

MERENJE EFIKASNOSTI POSLOVNIH SISTEMA

3/16/2019

Gordana Savić, Milan Martić

2

DEA modeli

Osnovni CCR DEA model (CRS model)

3

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Osnovni CCR DEA model (CRS model)

4

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$



$$\begin{aligned} &u_r, \quad r = 1, \dots, s \\ &v_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &h_k \end{aligned}$$

k-puta

Dualni CCR DEA model (CRS model)

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$



$$\lambda_j, \quad j = 1, \dots, s$$

$$s_r^+, \quad r = 1, \dots, s$$

$$s_i^-, \quad i = 1, \dots, m$$

$$Z_k$$

k-puta

Ciljane vrednosti

6

$$x_{ik}'' = Z_{ik}^* x_{ik} - s_i^{-*}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

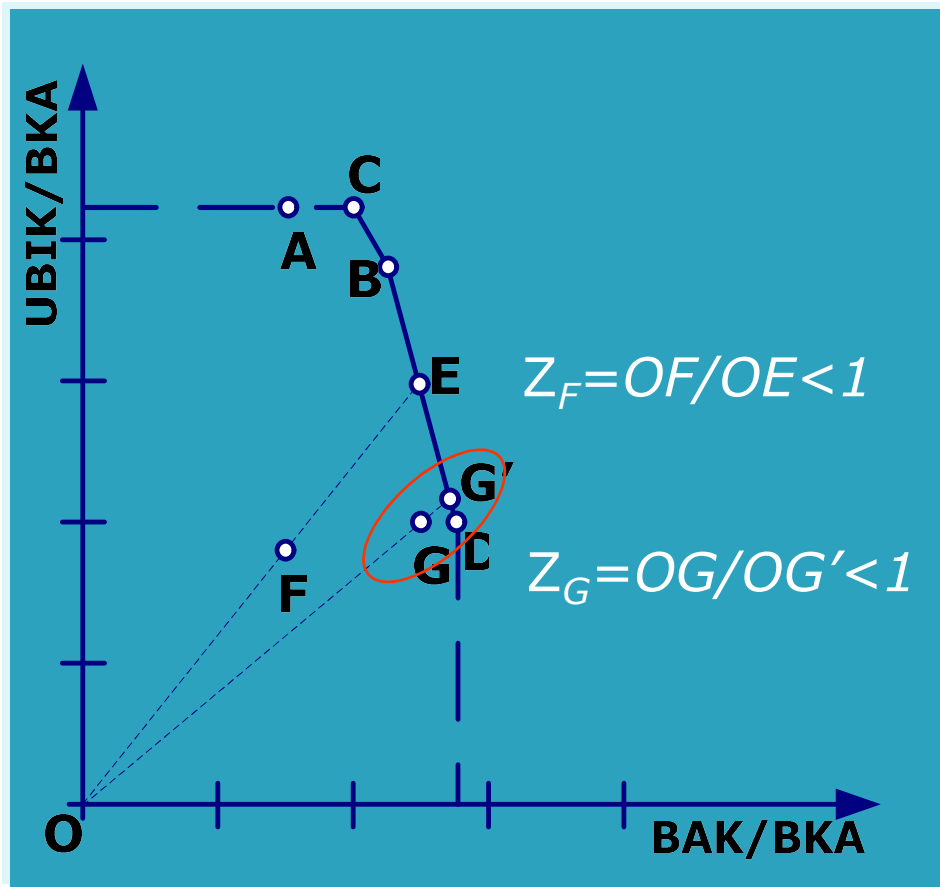
$$y_{rk}'' = y_{rk} + s_r^{+*}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$x_{ik}'' = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{rk}'' = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

Orijentacija DEA modela

Ulazno orijentisani



Ciljane vrednosti

8

DMU	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani model (U)	Ciljane vrednosti		
				CCR	BKA	BAK	UBIK
A	50	75	210	1	50	25	210
B	50	110	190	1	50	110	190
C	60	120	252	1	60	120	252
D	100	275	200	1	100	275	200
E	40	100	120	1	40	100	120
F	50	75	90	0.6	30	75	90
G	90	225	180	0.92	83.08	225	180

9

DEA modeli (VRS)

Varijabilni pronos na obim

Primalni CCR DEA model

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Primalni BCC DEA model (VRS)

Varijabilni prinos na obim

11

$$(Max) h_k = \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + u_*$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_* \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Primalni BCC DEA model (VRS)

Varijabilni prinos na obim

12

$$(Max) h_k = \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + u_*$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_* \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

u_* – neograničeno

Dualni CCR DEA model (CRS model)

13

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dualni BCC DEA model (VRS)

Varijabilni prinos na obim

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Komparativna analiza efikasnosti banaka

15

Ulazi

- ☐ Kapital
- ☐ Aktiva
- ☐ Depoziti

Prinos?

Izlazi

- ☐ Izdati krediti
- ☐ Nekreditne transakcije

**Varijabilni
Nerastući
Neopdajući**

Komparativna analiza efikasnosti univerziteta

16

Ulazi

- ☐ Broj upisanih studenta
- ☐ Broj nastavnika
- ☐ Ulaganje u istraživanje

Prinos?

Izlazi

- ☐ Broj diplomaca
- ☐ Broj naučnih radova
- ☐ Broj патената

**Varijabilni
Nerastući
Neopdajući**

Komparativna analiza efikasnosti trgovačkih kuća

17

Ulazi

- ☐ Broj komercijalista
- ☐ Trošak putovanja
- ☐ Asortiman

Izlazi

- ☐ Broj lojalnih kupaca
- ☐ Broj novih kupaca

Prinos?

**Varijabilni
Nerastući
Neopdajući**

Varijabilni prinos na obim

18

Primal (težinski problem)

$$u_* \begin{cases} = 0 \text{ u CRS,} \\ \text{neograničeno u VRS}_1 \text{ (varijabilni prinos na obim),} \\ \geq 0 \text{ u VRS}_2 \text{ (nerastući prinos na obim),} \\ \leq 0 \text{ u VRS}_2 \text{ (neopadajući prinos na obim)} \end{cases}$$

Dual (problem obavljanja)

CCR: nema dodatnog ograničenja

VRS₁: dodaje se $e^T \lambda = 1$

VRS₂: dodaje se $e^T \lambda \leq 1$

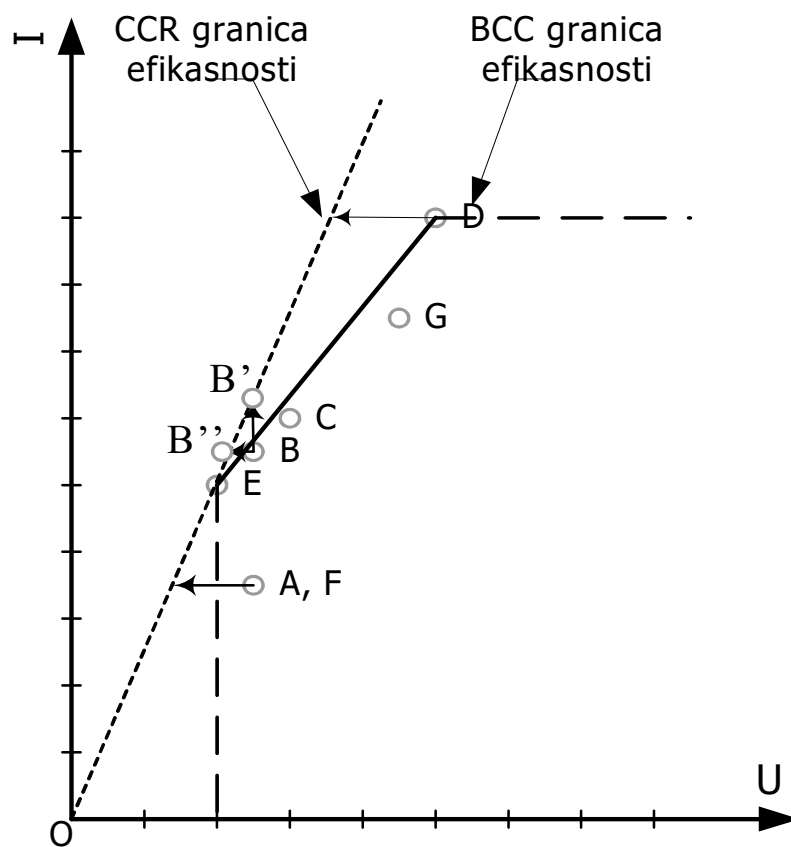
VRS₃: dodaje se $e^T \lambda \geq 1$

$$h_k^*(CRS) \leq h_k^*(VRS_2) \leq h_k^*(VRS_3) \leq h_k^*(VRS_1)$$

DMU	U	I	CCR model	VRS model		
			(CRS)	(VRS ₁)	(VRS ₂)	(VRS ₃)
A	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
B	50	110	0.88	0.95	0.95	0.88
C	60	120	0.80	0.92	0.92	0.80
D	100	180	0.72	1.00	1.00	0.72
E	40	100	1.00	1.00	1.00	1.00
F	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
G	90	150	0.67	0.86	0.86	0.67

Oblici granice efikasnosti

20



Napisati CCR (BCC) DEA model za DMU ...

21

DMU	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani model (U)			
				$\frac{BAK}{BKA}$	$\frac{UBIK}{BKA}$	CCR	BCC
A	50	75	210	1.5	4.2	1	1
B	50	110	190	2.2	3.8	1	1
C	60	120	252	2	4.2	1	1
D	100	275	200	2.75	2	1	1
E	40	100	120	2.5	3	1	1
F	50	75	90	1.5	1.8	0.6	0.8
G	90	225	180	2.5	2	0.92	0.92

Osnovne razlike CRS i VRS modela

VRS skor efikasnosti \geq CRS skor efikasnosti

$$\text{Efikasnost obima (scale efficiency)} = \frac{\text{ukupna tehnička efikasnost (CRS)}}{\text{čista tehnička efikasnost (VRS)}}$$

U ulazno orijentisanom DEA modelu cilj je da se minimizira ulaz za postojeći nivo izlaza.

U izlazno orijentisanom modelu cilj je da se maksimizira izlaz pri zadatom nivou ulaza.

Rešenja koja daju ulazno i izlazno orijentisani CCR modeli su međusobno povezana.

Napisati CCR (BCC) DEA model za DMU ...

23

DMU	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani model (U)				Efikasnost obima BCC/CCR
				<u>BAK</u> BKA	<u>UBIK</u> BKA	CCR	BCC	
A	50	75	210	1.5	4.2	1	1	1
B	50	110	190	2.2	3.8	1	1	1
C	60	120	252	2	4.2	1	1	1
D	100	275	200	2.75	2	1	1	1
E	40	100	120	2.5	3	1	1	1
F	50	75	90	1.5	1.8	0.6	0.8	1.33
G	90	225	180	2.5	2	0.92	0.92	1

Izlazno orijentisani

Osnovni BCC DEA model

$$(Min) h_k = \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + u^*$$

p.o

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dualni BCC DEA model – Izlazno orijentisani model

25

$$(Max) Z_k + \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ik} + s_+^- = x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$-Z_k \cdot y_{rk} + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r^+ = 0, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Orijentacija DEA modela

Izlazno orijentisani

26

Ulazi

Broj kreditnih asistenata (BKA)

Izlazi

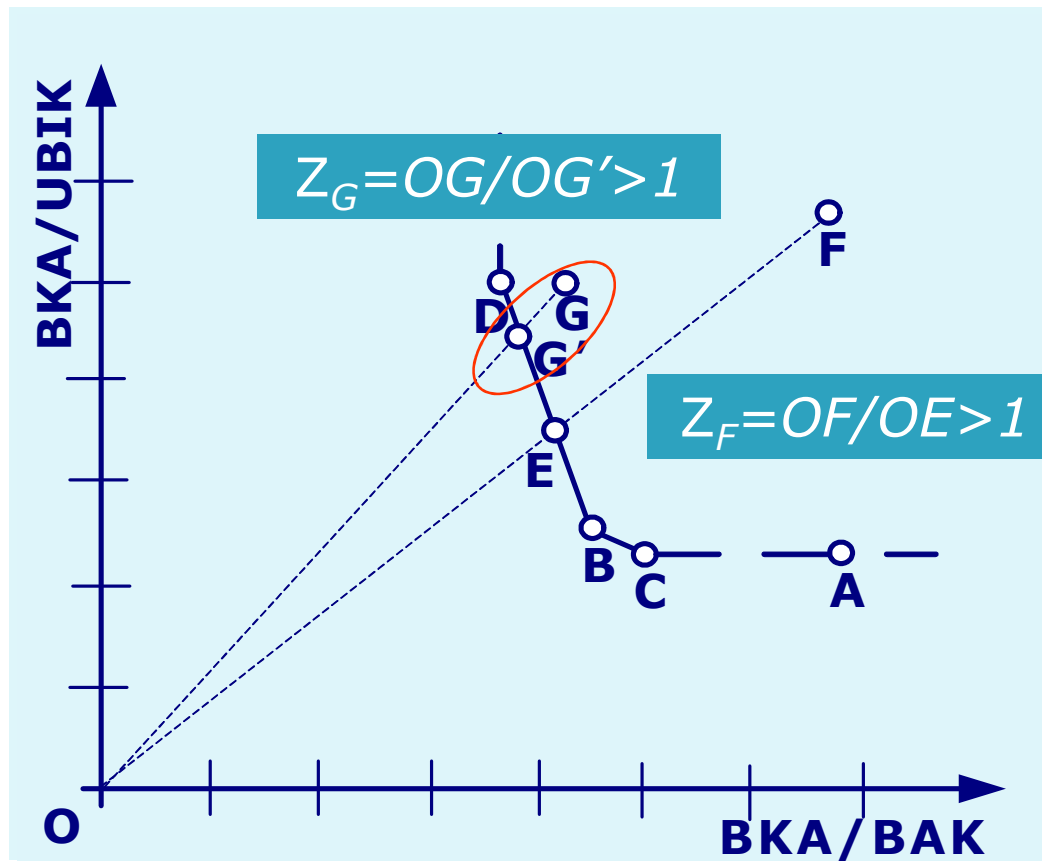
Broj aktivnih kredita (BAK)

Ukupan broj izdatih kredita (UBIK)

DMU DMU	BKA BKA	BAK BAK	UBIK UBIK	Izlazno orijentisani model (U)			
				BKA /BAK	BKA /UBIK	CCR	BCC
A	50	75	210	0.67	0.24	1	1
B	50	110	190	0.45	0.26	1	1
C	60	120	252	0.50	0.24	1	1
D	100	275	200	0.36	0.50	1	1
E	40	100	120	0.40	0.33	1	1
F	50	75	90	0.67	0.56	1.66	1.65
G	90	225	180	0.40	0.50	1.08	1.08

Orijentacija DEA modela

Izlazno orijentisani



Ulazno i izlazno orijetisani modeli



- U ulazno orijentisanom DEA modelu cilj je da se minimizira ulaz za postojeći nivo izlaza.
- U izlazno orijentisanom modelu cilj je da se maksimizira izlaz pri zadatom nivou ulaza.
- Rešenja koja daju ulazno i izlazno orijentisani CCR modeli su međusobno povezana.



Potpuno rangiranje

Potpuno rangiranje

30

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}
A	50	75	210
B	50	110	190
C	60	120	252
D	100	275	200
E	40	100	120
F	50	75	90
G	90	225	180

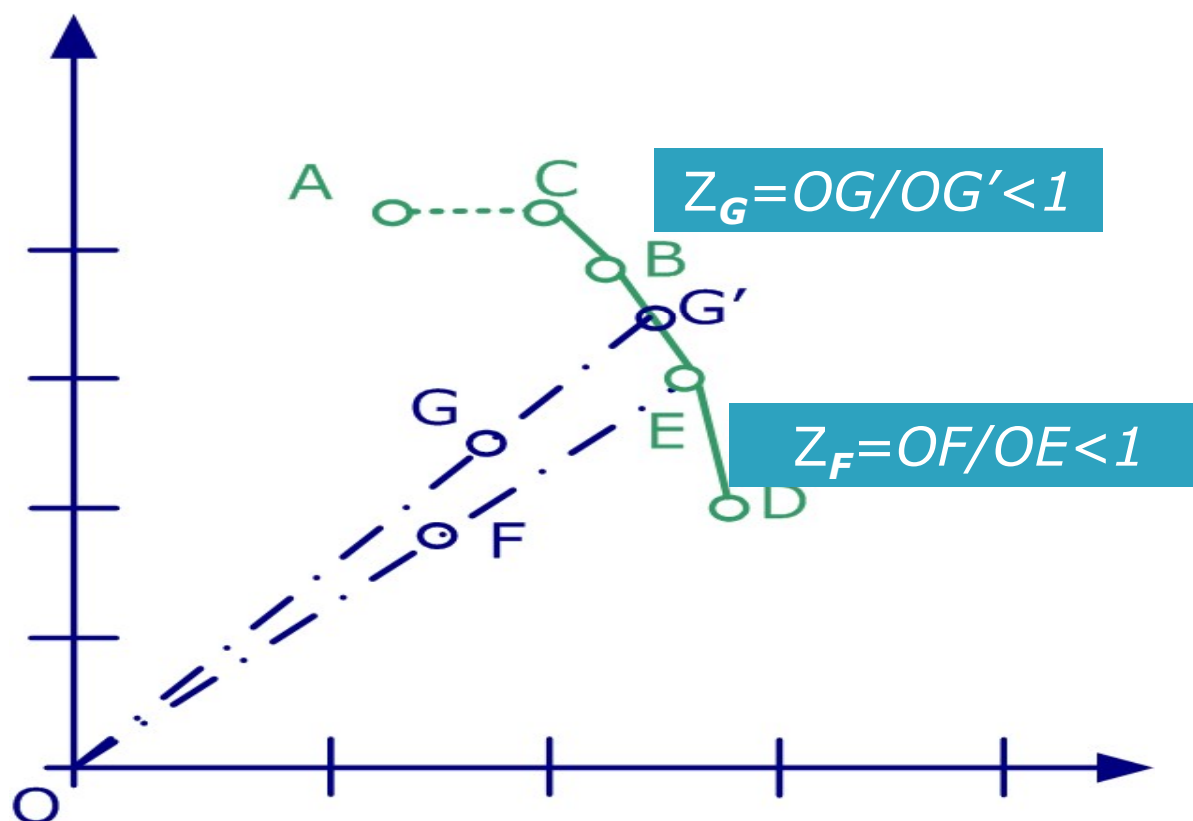
Potpuno rangiranje

31

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	Ulazno orijentisani CCR model		
				BAK / BKA	UBIK / BKA	h_k
A	50	75	210	1.50	4.20	1.00
B	50	110	190	2.20	3.80	1.00
C	60	120	252	2.00	4.20	1.00
D	100	275	200	2.75	2.00	1.00
E	40	100	120	2.50	3.00	1.00
F	50	75	90	1.50	1.80	0.60
G	90	225	180	2.50	2.00	0.92

Potpuno rangiranje

32



Ulazno orijentisani CCR model

BAK / BKA	UBIK / BKA	h_k
1.50	4.20	1.00
2.20	3.80	1.00
2.00	4.20	1.00
2.75	2.00	1.00
2.50	3.00	1.00
1.50	1.80	0.60
2.50	2.00	0.92

Potpuno rangiranje

- Matrica unakrsne efikasnosti
- Prema broju pojavljivanja u skupu referentnih jedinica
- Uvođenje idealne tačke
- DEA model za ocenu superefikasnosti

Matrica unakrsne efikasnosti

34

Matrica unakrsne efikasnosti

DMU	A	B	C	D	E	F	G	
A		1.00	0.91	1.01	0.48	0.72	0.43	0.48
B		0.86	1.00	0.99	0.95	0.99	0.60	0.88
C		0.94	0.94	1.00	0.67	0.83	0.50	0.64
D		0.54	0.79	0.72	1.00	0.90	0.54	0.90
E		0.81	0.98	0.95	0.98	1.00	0.60	0.91
F		1.34	1.63	1.59	1.64	1.66	1.00	1.52
G		0.84	1.04	1.01	1.08	1.08	0.65	1.00
<i>Prosek</i>		<i>0.905</i>	<i>1.042</i>	<i>1.038</i>	<i>0.970</i>	<i>1.025</i>	<i>0.615</i>	<i>0.903</i>
<i>Rang</i>		5	1	2	4	3	7	6

Excel fajl primer

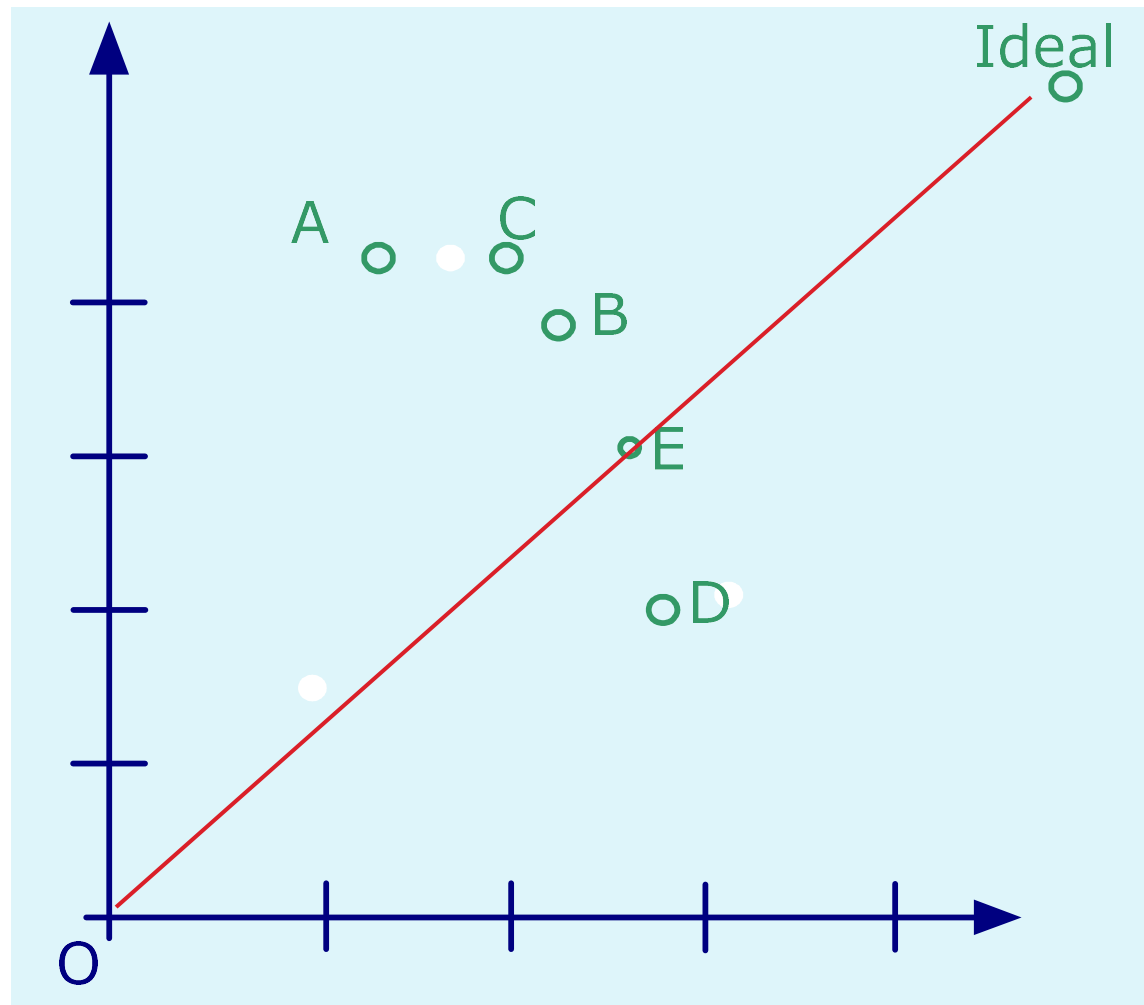
Idealna tačka

35

DMU	BKA	BAK	UBIK	Izlazno orijentisani model (U)					
				UBIK /BKA	UBIK /BAK	CCR	Rang	BCC	Rang
A	50	75	210	1.5	4.2	0.67	1	0.80	2
B	50	110	190	2.2	3.8	0.60	2	0.80	2
C	60	120	252	2	4.2	0.67	1	0.67	3
D	100	275	200	2.8	2	0.40	4	0.40	5
E	40	100	120	2.5	3	0.48	3	1.00	1
F	50	75	90	1.5	1.8	0.29	6	0.80	2
G	90	225	180	2.5	2	0.36	5	0.44	4
Ideal	40	275	252	6.9	6.3	1.00		1.00	

EXCEL FAJL PRIMER

Idealna tačka



Merenje superefikasnosti

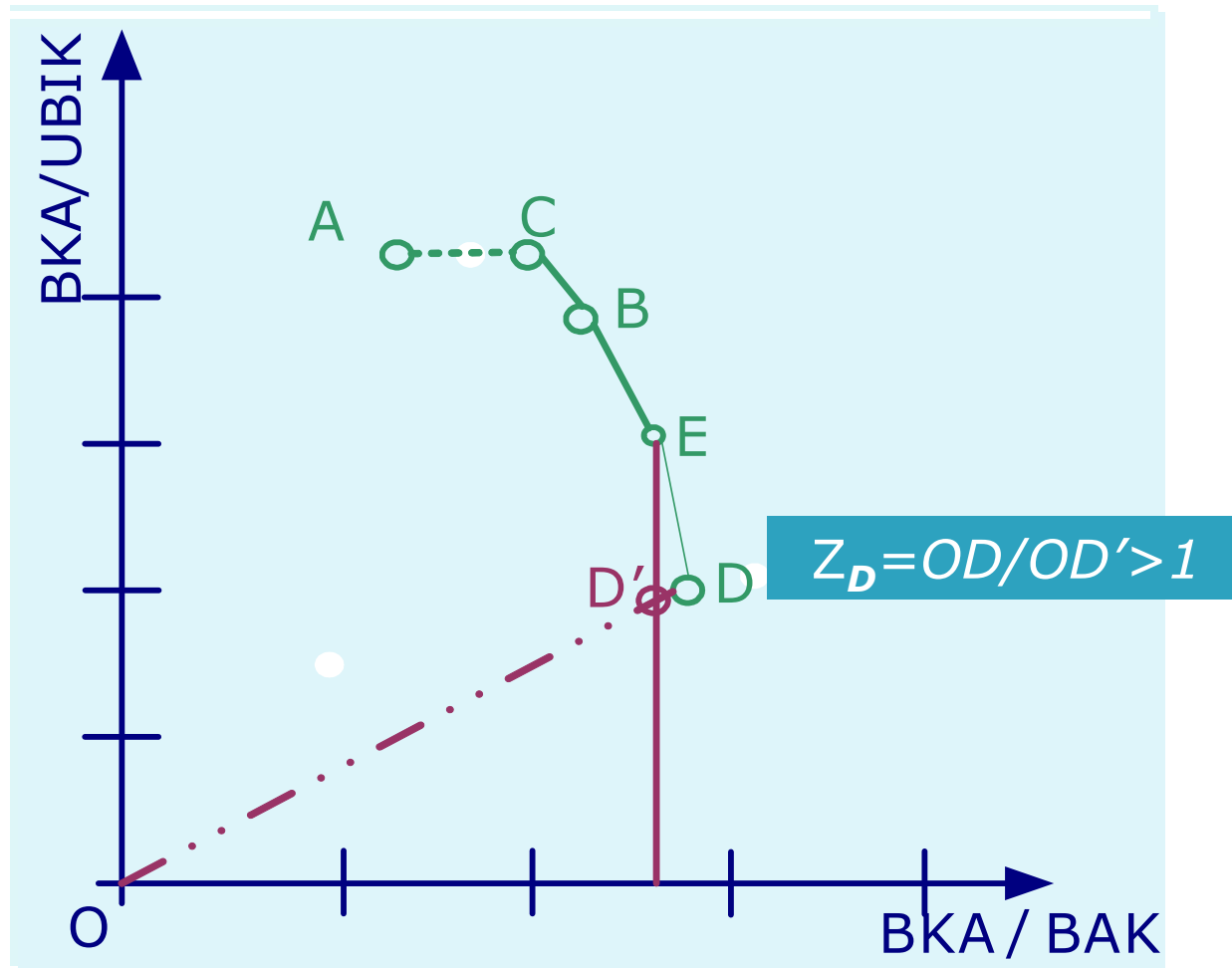
37

- Andersen P, Petersen NC. "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis" 1993

DMU	BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	Ulazno orijentisani CCR model		Ulazno orijent. AP model		
				BAK / BKA	UBIK / BKA	h_k	h'_k	Rang
A	50	75	210	1.50	4.20	1.00	1.00	5
B	50	110	190	2.20	3.80	1.00	1.01	4
C	60	120	252	2.00	4.20	1.00	1.06	2
D	100	275	200	2.75	2.00	1.00	1.10	1
E	40	100	120	2.50	3.00	1.00	1.02	3
F	50	75	90	1.50	1.80	0.60	0.60	7
G	90	225	180	2.50	2.00	0.92	0.92	6

Merenje superefikasnosti

38



Primalni AP DEA model

39

$$(Max)h_k = \sum_{r=1}^s v_r y_{rk}$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m u_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s v_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m u_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, j \neq k$$

$$v_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dualni AP DEA model

40

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Rangovi

41

DMU	Ideal	Unakrsna efikasnost	Broj uzornih	AP input
A	1	5	5	5
B	3	1	4	4
C	1	2	2	2
D	5	4	2	1
E	4	3	1	3
F	7	7	7	7
G	6	6	6	6

42

Proširenja DEA modela

Proširenja DEA modela

43

- Ulazi i/ili izlazi egzogeno fiksirani
- Ulazi i/ili izlazi kategorijske prirode
- Ograničavanje težina
- Podešavanje ulazno-izlaznih nivoa

Egzogeno fiksirane varijable

44

- reklame, konkurencija,...
- Banker i Morej ocenjujući efikasnost 60 restorana brze hrane u okviru lanca restorana
- Ulazi:
 - ▣ troškovi nabavke
 - ▣ plate radnika
 - ▣ starost lokala
 - ▣ troškovi reklame
 - ▣ da li je lokal u urbanoj ili ruralnoj oblasti i
 - ▣ da li je moguće posluživanje gosta u restoranu ili nije

Egzogeno fiksirane varijable

45

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i \in I_d$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i \in I_f$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Kategorijski ulazi ili izlazi

46

- Banker i Morej su ocenjivali efikasnost 69 apoteka na osnovu podataka za 4 ulaza i 2 izlaza.
- Ulazi:
- plate radnika,
- operativni troškovi,
- prosečna veličina zaliha i
- veličina tržišta izražena kao broj stanovnika u gradu u kome se apoteka nalazi

$d_{\ell}^k = 0$, $\ell = 1, 2, \dots, L$; (kategorija 1),

$d_{\ell}^k = 1$, $d_1^k = 0$, $\ell = 2, 3, \dots, L$; (kategoriji 2)

$d_{\ell}^k = 1$, $d_1^k = 1$, $d_l^k = 0$, $\ell = 3, 4, \dots, L$; (kategoriji 3).

...

$d_{\ell}^k = 1$, $\ell = 1, 2, \dots, L$; (kategorija $L+1$).

Kategorijski ulazi ili izlazi

47

$$(Min)Z_k - \varepsilon(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j d_j^l \leq d_k^l, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_j^l = \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

- Osnovni DEA modeli dopuštaju jedinici čija se efikasnost ocenjuje potpunu fleksibilnost u izboru težinskih koeficijenata.
- Dodavanje ograničenja na težinske koeficijente i uključivanje vrednosnih procena.
- Uključivanje vrednosnih procena u ocenjivanje efikasnosti ima za cilj da se uzmu u obzir raniji pogledi i znanja o efikasnosti posmatranih DMU.

49

Ograničavanje težina

Ograničavanje težina u DEA modelima

1. Direktno ograničavanje težina,

- potpuna restrikcija težina,
- regioni sigurnosti -I tip,
- regioni sigurnosti -II tip,

Ograničavanje težina u DEA modelima

51

Potpuna restrikcija težina

$$\delta_i \leq v_i \leq \tau_i, i = 1, \dots, m$$

$$\rho_i \leq \mu_r \leq \eta_r, r = 1, \dots, s$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

Regioni sigurnosti -I tip

$$k_i v_i + k_{i+1} v_{i+1} \leq v_{i+2}$$

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i+1}} \leq \beta_i$$

$$c_2 v_1 - c_1 v_2 = 0$$

Ograničavanje težina u DEA modelima



Regioni sigurnosti -II tip

$$\gamma_i v_i \geq u_r$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

54

2. Podešavanje posmatranih ulazno-izlaznih nivoa, (Golany)

$$b_1 / b_2 \leq v_1 / v_2 \leq a_1 / a_2$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

55

$$(Max) \ h_k = \sum_{r=1}^s g_r b_{rk} y_{rk}$$

$$p.o \quad \sum_{i=1}^m w_i a_{ik} x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s g_r b_{rj} y_{rj} - \sum_{i=1}^m w_i a_{ij} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$g_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Ograničavanje težina u DEA modelima

3. Ograničavanje virtuelnih ulaza i izlaza (Beasley, Wong 1990).

$$\phi_r \leq \frac{\mu_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}} \leq \psi_r, j = \overline{1, n}$$