

MERENJE EFIKASNOSTI POSLOVNIH SISTEMA

3/21/2019

Gordana Savić, Milan Martić

A horizontal bar at the top of the slide, divided into a red section on the left and a teal section on the right.

Potpuno rangiranje

Potpuno rangiranje

3

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}
A	50	75	210
B	50	110	190
C	60	120	252
D	100	275	200
E	40	100	120
F	50	75	90
G	90	225	180

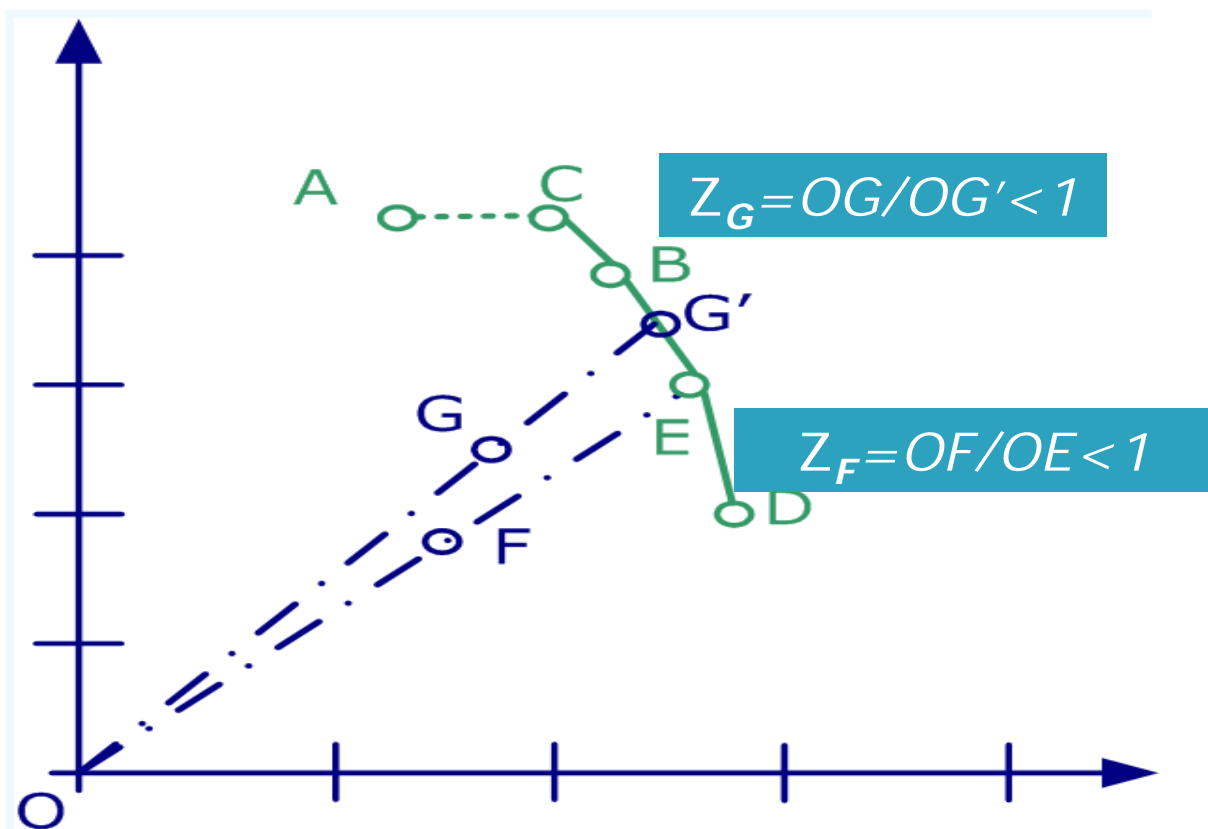
Potpuno rangiranje

4

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	Ulazno orijentisani CCR model		
				$\frac{\text{BAK}}{\text{BKA}}$	$\frac{\text{UBIK}}{\text{BKA}}$	h_k
A	50	75	210	1.50	4.20	1.00
B	50	110	190	2.20	3.80	1.00
C	60	120	252	2.00	4.20	1.00
D	100	275	200	2.75	2.00	1.00
E	40	100	120	2.50	3.00	1.00
F	50	75	90	1.50	1.80	0.60
G	90	225	180	2.50	2.00	0.92

Potpuno rangiranje

5



Ulazno orijentisani CCR model		
<u>BAK</u> BKA	<u>UBIK</u> BKA	h_k
1.50	4.20	1.00
2.20	3.80	1.00
2.00	4.20	1.00
2.75	2.00	1.00
2.50	3.00	1.00
1.50	1.80	0.60
2.50	2.00	0.92

Potpuno rangiranje

- Matrica unakrsne efikasnosti
- Prema broju pojavljivanja u skupu referentnih jedinica
- Uvođenje idealne tačke
- DEA model za ocenu superefikasnosti

DMU	BKA {x1}	BAK {y2}	UBIK {y2}	Efikasnost	Težine		
					u1	v1	v2
A	50	75	210	1.00	0.0200	0.0000	0.0048
B	50	110	190	1.00	0.0200	0.0053	0.0022
C	60	120	252	1.00	0.0167	0.0018	0.0031
D	100	275	200	1.00	0.0100	0.0036	0.0000
E	40	100	120	1.00	0.0250	0.0073	0.0022
F	50	75	90	0.60	0.0200	0.0098	0.0029
G	90	225	180	0.92	0.0111	0.0037	0.0009

Matrica unakrsne efikasnosti

8

Matrica unakrsne efikasnosti

DMU	A	B	C	D	E	F	G
A	1.00	0.90	1.00	0.48	0.71	0.43	0.48
B	0.86	1.00	0.99	0.95	0.99	0.59	0.88
C	0.95	0.95	1.00	0.67	0.83	0.50	0.64
D	0.55	0.80	0.73	1.00	0.91	0.55	0.91
E	0.81	0.98	0.96	0.98	1.00	0.60	0.91
F	1.35	1.64	1.60	1.64	1.67	0.60	1.52
G	0.85	1.05	1.02	1.08	1.08	0.65	0.92
<i>Prosek</i>	<i>0.909</i>	<i>1.046</i>	<i>1.042</i>	<i>0.972</i>	<i>1.028</i>	<i>0.559</i>	<i>0.895</i>
<i>Rang</i>	5	1	2	4	3	7	6

Excel fajl primer

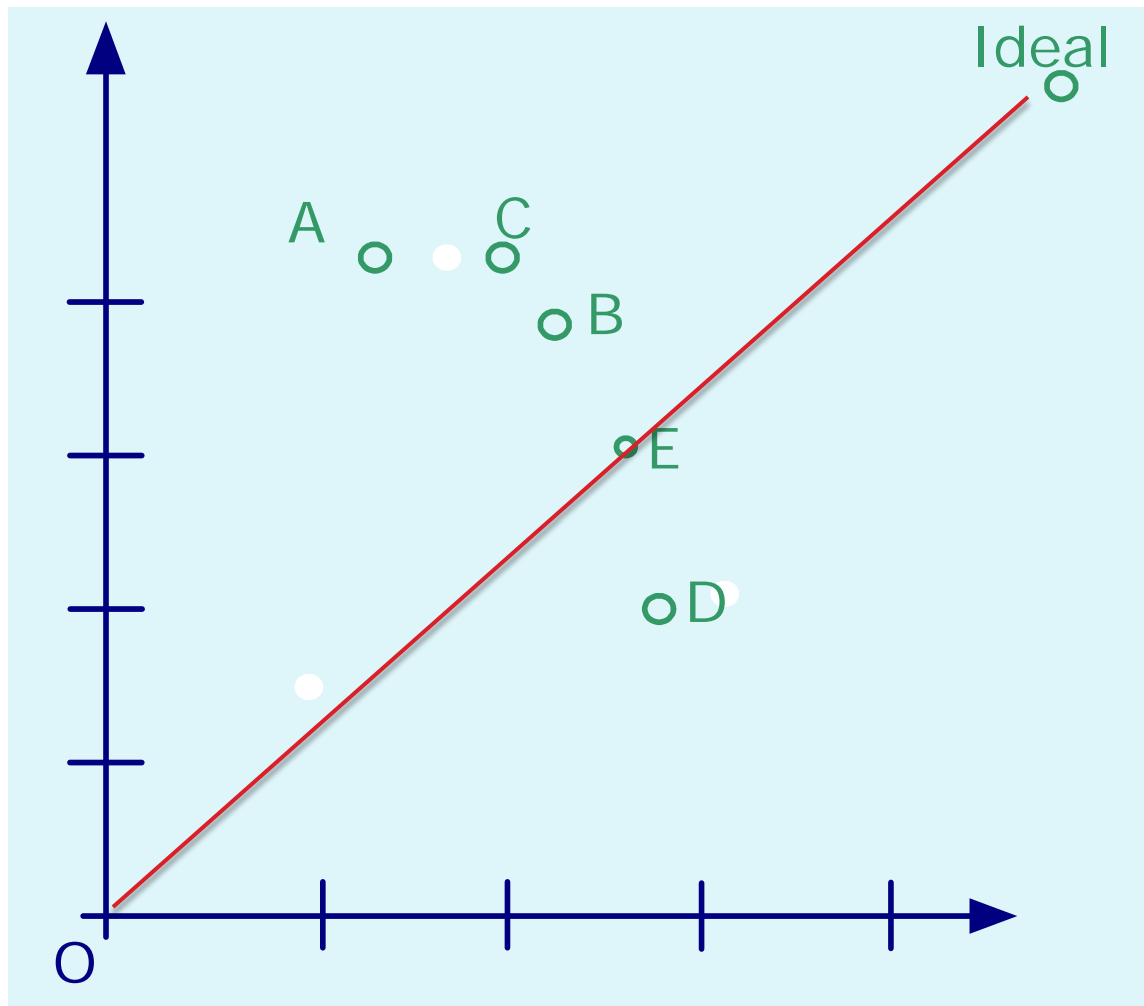


Idealna tačka

9

DMU	BKA	BAK	UBIK	Izlazno orijentisani model (U)					
				<u>UBIK</u> BKA	<u>UBIK</u> BAK	CCR	Rang	BCC	Rang
A	50	75	210	1.5	4.2	0.67	1	0.80	2
B	50	110	190	2.2	3.8	0.60	2	0.80	2
C	60	120	252	2	4.2	0.67	1	0.67	3
D	100	275	200	2.8	2	0.40	4	0.40	5
E	40	100	120	2.5	3	0.48	3	1.00	1
F	50	75	90	1.5	1.8	0.29	6	0.80	2
G	90	225	180	2.5	2	0.36	5	0.44	4
Ideal	40	275	252	6.9	6.3	1.00		1.00	

Idealna tačka



Merenje superefikasnosti

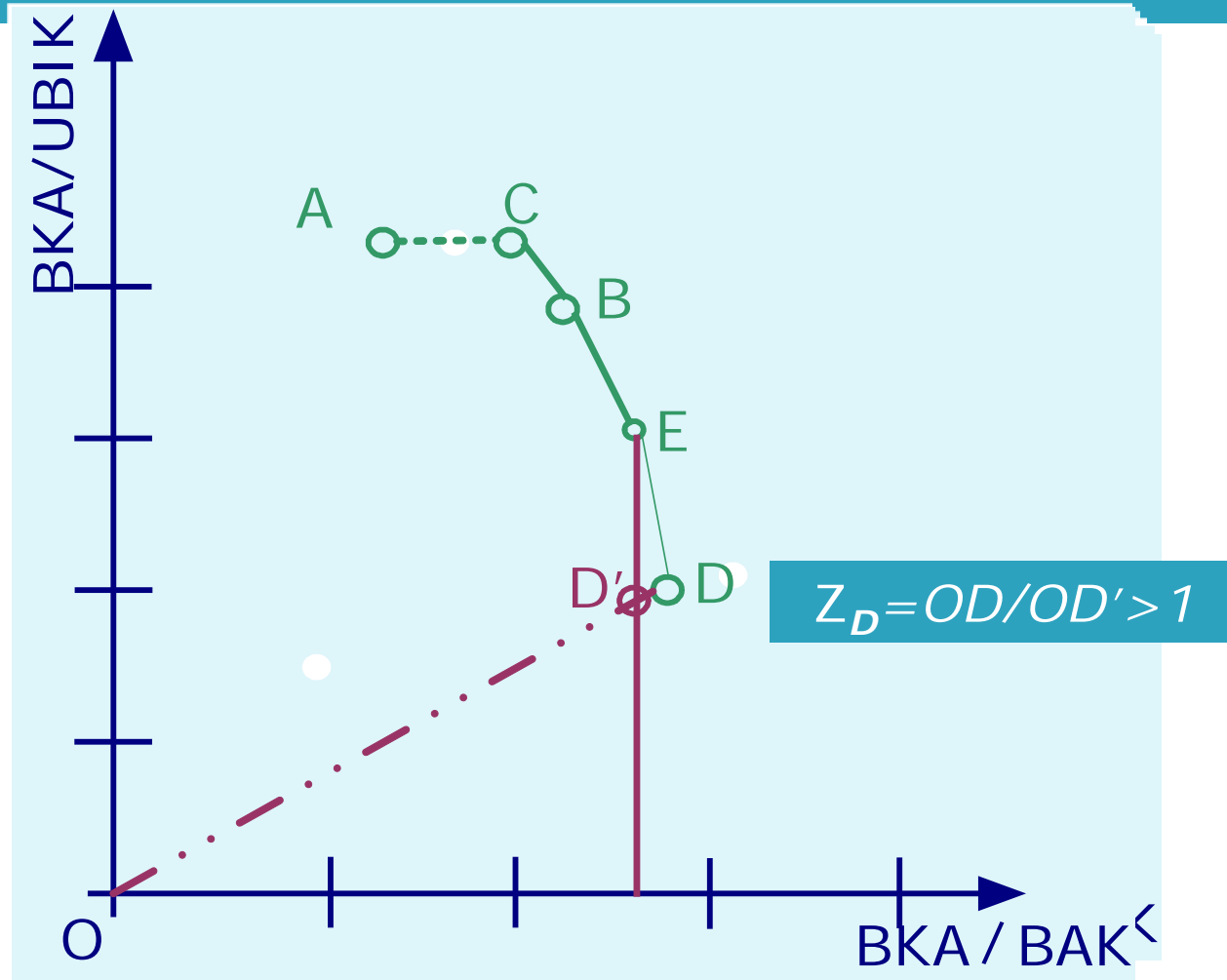
11

- Andersen P, Petersen NC. "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis" 1993

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	Ulazno orijentisani CCR model		Ulazno orijent. AP model		
				BAK / BKA	UBIK / BKA	h_k	h'_k	Rang
A	50	75	210	1.50	4.20	1.00	1.00	5
B	50	110	190	2.20	3.80	1.00	1.01	4
C	60	120	252	2.00	4.20	1.00	1.06	2
D	100	275	200	2.75	2.00	1.00	1.10	1
E	40	100	120	2.50	3.00	1.00	1.02	3
F	50	75	90	1.50	1.80	0.60	0.60	7
G	90	225	180	2.50	2.00	0.92	0.92	6

Merenje superefikasnosti

12



Primalni AP DEA model (CRS pretpostavka)

13

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s v_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m u_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s v_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m u_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq k$$

$$v_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dualni AP DEA model (CRS pretpostavka)

14

$$(Min) Z_k = -s \sum_{r=1}^s r^+ + s \sum_{i=1}^m i^-$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \lambda_{jk} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Rangovi

15

DMU	Ideal	Unakrsna efikasnost	Broj uzornih	AP input
A	1	5	5	5
B	3	1	4	4
C	1	2	2	2
D	5	4	2	1
E	4	3	1	3
F	7	7	7	7
G	6	6	6	6

16

Proširenja DEA modela

Proširenja DEA modela

17

- Ulazi i/ili izlazi egzogeno fiksirani
- Ulazi i/ili izlazi kategorijske prirode
- Ograničavanje težina
- Podešavanje ulazno-izlaznih nivoa

Egzogeno fiksirane varijable

18

- reklame, konkurencija,...
- Banker i Morej ocenjujući efikasnost 60 restorana brze hrane u okviru lanca restorana
- Ulazi:
 - ▣ troškovi nabavke
 - ▣ plate radnika
 - ▣ starost lokala
 - ▣ troškovi reklame
 - ▣ da li je lokal u urbanoj ili ruralnoj oblasti i
 - ▣ da li je moguće posluživanje gosta u restoranu ili nije

Egzogeno fiksirane varijable

19

$$(Min) Z_k = s \sum_{r=1}^s y_{rk}^+ - \bar{s} \sum_{i=1}^m \bar{y}_{ik}$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \lambda_{lk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{ij} - \bar{i}_i = 0 \quad \in_d$$

$$x_{lk} \lambda_{lk} - \sum_{j=1}^n s_j \cdot y_{ij} - \bar{i}_i = 0 \quad \in_f$$

$$\lambda_j, s_r^+, \bar{s}_i \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Kategorijski ulazi ili izlazi

20

- Banker i Morej su ocenjivali efikasnost 69 apoteka na osnovu podataka za 4 ulaza i 2 izlaza.
- Ulazi:
 - plate radnika,
 - operativni troškovi,
 - prosečna veličina zaliha i
 - veličina tržišta izražena kao broj stanovnika u gradu u kome se apoteka nalazi

$d_{\ell}^k = 0$, $\ell = 1, 2, \dots, L$; (kategorija 1),

$d_{\ell}^k = 1$, $d_1^k = 0$, $\ell = 2, 3, \dots, L$; (kategoriji 2)

$d_{\ell}^k = 1$, $d_1^k = 1$, $d_l^k = 0$, $\ell = 3, 4, \dots, L$; (kategoriji 3).

...

$d_{\ell}^k = 1$, $\ell = 1, 2, \dots, L$; (kategorija $L+1$).

Kategorijski ulazi ili izlazi

21

$$(Min) Z_k = s \sum_{r=1}^s s_r^+ - \bar{s} \sum_{i=1}^m \bar{i}_i$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \lambda_{lk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{ij} - \bar{i}_i = 0 \quad m = 1, \dots, -1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j d_j^l \leq d_k^l, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\lambda_j, s_r^+, \bar{s}_i \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$d_j^l = \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

- Osnovni DEA modeli dopuštaju jedinici čija se efikasnost ocenjuje potpunu fleksibilnost u izboru težinskih koeficijenata.
- Dodavanje ograničenja na težinske koeficijente i uključivanje vrednosnih procena.
- Uključivanje vrednosnih procena u ocenjivanje efikasnosti ima za cilj da se uzmu u obzir raniji pogledi i znanja o efikasnosti posmatranih DMU.

23

Ograničavanje težina

Ograničavanje težina

Primer (Beasley, Wong 1990)

24

	Ulazi			Izlazi		
	# akademskog osoblja	Trošak za akademsko osoblje	Trošak za neakademsko osoblje	# studnata osnovnih studija	# studnata poslediplomskih studija	# naučnih radova
1	12	400	20	60	35	17
2	19	750	70	139	41	40
3	42	1500	70	225	68	75
4	15	600	100	90	12	17
5	45	2000	250	253	145	130
6	19	730	50	132	45	45
7	41	2350	600	305	159	97

Ograničavanje težina

25

Težine							
Ulazi				Izlazi			
h_k	# akademskog osoblja	Trošak za akademsko osoblje	Trošak za neakademsko osoblje	# studnata osnovnih studija	# studnata poslediplomskih studija	# naučnih radova	
1	1	0.00000	0.00055	0.03906	0.00000	0.02857	0.00000
2	1	0.04488	0.00020	0.00000	0.00719	0.00000	0.00000
3	1	0.00000	0.00000	0.01429	0.00131	0.00000	0.00941
4	0.82	0.06415	0.00006	0.00000	0.01111	0.00000	0.00000
5	1	0.02222	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00768
6	1	0.03669	0.00000	0.00606	0.00225	0.00394	0.01167
7	1	0.02439	0.00000	0.00000	0.00179	0.00285	0.00000

Ograničavanje težina u DEA modelima

1. Direktno ograničavanje težina,

- potpuna restrikcija težina,
- regioni sigurnosti -I tip,
- regioni sigurnosti -II tip,



Ograničavanje težina u DEA modelima

27

Potpuna restrikcija težina

$$\delta_i \leq v_i \leq \tau_i$$

$$\rho_i \leq u_r \leq \eta_r$$

Ograničavanje težina

28

	h_k	# akademskog osoblja	Trošak za akademsko osoblje
1	1	0.00000	0.00055
2	1	0.04488	0.00020
3	1	0.00000	0.00000
4	0.82	0.06415	0.00006
5	1	0.02222	0.00000
6	1	0.03669	0.00000
7	1	0.02439	0.00000

$$0.02 \leq \nu_1 \leq 0.1$$

$$0.000001 \leq \nu_2 \leq 0.0001$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

Regioni sigurnosti -I tip

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i+1}} \leq \beta_i$$

$$v_i - \alpha_i v_{i+1} \geq 0$$

$$v_i - \beta_i v_{i+1} \leq 0$$

Ograničavanje težina u DEA modelima



Regioni sigurnosti -I tip

*Trošak za akademsko
osoblje*

je **bar duplo** važniji od

*Trošak za
neakademsko osoblje*

Ograničavanje težina u DEA modelima



Regioni sigurnosti -I tip

Broj naučnih radova

je bar **podjednako važan**
kao

*Broj studnata osnovnih i
poslediplomskih studija*
zajedno

Ograničavanje težina

Primer (Beasley, Wong 1990)

32

Težine							
Ulazi				Izlazi			
H_k	# akademskog osoblja	Trošak za akademsko osoblje	Trošak za neakademsko osoblje	# studnata osnovnih studija	# studnata poslediplomskih studija	# naučnih radova	
1	0.99	0.00000	0.00244	0.00122	0.00283	0.01504	0.01787
2	1.00	0.04688	0.00015	0.00000	0.00559	0.00000	0.00559
3	0.83	0.00000	0.00065	0.00033	0.00333	0.00000	0.00333
4	0.76	0.06059	0.00015	0.00000	0.00935	0.00000	0.00935
5	1.00	0.02222	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00768
6	1.00	0.00000	0.00132	0.00066	0.00258	0.00000	0.01465
7	1.00	0.02439	0.00000	0.00000	0.00181	0.00106	0.00287

Ograničavanje težina u DEA modelima

Regioni sigurnosti -II tip

$$\gamma_i v_i \geq u_r$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

34

2. Podešavanje posmatranih ulazno-izlaznih nivoa, (Golany)

$$b_1 / b_2 \leq v_1 / v_2 \leq a_1 / a_2$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

35

$$(Max) \quad h_k = \sum_{r=1}^s g_r b_{rk} y_{rk}$$

$$p.o \quad \sum_{i=1}^m w_i a_{ik} x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s g_r b_{rj} y_{rj} - \sum_{i=1}^m w_i a_{ij} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$g_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

3. Ograničavanje virtuelnih ulaza i izlaza (Beasley, Wong 1990).

$$\varphi_r \leq \frac{u_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq \psi_r, j = \overline{1, n}$$

General Assurance Region - GAR model

Ograničavanje virtuelnih ulaza i izlaza

(Podinovski, DEA models with production trade-offs and weight restrictions, 2013)

37

GAR

Regioni sigurosti I

$$\varphi_r \leq \frac{u_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq \psi_r$$

$$, j = \overline{1, n}$$

$$u_r y_{rj} - \varphi_r \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0, j = \overline{1, n}$$

$$u_r y_{rj} - \psi_r \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, j = \overline{1, n}$$

Ograničavanje virtuelnih ulaza i izlaza

Regioni sigurnosti -I tip

*Učešće broja naučnih radova
u ukupnom izlazu mora biti bar
50%*

*Učešće broja studenata
poslediplomskih studija mora
biti između 10% i 40%*

Ograničavanje težina

Primer (Beasley, Wong 1990)

39

	Ulazi			Izlazi		
	# akademskog osoblja	Trošak za akademsko osoblje	Trošak za neakademsko osoblje	# studnata osnovnih studija	# studnata poslediplomskih studija	# naučnih radova
1	12	400	20	60	35	17
2	19	750	70	139	41	40
3	42	1500	70	225	68	75
4	15	600	100	90	12	17
5	45	2000	250	253	145	130
6	19	730	50	132	45	45
7	41	2350	600	305	159	97

Ograničavanje virtuelnih ulaza i izlaza

Regioni sigurnosti -I tip

*Učešće broja naučnih radova
u ukupnom izlazu mora biti bar
50%*

$$0.5 \leq \frac{u_{3j} y_{3j}}{\sum_{r=1}^3 \mu_r y_{rj}}, j = \overline{1,7}$$

*Učešće broja studenata
poslediplomskih studija mora
biti između 10% i 40%*

$$0.1 \leq \frac{u_{2j} y_{2j}}{\sum_{r=1}^3 \mu_r y_{rj}} \leq 0.4, j = \overline{1,7}$$

Softveri

41

EMS (free) – sajt pa.fon.bg.ac.rs

- ☐ Regioni sigurnosti I
- ☐ Regioni sigurnosti II

DEA solver software (Licenced)

- ☐ Regioni sigurnosti I
- ☐ Regioni sigurnosti II
- ☐ Ograničavanje
virtuelnih ulaza i izlaza

Neradijalne mere efikasnosti

42

Aditivni modeli (Charnes, Cooper, Golaney, Seiford, Stutz, 1985)

$$(\min) \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s$$

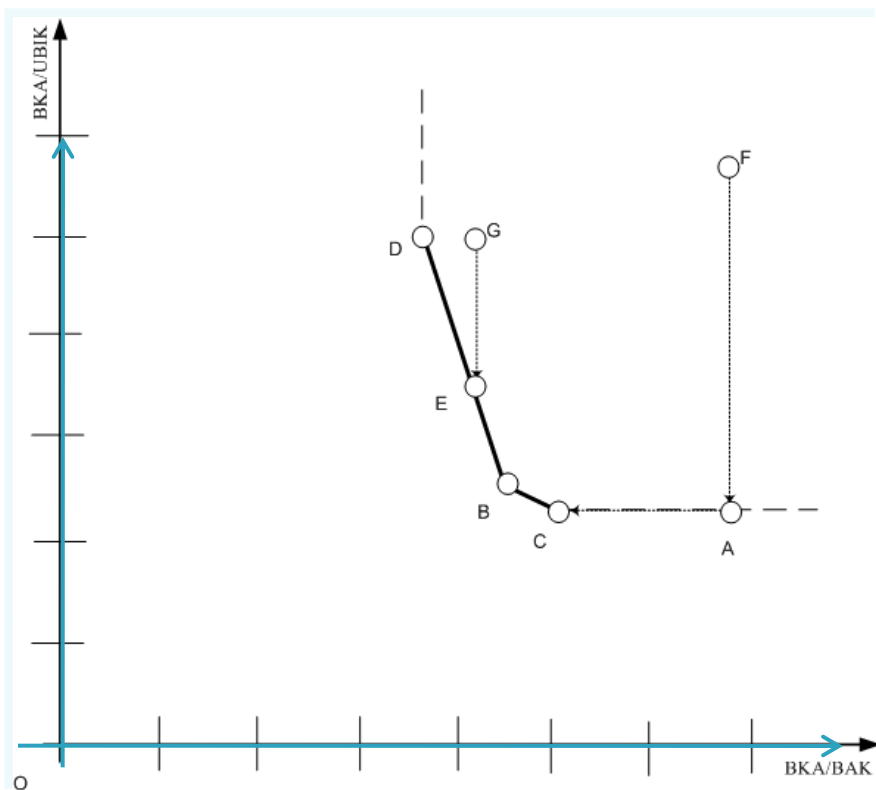
Aditivni modeli

43

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	Aditivni modeli			
				s_{BKA}^-	s_{BAK}^+	s_{UBIK}^+	Z_k
A	50	75	210	0	25	0	0
B	50	110	190	0	0	0	0
C	60	120	252	0	0	0	0
D	100	275	200	0	0	0	0
E	40	100	120	0	0	0	0
F	50	75	90	0	25	120	145
G	90	225	180	0	0	90	90

Aditivni modeli

44



- Invarijantan u odnosu na koordinatni početak
- Osetljiv na promenu opsega

Neradijalne mere efikasnosti

45

Modeli bazirani na dopusnim varijablama (SBM)

$$\mathcal{E}(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^-)$$

\Rightarrow

$$Q = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik} + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}$$

$$\text{Eff} = 1 - Q$$

Neradijalne mere efikasnosti

46

Modeli bazirani na dopusnim varijablama (SBM)
(Tone 2001)

$$(\min) \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}}$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s$$

Prednosti i nedostaci

47

Prednosti

- Lako uključuje brojne ulaze i izlaze
- Ne zahteva se funkcionalna forma proizvodnog odnosa ulaz-izlaz
- Za računanje tehničke efikasnosti nije potrebno specificirati jedinice mere (mogu biti u prirodnim jedinicama), ni cene ulaza/izlaza
- Mogući izvori neefikasnosti mogu biti određeni, kao i nivoi efikasnosti.
- Identifikujući uzore jedinice (“peers”) za neefikasne organizacije, pruža skup uzora prema kojima organizacije mogu poboljšati svoje performanse
- Proširenjem osnovnih modela postiže se prilagođenost problemu koji se rešava

Prednosti i nedostaci

48

Nedostaci

- DEA rezultati su bazirani na uzorku (pojedinačnim opservacijama)
- Pošto je DEA metod zasnovan na određivanju ekstremne tačke, šum (greška pri merenju) može da dovede do značajnih odstupanja
- DEA je pogodna za procenu relativne efikasnosti DMU, ali sporo konvergira ka “apsolutnoj efikasnosti”.
- Kako je DEA neparametarski metod, testiranje statističkih hipoteza je otežano
- Kako standardna formulacija DEA metode podrazumeva kreiranje odvojenih linearnih programa za svaku DMU, obim računanja može biti značajno uvećan