НАПРЕДНО ПЛАНИРАЊЕ И РАСПОРЕЂИВАЊЕ

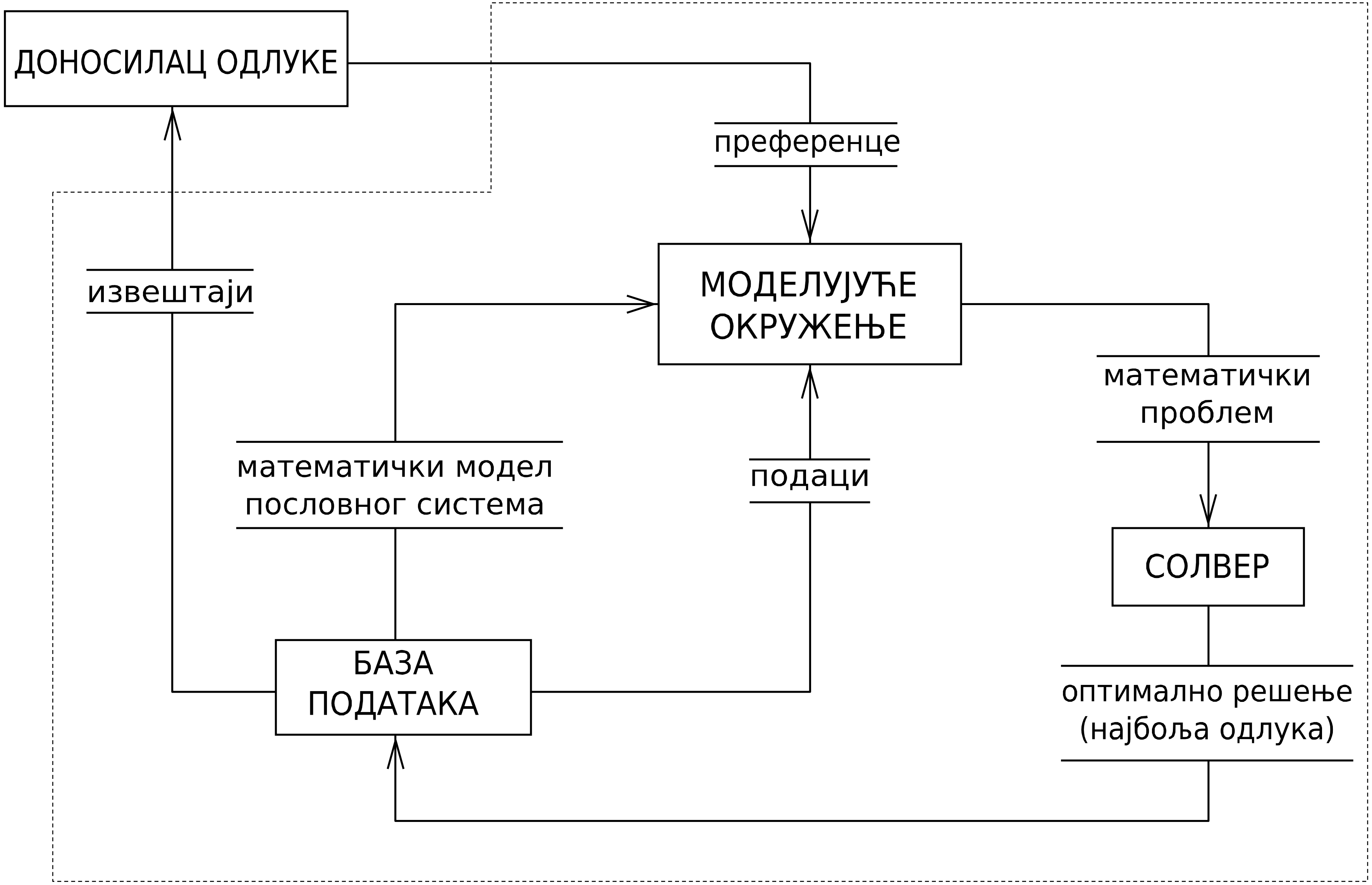
Милан Станојевић, Гордана Савић, Драгана Макајић-Николић

Начин полагања испита

- Студије случаја
  - Задате
  - Изабране самостално

- Направљен систем за подршку одлучивању у проблему садржаном у студији случаја

Систем за подршку одлучивању заснован на оптимизацији (СПОО)



Фазе у развоју СПОО

1. Прелиминарно (пилот) истраживање:
   - грубо упознавање са проблемом,
   - анализа доступних података,
   - оптимизација над упрошћеним моделом.

   ⇒ Доношење одлуке о развоју СПОО.
2. Детаљна анализа и моделирање реалног система:
   - детаљно упознавање са проблемом,
   - формулисање вербалног описа оптимизационог проблема: критеријуми и услови,
   - формирање општег математичког модела,
   - прикупљање података,
   - тестирање математичког модела над реалним подацима,
   - дефинисање корисничких захтева.
3. Развој софтвера.
4. Инсталирање и обука.

Садржај данашњег часа

- Подсећање: једноставни модели: конкретни и општи
- Структура података, индекси, скупови
- Линеаризација нелинеарних услова (апс, мах, мин, логички услови, разломљене ф-је)
- Општи модели – вежбање

ПОДСЕЋАЊЕ

Једноставни модели: конкретни и општи

Проблем исхране *(Diet problem)*

- 1941. *J. Cornfield,* у непубликованом меморандуму, апркосимативно решавање;
- 1945. *G.J. Stigler,* објављено у *Journal of Farm Economics*, апроксимативно решавање;
- 1947. *G.B. Dantzig, J. Laderman*, није публиковано, линерано програмирање.

- Поставка проблема:
  - Критеријум: трошкови јеловника
  - Услови: задовољити захтеве за уносом хранљивих материја

Јеловник спортисте

Исхрана спортисте између такмичења мора да буде правилна, односно да обухвата правилан однос угљених хидрата, масти и беланчевина. На основу неких истраживања утврђено је да је унос хранљивих материја код спортиста јуниора и сениора следећи (подаци су дати у грамима по килограму телесне тежине).

	Беланчевине (г/1 кг тт)	Масти (г/1 кг тт)	Угљени хидрати (г/1 кг тт)
Јуниор	1,8	0,8	6
Сениор	2	1	10

Нутрициониста жели да испланира шта ће у наредна четири дана спремати спортисти јуниору од 62 кг за ручак. С обзиром да спортиста има 5 оброка (доручак, ручак, вечера, ужина и оброк после тренинга), утврђено је да у току ручка спортиста треба да унесе 25-40% дневних потреба за беланчевинама, 35-45% дневне количине масти и 30-50% угљених хидрата.

	Беланчевине	Масти	Угљени хидрати
Јуниор	27,9-44,64	17,36-22,32	111,6-186

Јеловник спортисте

Намирнице које се могу користити у јеловнику за четири дана, њихов садржај беланчевина, масти и угљених хидрата и цене по јединици мере су приказане у табели.

намирница	јединица мере	беланчевине (г)	масти (г)	угљени хидрати (г)	цена
хлеб	100 г	8	1,2	51	1,5
кромпир	100 г	2	0,2	20,9	1,8
купус	100 г	1,7	0,2	4,8	1,7
паприка	100 г	1,2	0,2	5,1	4
цвекла	100 г	8,2	1,2	25,1	10
бела риба	100 г	22,9	6,5	0	7
пилетина	100 г	12,3	5,7	0,4	8
телетина	100 г	17,34	21,4	0,34	4,4
супа	100 г	0,4	0	0,5	3
јаја	1 ком	6,1	5,3	0,3	3
млеко	1 дл	3,5	3,6	4,8	1,6
мед	100 г	0,3	0	81	16
воћни колач	100 г	3	3,6	45,9	19
воћни сок	1 дл	0,5	0,2	19	5

Конретан математички модел проблема исхране

$x_1,\ldots,x_9$	Количине хлеба, кромпира, купуса, паприка, цвекле, беле рибе, пилетине, телетине и супе (у јединицама од 100г) које треба укључити у јеловник од 4 дана
x_{10}	Број јаја које треба укључити у јеловник од 4 дана
x_{11}	Количина млека (у дл) коју треба укључити у јеловник од 4 дана
x_{12}, x_{13}	Количине меда и воћног колача (у јединицама од 100г) које треба укључити у јеловник од 4 дана
x_{14}	Количина воћног сока (у дл) коју треба укључити у јеловник од 4 дана

Минимизација укупне цене

$$(\min)\ f(x) = 1,5x_1 + 1,8x_2 + 1,7x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 4,4x_8 + 3x_9 + 3x_{10} + 1,6x_{11} + 16x_{12} + 19x_{13} + 5x_{14}$$

п.о.

Минимални унос беланчевина за 4 дана

$$8x_1 + 2x_2 + 1,7x_3 + 1,2x_4 + 8,2x_5 + 22,9x_6 + 12,3x_7 + 17,34x_8 + 0,4x_9 + 6,1x_{10} + 3,5x_{11} + 0,3x_{12} + 3x_{13} + 0,5x_{14} \geq 4 \cdot 27,9$$

Максимални унос беланчевина за 4 дана

$$8x_1 + 2x_2 + 1,7x_3 + 1,2x_4 + 8,2x_5 + 22,9x_6 + 12,3x_7 + 17,34x_8 + 0,4x_9 + 6,1x_{10} + 3,5x_{11} + 0,3x_{12} + 3x_{13} + 0,5x_{14} \leq 4 \cdot 44,64$$

Минимални унос масти за 4 дана

$$1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 1,2x_5 + 6,5x_6 + 5,7x_7 + 21,4x_8 + 0x_9 + 5,3x_{10} + 3,6x_{11} + 0x_{12} + 3,6x_{13} + 0,2x_{14} \geq 4 \cdot 17,36$$

Максимални унос масти за 4 дана

$$1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 1,2x_5 + 6,5x_6 + 5,7x_7 + 21,4x_8 + 0x_9 + 5,3x_{10} + 3,6x_{11} + 0x_{12} + 3,6x_{13} + 0,2x_{14} \leq 4 \cdot 22,32$$

Минимални унос угљених хидрата за 4 дана

$$51x_1 + 20,9x_2 + 4,8x_3 + 5,1x_4 + 25,1x_5 + 0x_6 + 0,4x_7 + 0,34x_8 + 0,5x_9 + 0,3x_{10} + 4,8x_{11} + 81x_{12} + 45,9x_{13} + 19x_{14} \geq 4 \cdot 111,6$$

Максимални унос угљених хидрата за 4 дана

$$51x_1 + 20,9x_2 + 4,8x_3 + 5,1x_4 + 25,1x_5 + 0x_6 + 0,4x_7 + 0,34x_8 + 0,5x_9 + 0,3x_{10} + 4,8x_{11} + 81x_{12} + 45,9x_{13} + 19x_{14} \leq 4 \cdot 186$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,14$$

Општи математички модел проблема исхране

n - број прехрамбених производа. Познате су карактеристике за n - различитих прехрамбених производа $P_1, P_2, ..., P_j, ..., P_n$.

m -број хранљивих састојака. У сваком прехрамбеном производу постоје одређене количине хранљивих састојака $K_1, K_2, ..., K_i, ..., K_m$.

a_{ij} -садржај i -тог хранљивог састојка у j -том прехрамбеном производу $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$.

b_i -минимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i = 1, 2, ..., m)$

b_i^* -максимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i = 1, 2, ..., m)$

c_j -јединична цена j -тог прехрамбеног производа $(j = 1, 2, ..., n)$

x_j -непознате дневне потребе за j -тим прехрамбеним производом $(j = 1, 2, ..., n)$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$b_i^* \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

СТРУКТУРА ПОДАТАКА, ИНДЕКСИ, СКУПОВИ

Структура података и нотација

- Параметри
- Промељиве

n - број прехрамбених производа.
m -број хранљивих састојака.
a_{ij} -садржај i -тог хранљивог састојка у j -том прехрамбеном производу $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$.
b_i -минимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i=1,2,...,m)$
b_i^* -максимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i=1,2,...,m)$
c_j -јединична цена j -тог прехрамбеног производа $(j=1,2,...,n)$
x_j -непознате дневне потребе за j -тим прехрамбеним производом $(j=1,2,...,n)$

- Скупови
- Параметри
- Променљиве

N - скуп прехрамбених производа.
M -скуп хранљивих састојака.
a_{ij} -садржај i -тог хранљивог састојка у j -том прехрамбеном производу $(i \in N;\ j \in M)$.
b_i -минимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i \in N)$
b_i^* -максимална свакодневна потреба организма за i -тим хранљивим састојком $(i \in N)$
c_j -јединична цена j -тог прехрамбеног производа $(j \in M)$
x_j -непознате дневне потребе за j -тим прехрамбеним производом $(j \in M)$

Општи математички модел проблема исхране

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$b_i^* \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

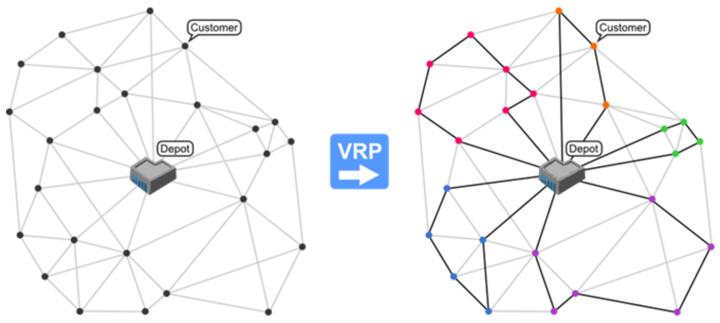
$$f(x) = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

п.о.

$$b_i^* \geq \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in M$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in N$$

Проблем рутирања (*Vehicle Routing Problem - VRP*)

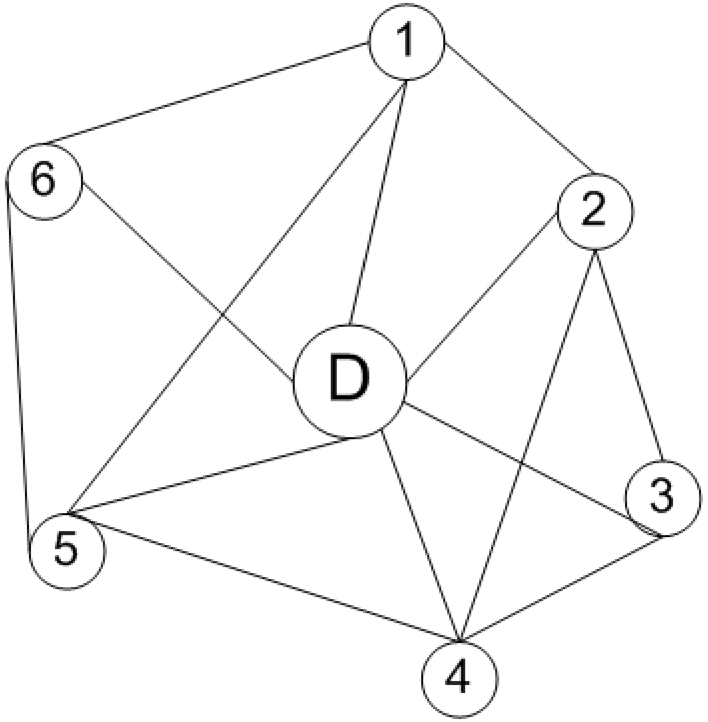


- Моделирање проблема рутирања
  - Генерисање оптималних рута
  - Налажење оптималних из скупа предефинисаних рута

- Познато је:
  - Градови у које треба испоручити робу – сваки град треба обићи једанпут;
  - Допустиве руте: градови на рутама, трошак руте;
  - Развожење се обавља једним возилом чији је капацитет ограничен.

- Потребно је одредити руте којима се сваки град посећује тачно једанпут тако да време транспорта буде минимално.

Пример



- Руте са по три града:

1. D-1-2-3-D
2. D-1-2-4-D
3. D-2-3-4-D
4. D-2-4-5-D
5. D-3-4-5-D
6. D-4-5-6-D
7. D-5-6-1-D
8. D-5-1-2-D

VRP - параметри

n - број рута

m - број градова

tr_j - трајање руте j, $j=1,\ldots,n$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ако се рута } j \text{ вози} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad j=1,\ldots,n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако се град } i \text{ налази на рути } j \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad i=1,\ldots,m, \;\; j=1,\ldots,n$$

$$\min\; f(x) = \sum_{j=1}^{n} tr_j \cdot x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 1, \quad i=1,\ldots,m$$

1. D-1-2-3-D
2. D-1-2-4-D
3. D-2-3-4-D
4. D-2-4-5-D
5. D-3-4-5-D
6. D-4-5-6-D
7. D-5-6-1-D
8. D-5-1-2-D

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

VRP – скупови и параметри

1. D-1-2-3-D
2. D-1-2-4-D
3. D-2-3-4-D
4. D-2-4-5-D
5. D-3-4-5-D
6. D-4-5-6-D
7. D-5-6-1-D
8. D-5-1-2-D

J - скуп рута

I - скуп градова

tr_j - трошак руте j, $j=1,\ldots,n$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ако се рута } j \text{ вози} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad j=1 \in J$$

J_i - скуп рута на којима се налази град i, $J_i \subset J$, $i \in I$

$$\min\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} tr_j \cdot x_j$$

п.о.

$$\sum_{j \in J_i} x_j = 1, \quad i \in I$$

$$J_1 = \{1, 2, 7, 8\}$$
$$J_2 = \{1, 2, 3, 4, 8\}$$
$$J_3 = \{1, 3, 4\}$$
$$J_4 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$J_5 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$J_6 = \{6, 7\}$$

Проблем краткорочног финансирања

- Дат је новчани ток (*cash flow*) компаније у неком периоду

Месец	Јануар	Фебруар	Март	Април	Мај	Јун
Нето новчани ток*	−150.000	−100.000	200.000	−200.000	50.000	300.000

- Да би обезбедила ликвидност, компанија мора да користи краткорочне кредите. Извори краткорочног финансирања су:
  - Кредитна линија у висини до 100.000 динара, са каматном стопом од 1% месечно. (од јануара до маја узимање, од фебруара до јуна враћање).
  - Комерцијални запис са роком доспећа од 3 месеца и каматном стопом од 2% за дати период. (од јануара до марта узимање, од априла до јуна враћање).
  - Вишак средстава може бити инвестиран по каматној стопи од 0.3 % месечно.
- Потребно је одредити колико средстава из ког извора финансирања, компанија треба да користи сваког месеца у периоду од јануара до јуна како би вишак новчаних средстава у јуну месецу био што већи.

Конкретан математички модел

Шта су управљачке променљиве?

x_i – износ кредита узетог из кредитне линије у i-том месецу,

y_i – износ кредита узетог из комерцијаног записа у i-том месецу,

z_i – вишак средстава у i-том месецу.

$$\max v$$

$$x_1 + y_1 - z_1 = 150000$$

$$x_2 + y_2 - 1.01x_1 + 1.003z_1 - z_2 = 100000$$

$$x_3 + y_3 - 1.01x_2 + 1.003z_2 - z_3 = -200000$$

$$x_4 - 1.02y_1 - 1.01x_3 + 1.003z_3 - z_4 = 200000$$

$$x_5 - 1.02y_2 - 1.01x_4 + 1.003z_4 - z_5 = -50000$$

$$- 1.02y_3 - 1.01x_5 + 1.003z_5 - v = -300000$$

$$x_1 \leq 100000$$

$$x_2 \leq 100000$$

$$x_3 \leq 100000$$

$$x_4 \leq 100000$$

$$x_5 \leq 100000$$

$$x_i,\ y_i,\ z_i \geq 0$$

Општи математички модел

n – број периода (месеци), N = {-1..n} – скуп периода (месеци)
O – скуп могућих начина отплате (колико је одложено плаћање)
NP ={2..n} – скуп периода у којима се отплаћује
B – скуп извора финансирања
Dk – скуп извора финансирања по к-том начину отплате, k∈B

ak - износ камате по k-том начину отплате, k∈B
ci – новчани ток у i-том месецу, i∈N
dj – максимални износ који се може узети из j-тог извора финансирања у току једног периода, j∈Dk, k∈B
ok – рок отплате по k-том начину отплате, k∈B
u – камата од уложеног вишка средстава
vki – 1 ако постоји отплата у i-том месецу по k-том начину отплате, 0 у супротном, k∈B, i∈N

xij – износ средстава узетих из j-тог извора финансирања у i-том месецу, j∈Dk, k∈B, i∈N
zi - вишак средстава у i-том месецу, i∈N

$$\max\ f(x) = z_n$$
$$p.o.$$
$$\sum_{k\in O}\sum_{j\in D_k} x_{1j} - z_1 = c_1$$
$$\sum_{k\in O}\sum_{j\in D_k} x_{ij} - \sum_{k\in O}\sum_{j\in D_k} v_{ki}\cdot a_j \cdot x_{i-o_k j} + u\cdot z_{i-1} - z_i = c_i,\ i\in NP$$
$$0 \le x_{ij} \le d_j,\ i\in N,\ j\in B$$

ЛИНЕАРИЗАЦИЈА НЕЛИНЕАРНИХ УСЛОВА

Променљиве као индикатори стања

$$x - M \cdot \delta \leq 0$$

- M – максимална могућа вредност променљиве x

$$\delta = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Пример избор асортимана

- Потребно је производити бар две врсте производа.

x_1	Број ТС које треба произвести
x_2	Број КС које треба произвести
x_3	Број БК које треба произвести

Максимизација укупног прихода	$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$
	п.о.
Расположиви капацитет машине М1	$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$
Расположиви капацитет машине М2	$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$
Расположиво време радника	$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$
Расположива сировина	$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \leq 6000$
Тржишна ограничења за ТС	$x_1 \leq 180$
Тржишна ограничења за КС	$x_2 \leq 210$
Тржишна ограничења за БК	$x_3 \leq 100$

Пример избор асортимана

- Потребно је производити бар две врсте производа.

Максимизација укупног прихода	$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$
	п.о.
Расположиви капацитет машине М1	$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$
Расположиви капацитет машине М2	$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$
Расположиво време радника	$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$
Расположива сировина	$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \leq 6000$
Тржишна ограничења за ТС	$x_1 \leq 180$
Тржишна ограничења за КС	$x_2 \leq 210$
Тржишна ограничења за БК	$x_3 \leq 100$

$$x - M \cdot \delta \leq 0$$

$$x_1 - 180 \cdot \delta_1 \leq 0$$
$$x_2 - 210 \cdot \delta_2 \leq 0$$
$$x_3 - 100 \cdot \delta_3 \leq 0$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 2$$

Пример избор асортимана

- Потребно је производити бар *q* врста производа.

$$(\max) f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \le l_k, (k = 1, 2, ..., s)$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{vj} x_j \le h_v, (v = 1, 2, ..., r)$$

$$x_j \le z_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

$$x_j - z_j \cdot \delta_j \le 0, \ (j = 1, 2, ..., n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \ge q$$

$$x_j \ge 0, \ \delta_j \in \{0, 1\}, (j = 1, 2, ..., n)$$

$$x - M \cdot \delta \le 0$$

Логички услови

$$x - M \cdot \delta \leq 0$$

- ИЛИ $x_i \vee x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i + \delta_j \geq 1 \qquad \bigvee_{j \in J} x_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j \in J} \delta_j \geq 1$
- Ексклузивно ИЛИ $x_i \vee_e x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i + \delta_j = 1 \qquad \bigvee_{j \in J} {}_e x_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j \in J} \delta_j = 1$
- И $x_i \wedge x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i = 1,\ \delta_j = 1 \qquad \bigwedge_{j \in J} x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_j \geq 1,\ j \in J$
- Импликација $x_i \Rightarrow x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i - \delta_j \leq 0$
- Еквиваленција $x_i \Leftrightarrow x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i - \delta_j = 0$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

$$x_1 - 180 \cdot \delta_1 \le 0$$
$$x_2 - 210 \cdot \delta_2 \le 0$$
$$x_3 - 100 \cdot \delta_3 \le 0$$

$$\delta_1 + \delta_3 \ge 1$$

Мора да се производи П1 или П3.

$$x_i \vee x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i + \delta_j \ge 1$$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

$$x_1 - 180\cdot\delta_1 \le 0$$

$$x_2 - 210\cdot\delta_2 \le 0$$

$$x_3 - 100\cdot\delta_3 \le 0$$

$$\delta_2 + \delta_3 = 1$$

Може да се производи или П2 или П3.

$$x_i \vee_e x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i + \delta_j = 1$$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \leq 6000$$

$$x_1 \leq 180$$

$$x_2 \leq 210$$

$$x_3 \leq 100$$

$$x_1 - 180 \cdot \delta_1 \leq 0$$

$$x_2 - 210 \cdot \delta_2 \leq 0$$

$$x_3 - 100 \cdot \delta_3 \leq 0$$

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = 1,\ \delta_3 = 1$$

Морају да се производе сви производи.

$$\bigwedge_{j \in J} x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_j \geq 1,\ j \in J$$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4\cdot 12\cdot 8\cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

$$x_1 - 180\cdot\delta_1 \le 0$$

$$x_2 - 210\cdot\delta_2 \le 0$$

$$x_3 - 100\cdot\delta_3 \le 0$$

$$\delta_1 - \delta_3 \le 0$$

П1 може да се производи само ако се производи П3.

$$x_i \Rightarrow x_j \quad \Leftrightarrow \delta_i - \delta_j \le 0$$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \leq 6000$$

$$x_1 \leq 180$$

$$x_2 \leq 210$$

$$x_3 \leq 100$$

$$x_1 - 180 \cdot \delta_1 \leq 0$$

$$x_2 - 210 \cdot \delta_2 \leq 0$$

$$x_3 - 100 \cdot \delta_3 \leq 0$$

$$\delta_1 - \delta_3 = 0$$

П1 и П2 може да се производи само ако се производи П3 и обрнуто.

$$x_i \Leftrightarrow x_j \quad \Leftrightarrow \quad \delta_i - \delta_j = 0$$

Рационална функција циља

$$\max/\min\ f(x)=\frac{h(x)}{d(x)}$$

п.о.

$$g_i(x)\le b_i,\ i\in I$$

$$d(x)>0$$

$$\frac{h(x)}{d(x)}=t$$

$$h(x)=t\cdot d(x) \qquad h(x)-t\cdot d(x)=0$$

$$\max/\min t$$

п.о.

$$h(x)-t\cdot d(x)=0$$

$$g_i(x)\le b_i,\ i\in I$$

Пример

$$(\max)\ f(x) = 24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

Ако се зна да је јединични трошак производње ТС 18000, КС 15000 и БК 43000, одредити асортиман којим се максимизира профитна стопа.

Пример

$$(\max)\, f(x) = \frac{24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3 - (18000x_1 + 15000x_2 + 43000x_3)}{24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3}$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

Ако се зна да је јединични трошак производње ТС 18000, КС 15000 и БК 43000, одредити асортиман којим се максимизира профитна стопа.

Пример

$$(\max)\ f(x) = \frac{6000x_1 + 4000x_2 + 7000x_3}{24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3}$$

п.о.

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \le 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \le 6000$$

$$x_1 \le 180$$

$$x_2 \le 210$$

$$x_3 \le 100$$

Ако се зна да је јединични трошак производње ТС 18000, КС 15000 и БК 43000, одредити асортиман којим се максимизира профитна стопа.

Пример

$$(\max)\ f(x) = t$$

п.о.

$$6000x_1 + 4000x_2 + 7000x_3 - t \cdot (24000x_1 + 19000x_2 + 50000x_3) = 0$$

$$32x_1 + 27x_2 + 38x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 45x_3 \leq 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (11520)$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 60\ (23040)$$

$$15x_1 + 8x_2 + 50x_3 \leq 6000$$

$$x_1 \leq 180$$

$$x_2 \leq 210$$

$$x_3 \leq 100$$

Ако се зна да је јединични трошак производње ТС 18000, КС 15000 и БК 43000, одредити асортиман којим се максимизира профитна стопа.

Max, min

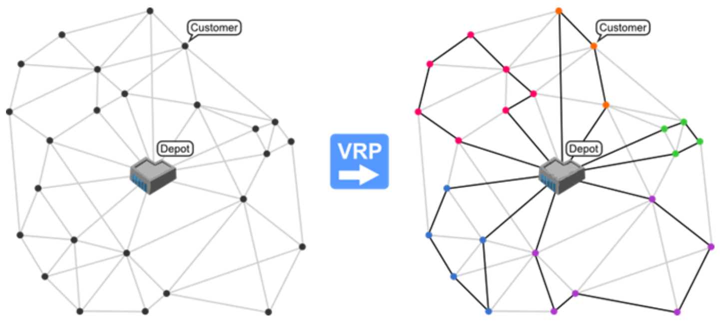
$$\min \max_{j \in J} \{ f_j(x) \}$$
п.о.
$$g_i(x) \le b_i,\ i \in I$$

$$f_j(x) \le W,\ \ j \in J$$

W – помоћна променљива

$$\min W$$
п.о.
$$f_j(x) \le W,\ \ j \in J$$
$$g_i(x) \le b_i,\ i \in I$$

Пример *VRP*



- Моделирање проблема рутирања
  - Генерисање оптималних рута
  - Налажење оптималних из скупа предефинисаних рута

- Познато је:
  - Градови у које треба испоручити робу – сваки град треба обићи једанпут;
  - Допустиве руте: градови на рутама, трошак руте;
  - Сваку руту вози различито возило и истовремено крећу у развожење.

- Потребно је одредити руте којима се сваки град посећује тачно једанпут тако да време транспорта буде минимално.

VRP – скупови и параметри

J - скуп рута

I - скуп градова

tr_j - трошак руте j, $j=1,\ldots,n$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ако се рута } j \text{ вози} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad j = 1 \in J$$

J_i - скуп рута на којима се налази град i, $J_i \subset J,\ i \in I$

$$\min\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} tr_j \cdot x_j$$

п.о.

$$\sum_{j \in J_i} x_j = 1, \quad i \in I$$

Да ли је потребно минимизирати укупно трајање?

VRP – скупови и параметри

J - скуп рута

I - скуп градова

tr_j - трошак руте j, $j=1,\ldots,n$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ако се рута } j \text{ вози} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad j = 1 \in J$$

J_i - скуп рута на којима се налази град i, $J_i \subset J$, $i \in I$

$$\min \; f(x) = \max_{j \in J} \{ tr_j \cdot x_j \}$$

п.о.

$$\sum_{j \in J_i} x_j = 1, \quad i \in I$$

Да ли је потребно минимизирати укупно трајање?

VRP – скупови и параметри

J - скуп рута

I - скуп градова

tr_j - трошак руте j, $j=1,\ldots,n$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ако се рута } j \text{ вози} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad j = 1 \in J$$

J_i - скуп рута на којима се налази град i, $J_i \subset J$, $i \in I$

$$\min f(x) = \max_{j \in J}\{tr_j \cdot x_j\}$$

п.о.

$$\sum_{j \in J_i} x_j = 1, \quad i \in I$$

$$\min W$$

п.о.

$$\sum_{j \in J_i} x_j = 1, \quad i \in I$$

$$tr_j \cdot x_j \le W, \; j \in J$$

Распоређивање учесника промоције

- Скупу запослених треба у задатом периоду доделити дане дежурства.
- Сваки запослени треба да дежура једанпут у једном дану.
- Временски размак између дежурстава сваког запосленог треба да буде највише r дана.
- За сваког запосленог је познат скуп дана када може да буде ангажован.

Нотација

D - скуп дана у којима се додељују дежурства

E - скуп радника

D_j - скуп дана када радник j може да дежура, $D_j \subset D,\ j \in E$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако радник } j \text{ ради дана } i \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases},\quad i \in D_j,\ j \in E$$

y_j - дан када ће радник j дежурати, $j \in E$

$$\sum_{i \in D_j} x_{ij} = 1,\quad j \in E$$

Услов да свако дежура једанпут.

$$y_j - \sum_{i \in D_j} i \cdot x_{ij} = 0,\quad j \in E$$

Како би изгледало ограничење да смо користили параметре?
Колико би било променљивих?

Како одредити ко ће дежурати ког дана.

$$|y_j - y_k| \le r \quad j,k \in E,\ \ j \ne k$$

$$y_j - y_k \le r \quad j,k \in E,\ \ j \ne k \qquad h(x) \le a, -h(x) \le a$$

Услов за временски размак.

Апсолутна вредност

- Апсолутна вредност у ограничењима (≥)

===+------------------------+===

-a 0 +a

$$\begin{aligned}&\min/\max\ f(x)\\&\text{п.о.}\\&|h(x)|\geq a\\&g_i(x)\leq b_i,\ i\in I\end{aligned}$$

$$\delta=\begin{cases}1 & \text{ако je}\quad a\leq h(x)\leq m\\0 & \text{ако je}\ -m\leq h(x)\leq -a\end{cases}$$

$$h(x)-m\cdot\delta+a\cdot(1-\delta)\leq 0$$
$$h(x)-a\cdot\delta+m\cdot(1-\delta)\geq 0$$

$$\begin{aligned}&\min/\max\ f(x)\\&\text{п.о.}\\&h(x)-m\cdot\delta+a\cdot(1-\delta)\leq 0\\&h(x)-a\cdot\delta+m\cdot(1-\delta)\geq 0\\&g_i(x)\leq b_i,\ i\in I\end{aligned}$$

$$|h(x)|\pm d(x)\geq a$$
$$h(x)-m\cdot\delta+a\cdot(1-\delta)\pm d(x)\leq 0$$
$$h(x)-a\cdot\delta+m\cdot(1-\delta)\pm d(x)\geq 0$$

Распоређивање учесника промоције

- Скупу запослених треба у задатом периоду доделити дане дежурства.
- Сваки запослени треба да дежура једанпут.
- Временски размак између дежурстава сваког запосленог треба да буде бар *r* дана.
- За сваког запосленог је познат скуп дана када може да буде ангажован.

Нотација

D - скуп дана у којима се додељују дежурства

E - скуп радника

D_j - скуп дана када радник j може да дежура, $D_j \subset D,\ j \in E$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако радник } j \text{ ради дана } i \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases},\ i \in D_j,\ j \in E$$

y_j - дан када ће радник j дежурати, $j \in E$

$$\sum_{i \in D_j} x_{ij} = 1,\ \ j \in E$$

$$y_j - \sum_{i \in D_j} i \cdot x_{ij} = 0,\ j \in E$$

$$|\, y_j - y_k \,| \geq r,\ \ j,k \in E,\ \ j \neq k$$

$$y_j - y_k - m \cdot \delta_{jk} + r \cdot (1 - \delta_{jk}) \leq 0,\ \ j,k \in E,\ \ j \neq k$$

$$y_j - y_k - r \cdot \delta_{kj} + m \cdot (1 - \delta_{jk}) \geq 0,\ \ j,k \in E,\ \ j \neq k$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \quad a \leq h(x) \leq m \\ 0 & \text{ako je } -m \leq h(x) \leq -a \end{cases}$$

$$h(x) - m \cdot \delta + a \cdot (1 - \delta) \leq 0$$

$$h(x) - a \cdot \delta + m \cdot (1 - \delta) \geq 0$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \quad r \leq y_j - y_k \leq m \\ 0 & \text{ako je } -m \leq y_j - y_k \leq -r \end{cases}$$

Услов за временски размак.

ВЕЖБАЊЕ

СУДОКУ

- Матрица димензија 9x9;
- Подељена на 9 подматрица димензија 3x3;
- Пољима се додељују бројеви од 1 до 9;
- Сваки ред мора да садржи различите бројеве;
- Свака колона мора да садржи различите бројеве;
- Свака подматрица мора да садржи различите бројеве.

- Одређени број поља је унапред попуњен.

5			1					
	9	6				8	2	
					7			9
					3			6
	7	4				9	1	
2			5					
7			6					
	8	3				5	7	
					4			1

СУДОКУ

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ако је пољу } (i, j) \text{ додељен број } k \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \ i = \overline{1,9}, \ j = \overline{1,9}, \ k = \overline{1,9}$$

$$S = \{(i, j, k)\}$$

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1, \ i = \overline{1,9}, \ j = \overline{1,9}$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1, \ i = \overline{1,9}, \ k = \overline{1,9}$$

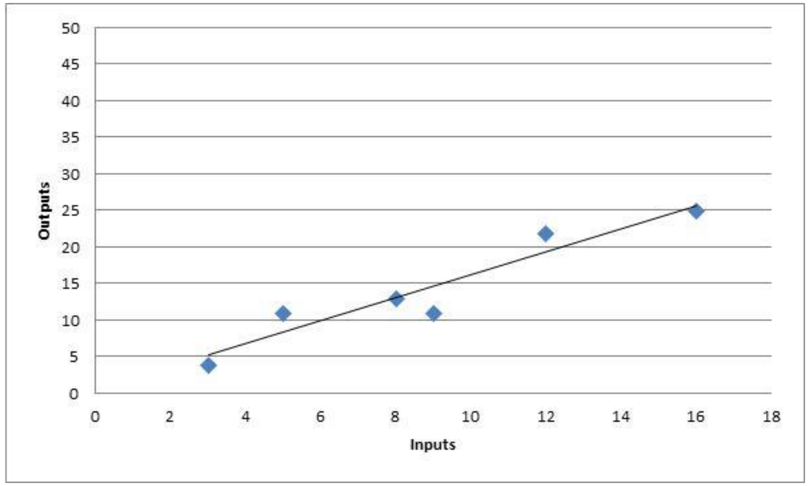
$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1, \ j = \overline{1,9}, \ k = \overline{1,9}$$

$$\sum_{i=I}^{I+2} \sum_{j=J}^{J+2} x_{ijk} = 1, \ I = 1, 4, 7, \ J = 1, 4, 7, \ k = \overline{1,9}$$

$$x_{ijk} = 1, \ (i, j, k) \in S$$

Линеарна апроксимација (*Curve fitting problem*)

- Познати су уређени парови вредности (x ,y).
- Потребно је одредити вредности a и b тако да се:
  - минимизира укупно одступање;
  - минимизира максимално одступање.



$$y = a \cdot x + b$$

Линеарна апроксимација (*Curve fitting problem*)

I – скуп тачака (број парова вредности (*x* ,*y*))

Параметри:

$x_i, i \in I$

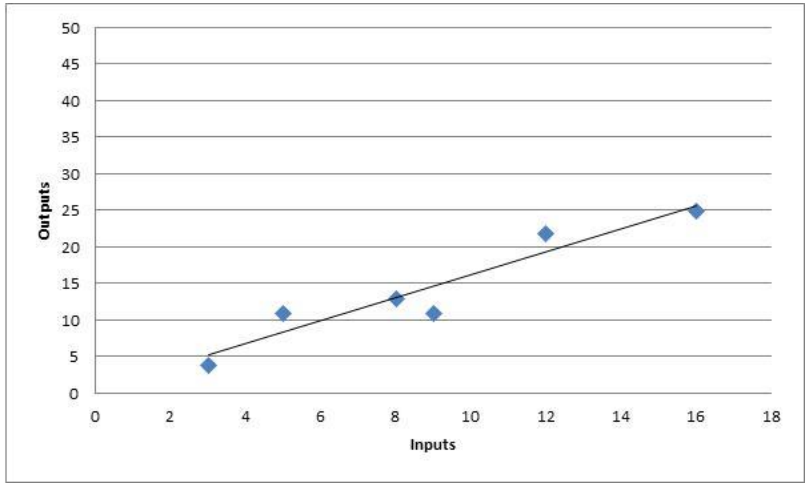
$y_i, i \in I$

Промењљиве:

a, b

$u_i, i \in I$

$v_i, i \in I$



$$y = a \cdot x + b$$

ММ (укупно одступање)

$$\min f = \sum_{i \in I} (u_i + v_i)$$

п.о.

$$a \cdot x_i + b + u_i - v_i = y, \ i \in I$$

Линеарна апроксимација (*Curve fitting problem*)

I – скуп тачака (број парова вредности (*x* ,*y*))

Параметри:

$x_i, i \in I$

$y_i, i \in I$

Променљиве:

a, b

$u_i, i \in I$

$v_i, i \in I$

z

ММ (максимално одступање)

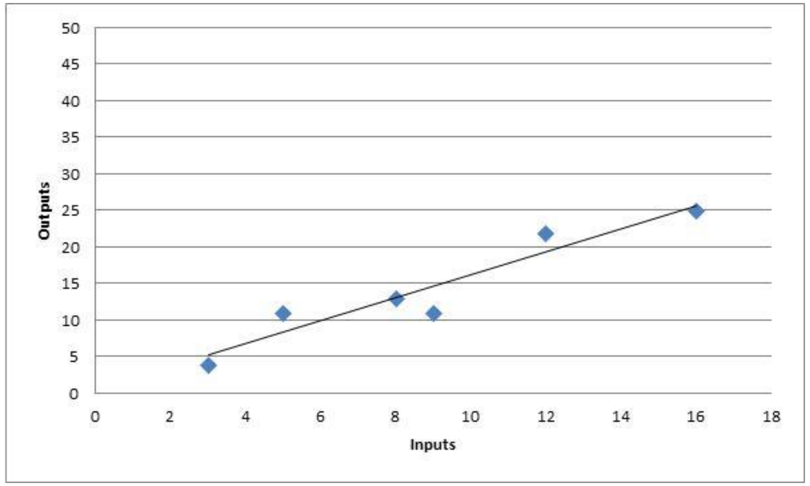
$$\min z$$

п.о.

$$a \cdot x_i + b + u_i - v_i = y,\ \ i \in I$$

$$z - u_i \geq 0,\ \ i \in I$$

$$z - v_i \geq 0,\ \ i \in I$$



$$y = a \cdot x + b$$