1.13*	*2.25*
H	50	140	*1.000*	H	1.00	*0*	*1.000*	*0.36*	*0.00*

Optimalna raspodela fiksnog troška na samo tri jedinice (A, E i G) za koje je A uzorna DMU je izvršena na osnovu vrednosti multiplikatora λ. Relativna efikasnost svih posmatranih jedinica je ostala nepromenjena i posle raspodele fiksnog troška. Na grafikonu 5.1 na apcisi je predstavljen odnos *X/Y*, dok je na ordinata predstavlja količnik fiksnog troška i izlaza *R/Y*. Najmanje vrednosti prvog racia *X/Y* =0.36 imaju DMU A i H. Ove dve tačke se nalaze najbliže koordinatnom početku na *x*-osi i koje su istovremeno nalaze na granici efikasnosti i predstavljaju referentne jedinice za sve ostale DMU.

3. MREŽNI DEA MODELI

Osnovna ideja za formiranje dvofaznog DEA modela je data u radu (Kao & Hwang, 2008). Dvofazni proizvodni proces za DMU_k koja se procenjuje je prikazan na slici 6.2.



Slika 3.1. *Dvofazni proizvodni proces sa ulazima X, izlazima Y i međufaznim proizvodima Z (Kao & Hwang, 2008)*

Za DMU$_k$ se može meriti ukupna efikasnost E_k koja predstavlja kombinaciju vrednosti indeksa efikasnosti E_k^1 u fazi 1. i indeksa efikasnosti E_k^2 iz faze 2. Indeks efikasnosti E_k^1 se dobija kao rešenje model (6.1)-(6.3) u kome x_{ij} (i=1,...,m) predstavljaju ulaze, a z_{pj} (p=1,...,q) izlaze DMU$_j$, j=1,...,n. Model za procenu efikasnosti u fazi 1. ima sledeću formu:

MODEL (M 6.1)

$$(\max)E_k^1 = \sum_{p=1}^{q} w_p z_{pk} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \tag{6.1}$$

p.o

$$\sum_{p=1}^{q} w_p z_{pj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 1,\ j = 1,\ldots n \tag{6.2}$$

$$w_p, v_i \ge \varepsilon,\ p = 1,...,q,\ i = 1,\ldots,m \tag{6.3}$$

Svakom ulazu za DMU*k* koja se ocenjuje je dodeljen težinski koeficijent v_i (i=1,...,m), dok se izlazima dodeljuju težinski koeficijenti w_p (p=1,...,q). U drugoj fazi se proizvodi z_{pj} (p=1,...,q) tretiraju kao ulazi, a y_{rk} (r=1,...,s) kao izlazi kojima se dodeljuje težinski koeficijenti u_r (r=1,...,s) za svaku DMU$_j$ (j=1,...,n). Model kojim se ocenjuje efikasnost u drugoj fazi je M 6.2.

MODEL (M 6.2)

$$(\max)E_k^2 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \Big/ \sum_{p=1}^{q} w_p z_{pk} \tag{6.4}$$

p.o

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{p=1}^{q} w_p z_{pj} \le 1,\ j = 1,\ldots n \tag{6.5}$$

$$w_p, u_r \ge \varepsilon,\ p = 1,...,q,\ r = 1,\ldots,s \tag{6.6}$$

Ukupna efikasnost E_k za DMUk se može računati kao proizvod efikasnosti iz prve i druge faze $E_k = E_k^1 \text{ x } E_k^2$. Modifikovani linearni model M 6.3 kojim se izračunava ukupna efikasnost E_k je predložen u (Kao & Hwang, 2008).

MODEL (M 6.3)

$$(\max) E_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \tag{6.7}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \tag{6.8}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0,\ j = 1,\ldots.n \tag{6.9}$$

$$\sum_{p=1}^{q} w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0,\ j = 1,\ldots.n \tag{6.10}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^{q} w_p z_{pj} \le 0,\ j = 1,\ldots.n \tag{6.11}$$

$$w_p, u_r, v_i \ge \varepsilon,\ p = 1,\ldots,q,\ r = 1,\ldots,s,\ i = 1,\ldots,m \tag{6.12}$$

Modifikovani dualni model za predloženi relacioni dvofazni model je sledeći:

MODEL (M 6.4)

$$(\min) \theta_k - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^v + \sum_{p=1}^{q} s_p^w + \sum_{r=1}^{s} s_r^u\right) \tag{6.13}$$

p.o

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \delta_j) x_{ij} - s_i^v = \theta_k x_{ik}, \quad i = 1,\ldots,m \tag{6.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j z_{pj} - s_p^w = 0, \quad p = 1,\ldots,q \tag{6.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^u = y_{rk}, \quad r = 1,\ldots,s \tag{6.16}$$

$$\lambda_j, \delta_j, s_i^v, s_p^w, s_r^u \ge 0,\ j = 1,\ldots,n,\ p = 1,\ldots,q,\ r = 1,\ldots,s,\ i = 1,\ldots,m \tag{6.17}$$

U modelu (6.13)-(6.17), λ_j i δ_j predstavljaju važnosti koje su dodeljene finalnim, odnosno međufaznim izlazima DMU$_j$ $(j = 1,\ldots,n)$ pri formiranju virtuelne kompozitne jedinice koja se nalazi na granici efikasnosti. Vrednosti $s_i^v, s_p^w, s_r^u \geq 0, (p = 1,...,q, r = 1,\ldots,s, i = 1,\ldots,m)$ pokazuju za koliko je potrebno smanjiti vrednosti ulaza odnosno povećati vrednosti međufaznih i finalnih izlaza da bi posmatrana DMU postala efikasna.