ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Класични проблем условног екстремума

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
11.	**5. Нелинеарно програмирање**		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5.1 Општи проблем нелинеарног програмирања	Општи облик проблема нелинеарног програмирања и његове особине
	Тематска јединица	5.2 Безусловна оптимизација	Методологија за решавање проблема нелинеарног програмирања без ограничења
	Тематска јединица	5.3 Класични проблем условног екстремума	Методе за решавање проблема нелинеарног програмирања са ограничењима типа једнакости

Класични проблем условног екстремума

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
11.	5.3. Класични проблем условног екстремума	Методе за решавање проблема нелинеарног програмирања са ограничењима типа једнакости

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

KLASIČNI PROBLEM USLOVNOG EKSTREMUMA

Problem:

(KLP)
$$\min f(x)$$
$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Pretpostavka: f, h_i, $i = 1, \ldots, m$, su diferencijabilne funkcije

Pretpostavka:

Jacobi-eva matrica ili *Jacobian*: $J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$

rang $J(x)=m$ na dopustivom skupu

METODA ELIMINACIJE PROMENLJIVIH

Ideja: (KLP) se svodi na problem bezuslovne optimizacije.

$$\begin{array}{lcl} h_1(x_1,\ldots,x_n)=0 & & x_1=\varphi_1(x_{m+1},\ldots,x_n) \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots \\ h_m(x_1,\ldots,x_n)=0 & & x_m=\varphi_m(x_{m+1},\ldots,x_n) \end{array}$$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Zamenom rešenja sistema $x_1,\dots,x_m$ u funkciji cilja $f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ dobija se problem bezuslovne optimizacije

$$\text{(BO)} \quad \min f(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n) = F(x_{m+1},\dots,x_n)$$

Ako je $(x^*_{m+1},\dots,x^*_n)$ rešenje (BO) $\Rightarrow$

$(\varphi_1(x^*_{m+1},\dots,x^*_n),\dots,\varphi_m(x^*_{m+1},\dots,x^*_n),x^*_{m+1},\dots,x^*_n)$ je rešenje (KLP).

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Primer 1. Metodom eliminacije promenljivih rešiti problem:

$$\min \ 3x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

Ovde je Jacobian jednak $J(x) = [1 \ 1 \ 1]$, a rang $J(x) = 1$.

Rešimo jednačinu ograničenja, na primer, po x_3 :

$$x_3 = 9 - x_1 - x_2 .$$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Rešimo jednačinu ograničenja, na primer, po x_3 :

$$x_3 = 9 - x_1 - x_2 .$$

Zamenom x_3 u funkciju cilja dobija se

$$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + 5(9 - x_1 - x_2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 - 5 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 14x_2 - 5 = 0$$

i jedina stacionarna tačka je $x^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{14}\right)$.

Klasični problem uslovnog ekstremuma

$$\nabla^2 F(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 6 > 0, \quad D_2 = 84 > 0$$

$\Rightarrow \quad x^*$ strogi lokalni minimum pomoćnog problema (BO), pa je tačka $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{14}, \frac{164}{21}\right)$ strogi lokalni minimum polaznog problema (KLP).

Napomena 1: Kasnije čemo videti da se ovde radi o problemu konveksnog programiranja, gde su funkcije cilja i ograničenja konveksne, pa je lokalni minimum istovremeno i globalni minimum

METODA LAGRANŽOVIH MNOŽILACA

$$\textit{Lagranžova funkcija:} \quad L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

Napomena 2: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ se naziva vektor *Lagranžovih množilaca*.

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Metodologija:

1) Traže se rešenja sistema

$$\text{(SS)} \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

Rešenja su *stacionarne tačke Lagranžove funkcije* i kandidati za ekstremum.

Klasični problem uslovnog ekstremuma

2) Traži se matrica

$$H(x,\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & \nabla_{xx}^2 L \end{bmatrix}$$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

3) Neka je (x^*, λ^*) rešenje (SS) i neka su $D_1, \ldots, D_{m+n}$ glavni minori matrice $H(x^*, \lambda^*)$.

(i) $(-1)^m D_{2m+1} > 0, \ldots, (-1)^m D_{m+n} > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum (KLP)

(ii) $(-1)^{m+1} D_{2m+1} > 0, \ldots, (-1)^n D_{m+n} > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni maksimum (KLP)

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Metodologija se zasniva na sledeća tri rezultata:

Teorema 1 (Neophodni uslovi za lokalni minimum). Ako je x^* lokalni minimum problema (KLP) $\Rightarrow$ $\exists \lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ tako da je $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$ (tj. $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$).

Teorema 2 (Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum). Neka je (x^*, λ^*) stacionarna tačka Lagranžove funkcije $L(x, \lambda)$. Ako je matrica $\nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*)$ *pozitivno definitna na tangentnom prostoru* $T(x^*) = \left\{ y \in R^n \,\middle|\, J(x^*)\, y = 0 \right\}$, tada je x^* strogi lokalni minimum problema (KLP).

(Matrica $\nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*)$ je *pozitivno definitna na tangentnom prostoru* $T(x^*)$ ako važi da je $y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) y > 0$ za svako $y \neq 0$ *takvo da je* $\nabla h_i(x^*) y = 0, \; i = 1, \ldots, m$)

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Teorema 3 (Dovoljni uslovi za pozitivnu definitnost na tangentnom prostoru).

Ako je $(-1)^m D_{2m+1} > 0, \ \ldots, \ (-1)^m D_{m+n} > 0 \ \Rightarrow \ \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ je pozitivno definitna matrica na tangentnom prostoru.

Napomena3: Svi navedeni rezultati važe pod pretpostavkom da je rang $J(x)=m$ u tačkama dopustivog skupa.. Ako je u nekim tačkama skupa ovaj uslov narušen, njih treba posebno ispitati (i one su kandidati za ekstremum).

Klasični problem uslovnog ekstremuma

Primer 2.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Lagranževa funkcija: $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_3 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}, \lambda = -\frac{2}{3}, \quad x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \lambda^* = -\frac{2}{3}$$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

$$\nabla^2_{xx} L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(x,\lambda) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = H(x^*,\lambda^*) \qquad m=1,\ \ n=3,\ \ 2m+1=3,\ \ m+n=4$$

Klasični problem uslovnog ekstremuma

$$(-1)^m D_{2m+1} = (-1)D_3 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$(-1)^m D_{m+n} = -D_4 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$\Rightarrow$ x^* je strogi lokalni minimum (odnosno globalni minimum!)

Класични проблем условног екстремума

ПИТАЊА:

1. Како се дефинише класични проблем нелинеарног програмирања?

2. Како се дефинише Лагранжова функција проблема условне оптимизације и шта су то њене стационарне тачке

3. Како гласе довољни услови за строги локални минимум класичног проблема нелинеарног програмирања?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА