ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
13.	**5. Нелинеарно програмирање**		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5.6 Методе казнених функција	Овладавање методама спољашњих и унутрашњих казнених функција за решавање општег проблема нелинеарног програмирања
		5.7 Приближне методе за нелинеарно програмирање	Упознавање са неким од нумеричких метода за решавање проблема нелинеарног програмирања

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
13.	5.7 Приближне методе за нелинеарно програмирање	Упознавање са неким од нумеричких метода за решавање проблема нелинеарног програмирања

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

PRIBLIŽNE METODE ZA BEZUSLOVNU OPTIMIZACIJU

Problem:

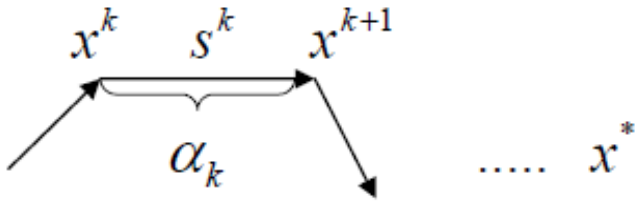
$$\text{(BO)} \qquad \min_{x \in R^n} f(x)$$

Tipična svojstva metoda:

- Generišu niz $\{x^k\}$ po formuli

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0,1,\ldots$$

gde je $\{s^k\}$ niz pravaca, a $\{\alpha_k\}$ niz koraka.



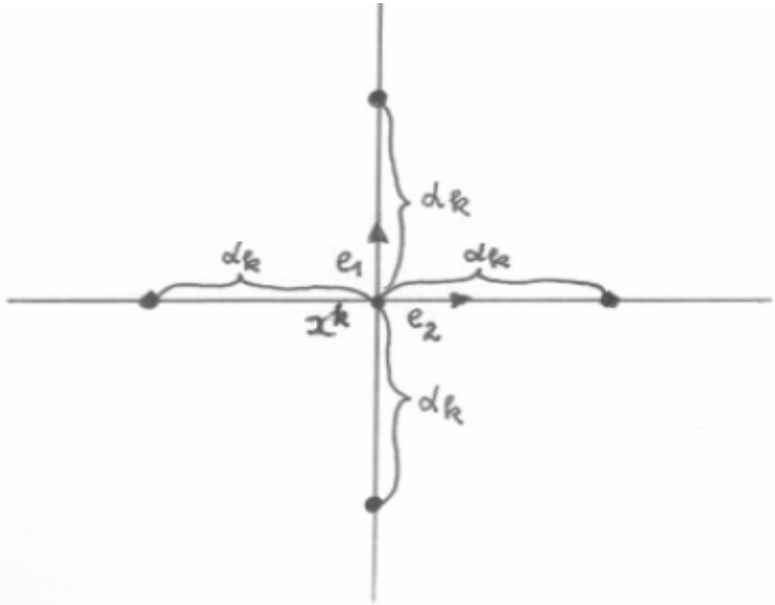
- Svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ zadovoljava $\nabla f(x^*) = 0$. Ako je f konveksna funkcija tada je x^* rešenje problema.

Приближне методе за нелинеарно програмирање

a) Metoda koordinatnog pretraživanja (Hooke-Jeeves)

Pravci pretraživanja s^k**:** koordinatni pravci $\pm e_1, \ldots, \pm e_n$

Ideja: Koračati istim korakom duž koordinatnih pravaca dok se može smanjiti funkcija cilja. Zatim smanjiti korak i ponoviti ovu proceduru.



Приближне методе за нелинеарно програмирање

Algoritam 1 (Hooke-Jeeves).

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\alpha_0 > 0$, $\varepsilon > 0$. Staviti $k = 0$.

Korak 1: Ispitati da li postoji $s^k \in \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ tako da je

$$f(x^k + \alpha_k s^k) < f(x^k).$$

Ako postoji ići na Korak 2. U suprotnom ići na Korak 3.

Korak 2: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $k = k+1$ i ići na Korak 1.

Korak 3: $\alpha_k = \alpha_k / 2$ i ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\alpha_k < \varepsilon$.

Teorema 1. Ako je x^0 takvo da je skup $X_0 = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$ ograničen i f je diferencijabilna na X_0, tada svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ generisanog Algoritmom 1 zadovoljava uslov $\nabla f(x^*) = 0$.

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Primer 1. $f(x)=x^2, \quad \alpha_0=2.5, \quad x^0=1, \quad \pm e_1=\pm 1$

$k=0:$

$$f(x^0+\alpha_0 e_1)=f(1+2.5)=3.5^2>f(1)$$

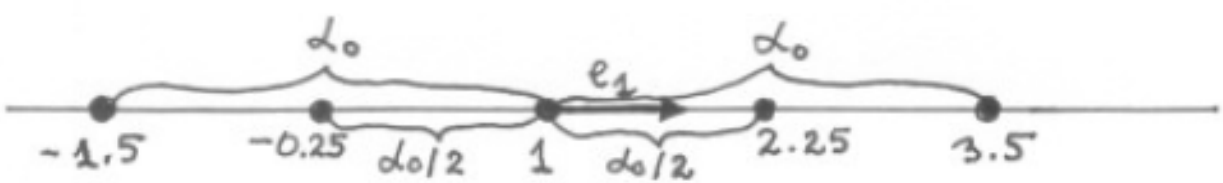
$$f(x^0-\alpha_0 e_1)=f(1-2.5)=(-1.5)^2>f(1)$$

$$\alpha_0=1.25$$

$$f(1+1.25)=(2.25)^2>f(1)$$

$$f(1-1.25)=(-0.25)^2<f(1)$$

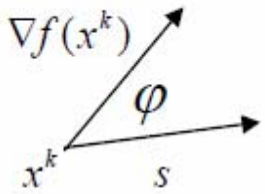
$$x^1=-0.25, \quad \alpha_1=1.25, \quad k=1, \quad \text{itd.}$$



Приближне методе за нелинеарно програмирање

b) Gradijentna metoda (Metoda najbržeg spusta, Košijeva metoda)

Ideja: funkcija $f(x^k)$ u okolini tačke x^k najbrže opada u smeru svog antigradijenta $-\nabla f(x^k)$.



$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial s} = \nabla f^T(x^k)s = \|\nabla f(x^k)\| \cdot \|s\| \cos\varphi \Rightarrow \text{minimalna vrednost } \frac{\partial f(x^k)}{\partial s}$$

$$\text{dobija se za } \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad s^k = -\nabla f(x^k).$$

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Algoritam 2 (Koši)

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$, $k = 0$.

Korak 1: Izračunati $s^k = -\nabla f(x^k)$

Korak 2: Naći α_k kao rešenje jednodimenzionog problema $\min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k)$

Korak 3: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $k = k + 1$, ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\| \nabla f(x^k) \| < \varepsilon$.

Teorema 2. Neka je skup $X_0 = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$ ograničen i f diferencijabilna na X_0. Tada svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ generisanog Algoritmom 2 zadovoljava $\nabla f(x^*) = 0$.

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Primer 2. Primenimo Košijevu metodu na minimizaciju funkcije $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 12x_1 - 8x_2$.

Imamo da je $\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 + 12, \quad 2x_2 - 2x_1 - 8)$

$k = 0$:

$$x^0 = (0,0), \quad \nabla f(x^0) = (12,-8), \quad s^0 = (-12,8), \quad x^0 + \alpha s^0 = (-12\alpha, 8\alpha),$$

$$f(x^0 + \alpha s^0) = 2(-12\alpha)^2 + (8\alpha)^2 - 2(-12\alpha)(8\alpha) + 12(-12\alpha) - 8(8\alpha)$$

$$= 544\alpha^2 - 208\alpha,$$

α_0 je rešenje problema $\quad \min\limits_{\alpha \geq 0} \varphi(\alpha) = 544\alpha^2 - 208\alpha$

Iz $\varphi'(\alpha) = 1088\alpha - 208 = 0$ sledi $\alpha_0 = 13/68$.

Sada je $x^1 = (0,0) + 13/68(-12,8) = (-2.29, 1.83)$.

Slično se nastavlja dalje računanje.

Приближне методе за нелинеарно програмирање

c) Njutnova metoda

Ideja: U tački x^k funkcija $f(x)$ se aproksimira Tajlorovim polinomom stepena 2 tj.

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = Q_k(x)$$

Tačka x^{k+1} predstavlja minimum funkcije $Q_k(x)$. Tražimo je iz uslova:

$$\nabla Q_k(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow \; x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; s^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Algoritam 3 (Njutn).

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$, $k = 0$.

Korak 1: Izračunati $s^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$

Korak 2: Kao u Algoritmu 2.

Korak 3: Kao u Algoritmu 2.

Kriterijum zaustavljanja: Kao u Algoritmu 2.

Teorema 3. Neka je skup $X_0 = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$ ograničen, f dvaput diferencijabilna na X_0 i $\nabla^2 f(x)$ pozitivno definitna matrica na X_0. Neka je niz $\{x^k\}$ generisam Algoritmom 3. Tada $x^k \to x^*$, $k \to \infty$ (x^* jedinstveno rešenje (BO)).

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Primer 3. Primenimo Njutnovu metodu na miimizaciju funkcije iz Primera 2: $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 12x_1 - 8x_2$.

Imamo:

$$\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 + 12,\ 2x_2 - 2x_1 - 8).$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\nabla^2 f(x))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 0: \quad x^0 = (0,0), \quad \nabla f(x^0) = (12, -8),$$

$$s^0 = -\nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0) = -\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Приближне методе за нелинеарно програмирање

$$x^0 + \alpha s^0 = (-2\alpha, 2\alpha),$$

$$f(x^0 + \alpha s^0) = 2(-2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - 2(-2\alpha)(2\alpha) + 12(-2\alpha) - 8(2\alpha) = \\ = 20\alpha^2 - 40\alpha,$$

α_0 je rešenje problema $\min\limits_{\alpha \geq 0} \varphi(\alpha) = 20\alpha^2 - 40\alpha$.

Iz $\varphi'(\alpha) = 40\alpha - 40 = 0$ sledi $\alpha_0 = 1$.

Sada je $x^1 = (0,0) + (-2,2) = (-2,2)$.

Kako je $\nabla f(x^1) = (0,0)$, optimalno rešenje je $x^* = x^1 = (-2,2)$.

PRIBLIŽNE METODE ZA USLOVNU OPTIMIZACIJU

Mnoštvo metoda:

- za ograničenja u vidu linearnih jednačina (metode zamene)
- za ograničenja u vidu linearnih nejednačina
- za kvadratnu funkciju cilja i linearna ograničenja ograničenja (kvadratno programiranje)
- za ograničenja u vidu nelinearnih jednačine i/ili nejednačina

Približna metoda kaznenih funkcija može se primeniti na većinu navedenih problema.

Приближне методе за нелинеарно програмирање

Algoritam približne metode kaznenih funkcija.

Korak 0: Izabrati niz kaznenih parametara $\{t_k\}$ i niz spoljašnjih ili unutrašnjih kaznenih funkcija $\{q_k\}$, x^0, $\varepsilon > 0$, $k = 1$.

(Unutrašnje kaznene funkcije mogu biti izabrane samo ako $\overset{o}{X} \neq \varnothing$.)

Korak 1: Staviti $\varepsilon_k = 1/t_k$ (preciznost sa kojom se rešava k-ti problem)

Korak 2: Polazeći od x^{k-1} kao početne tačke naći približno rešenje x^k problema

$$\min F_k(x) = f(x) + q_k(x)$$

nekim od algoritama bezuslovne optimizacije sa kriterijumom zaustavljanja: STOP ako je $\|\nabla F_k(x^k)\| < \varepsilon_k$.

Korak 3: $k = k + 1$, ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\varepsilon_k < \varepsilon$.

Приближне методе нелинеарног програмирања

ПИТАЊА:

1. Који су основни принципи приближних метода за безусловну оптимизацију?

2. Како гласе кораци Њутнове методе за приближно решавање проблема безусловне оптимизације?

3. Како гласе основни кораци методе казнених функција за приближно решавање проблема условне оптимизације?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА