ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Каруш-Кун-Такерови услови

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
12.	**5. Нелинеарно програмирање**		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5. 4 Конвексност скупова и функција	Упознавање са формалним дефиницијама конвексног скупа и функције и довољним условима за конвексност функције
		5.5 Каруш-Кун-Такерови услови	Упознавање са неопходним условима оптималности код општег проблема нелинеарног програмирања

Каруш-Кун-Такерови услови

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
12.	5. 5. Каруш-Кун-Такерови услови	Упознавање са неопходним условима оптималности код општег проблема нелинеарног програмирања

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

OPŠTI SLUČAJ PROBLEMA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA

Problem:

(NLP)

$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m$$

METODA IZRAVNAVAJUĆIH FUNKCIJA

(NLP) se, dodavanjem nenegativnih *izravnavajućih funkcija* $x_{n+i}^2, i = 1,\ldots,m$, ograničenjima, svodi na klasični problem uslovnog ekstremuma:

$$\text{(KLP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0, i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

(KLP) se može dalje rešavati metodom eliminacije promenljivih ili metodom Lagranžovih množilaca.

Каруш-Кун-Такерови услови

Primer 1.

$$(\text{NLP}) \quad \begin{array}{c} \min 4x_1^2 + 5x_2^2 \\ 1 - x_1 \le 0 \end{array} \longrightarrow (\text{KLP}) \quad \begin{array}{c} \min 4x_1^2 + 5x_2^2 \\ 1 - x_1 + x_3^2 = 0 \end{array} \quad (x_1 = 1 + x_3^2)$$

$$\longrightarrow (\text{BO}) \quad \min 4(1 + x_3^2)^2 + 5x_2^2 = F(x_2, x_3)$$

Каруш-Кун-Такерови услови

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= 10x_2 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 16x_3(1+x_3^2) = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\nabla^2 F(x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16(1+x_3^2)+16x_3\cdot 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 F(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 10 > 0,\ D_2 = 160 > 0 \quad \Rightarrow$$

$(0,0)$ strogi lokalni min (BO) $\Rightarrow$ $(1,0,0)$ strogi lokalni min (KLP) $\Rightarrow$ $(1,0)$ strogi lokalni min (NLP) (to je i globalni minimum!).

Каруш-Кун-Такерови услови

KUN-TAKEROVA TEOREMA

Problem:

(NLP)
$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m$$

Pretpostavka: funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ su diferencijabilne.

Ako su funkcije f, $g_1, \ldots, g_m$ konveksne, (NLP) se naziva *problem konveksnog programiranja*. Problem konveksnog programiranja ima važno svojstvo da je svaki lokalni minimum istovremeno globalni minimum.

Kun-Takerova teorema daje neophodne uslove za lokalni minimum opšteg slučaja problema (NLP). Ukoliko se radi o problemu konveksnog programiranja ti uslovi su i dovoljni.

Kun-Takerova teorema važi pod odredjenim uslovima *regularnosti*.

Каруш-Кун-Такерови услови

Uslovi regularnosti

Najpoznatija su sledeća dva uslova regularnosti:

R1 (Sleterov uslov). Važi ako su u (NLP) funkcije ograničenja $g_1,\ldots,g_m$ konveksne i postoji $\hat{x}$ tako da je $g_i(\hat{x})<0,\ i=1,\ldots,m$.

R2 . Važi u tački $\hat{x}$ ako su $\nabla g_i(\hat{x}),\ i\in I(\hat{x})$, linearno nezavisni, gde je $I(\hat{x})=\{i\in\{1,\ldots,m\}\mid g_i(\hat{x})=0\}$ skup indeksa aktivnih ograničenja u $\hat{x}$.

Каруш-Кун-Такерови услови

Napomena 1: Vektori $a_1,\ldots,a_n$ su linearno nezavisni ako važi implikacija

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\ldots,\lambda_n = 0$$

U slučaju $n=1$ implikacija se svodi na $\lambda_1 a_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, odakle sledi da $a_1 = 0$ ne ispunjava uslov linearne nezavisnosti (jer iz $\lambda a_1 = 0$ ne sledi $\lambda_1 = 0$), dok svako $a_1 \neq 0$ ispunjava ovaj uslov.

Napomena 2: Ako u nekoj dopustivoj tački $\hat{x}$ važi da je $I(\hat{x}) = \varnothing$, (t.j. $g_i(\hat{x}) < 0$ za svako $i \in \{1,\ldots,m\}$), smatra se da u njoj važi uslov R2.

Napomena 3: Uslov R1 važi ili ne za problem u celini. Uslov R2 može u nekim tačkama važiti, a u nekim ne.

Каруш-Кун-Такерови услови

Primer 2.

a) $\min x_1$

$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

Funkcija ograničenja $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ je konveksna (Zašto?).

Uslov R1 važi za npr. $\hat{x} = (0,0)$.

R2 važi u svakoj dopustivoj tački $\hat{x}$, jer ako je $\hat{x}$ unutar kruga $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, važi da je $I(\hat{x}) = \varnothing$, dok ako $\hat{x}$ pripada kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$, važi da je $I(\hat{x}) = \{1\}$

$$\nabla g_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}_{x=x^*} \neq 0$$

Каруш-Кун-Такерови услови

b) $\min x_1$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 0$$

Jedina dopustiva tačka problema je $x^* = (0,0)$, i u njoj je ograničenje g_1 aktivno. $\Rightarrow$ Ne važe uslov R1 .

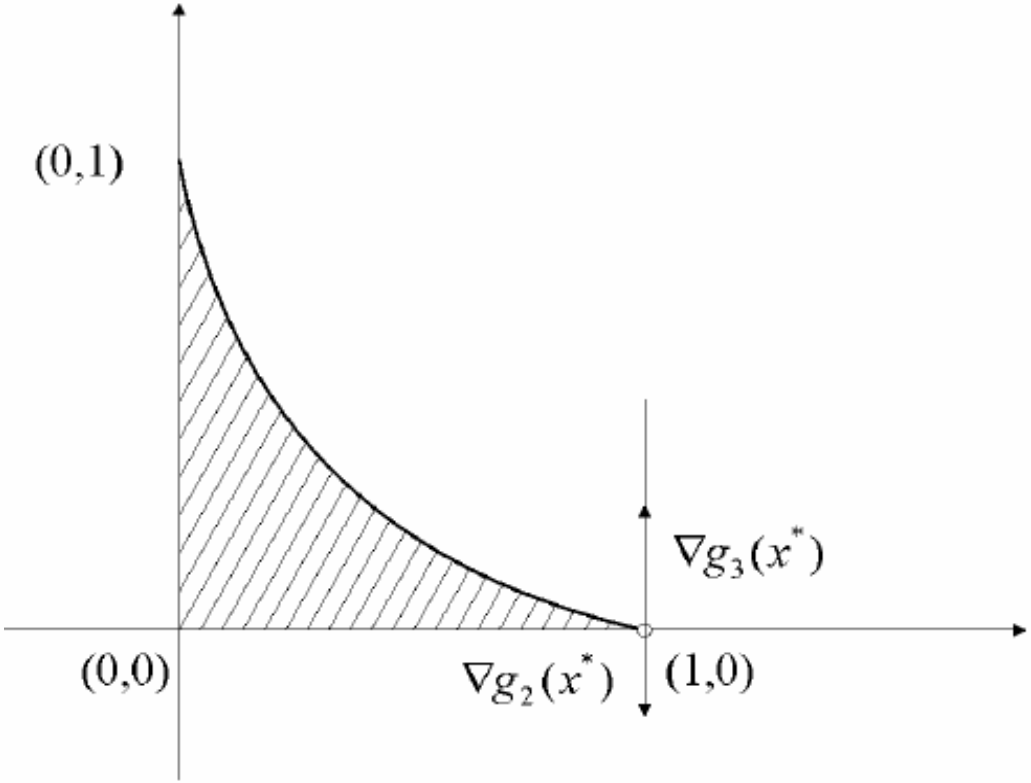
Skup $I(x^*) = \{1\}$ i $\nabla g_1(x^*) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}_{x=x^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, , pa $\nabla g_1(x^*)$ ne ispunjava uslov linearne nezavisnosti. $\Rightarrow$ Ne važi ni uslov R2 .

Каруш-Кун-Такерови услови

Primer 3.

$$\min -x_1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0.$$

Dopustivi skup je prikazan na slici.



Optimalno rešenje: $x^* = (1,0)$ (dobijeno npr. grafičkom metodom)

Каруш-Кун-Такерови услови

Ograničenja problema su

$$g_1(x) = -x_1 \le 0, \quad g_2(x) = -x_2 \le 0, \quad g_3(x) = x_2 - (x_1 - 1)^2 \le 0.$$

Funkcija $g_3(x)$ nije konveksna ($-g_3(x)$ jeste) $\Rightarrow$ Ne važi uslov R1.

Gradijenti funkcija ograničenja:

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Каруш-Кун-Такерови услови

Proverimo linearnu nezavisnost gradijenta aktivnih ograničenja u tačkama $x_a = (0,0)$, $x_b = (0,1)$ i $x^* = (1,0)$.

U tački $x_a = (0,0)$ je $I(x_a) = \{1,2\}$, jer su aktivna ograničenja $g_1(x) = -x_1 \le 0$, $g_2(x) = -x_2 \le 0$.

Gradijenti

$$\nabla g_1(x_a) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x_a) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

su linearno nezavisni, pa u x_a važi uslov R2.

$$\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 = 0, \ -\lambda_2 = 0 \right)$$

Каруш-Кун-Такерови услови

U tački $x_b = (0,1)$ je $I(x_b) = \{1,3\}$, jer su aktivna ograničenja $g_1(x) = -x_1 \le 0$, $g_3(x) = x_2 - (x_1 - 1)^2 \le 0$.

Gradijenti

$$\nabla g_1(x_b) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_3(x_b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

su linearno nezavisni, pa u x_b važi uslov R2.

$$\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \right)$$

Каруш-Кун-Такерови услови

U tački $x^* = (1,0)$ je $I(x^*) = \{2,3\}$, jer su aktivna ograničenja $g_2(x) = -x_2 \le 0, \quad g_3(x) = x_2 - (x_1 - 1)^2 \le 0$.

Gradijenti

$$\nabla g_2(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_3(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

su linearno zavisni vektori, pa u x^* ne važi uslov R2.

$$\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \right)$$

Каруш-Кун-Такерови услови

Kun-Takerova teorema (Neophodni uslovi optimalnosti; Kuhn, Tucker, 1951), poznata i kao **Karuš-Kun-Takerova teorema:**

Neka je x^* lokalni minimum problema (NLP) i neka važi uslov R1 ili u x^* važi uslov R2. Tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da važi:

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$

(iii) $\lambda^* \geq 0$

(iv) $g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$

Uslovi (i)-(iv) se nazivaju *Kun-Takerovi uslovi*.

Каруш-Кун-Такерови услови

Zaključak: Ako važi uslov R1 ili u svim dopustivim tačkama važi uslov R2 tada se svi kandidati za lokalni minimum nalaze medju rešenjima sistema:

$$\text{(i)} \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\text{(iii)} \quad \lambda \geq 0$$

$$\text{(iv)} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Каруш-Кун-Такерови услови

Primer 4. Naći sve kandidate za lokalni minimum problema

$$\min e^{x_1+x_2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Važi R1 i R2 na čitavom dopustivom skupu (videti Primer 2 a.).

Gradijenti funkcije cilja i funkcija ograničenja:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},$$

Каруш-Кун-Такерови услови

Kun-Takerovi uslovi:

(i) $$\begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

(iii) $\lambda \geq 0$

(iv) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$.

Каруш-Кун-Такерови услови

Vektorska jednačina

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentna je skalarnim jednačinama

$$e^{x_1+x_2} + 2\lambda x_1 = 0$$

$$e^{x_1+x_2} + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda \neq 0 \text{ i } x_1 = x_2 .$$

Каруш-Кун-Такерови услови

(iii) $\lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 < 0,\ x_2 < 0$.

(ii) $\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$ i $\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, tj. $2x_1^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lambda = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Jedini kandidat za lokalni minimum je $x^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Каруш-Кун-Такерови услови

Ako su uslovi R1 i R2 narušeni, Kun-Takerova teorema ne mora da važi.

Primer 5. Razmotrimo problem

$$\min x_1$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 0.$$

Jedina dopustiva tačka $x^* = (0,0)$.

Na osnovu Primera 2 b. uslovi R1 i R2 ne važe.

Каруш-Кун-Такерови услови

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Kun-Takerov uslov (i) $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ u tački $x^* = (0,0)$ se svodi na

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 \ ,$$

pa ne postoji takvo λ^* koje zadovoljava ovaj sistem jednačina.

Каруш-Кун-Такерови услови

Ukoliko su sva ograničenja u (NLP) linearna mogu se izostaviti uslovi regularnosti:

Teorema (neophodni uslovi u slučaju linearnih ograničenja)

Neka su u problem (NLP) ograničenja oblika $g_i(x) = a_i^T x - b_i$, $i=1,\ldots,m$. Ako je x^* lokalni minimum, tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da važe Kun-Takerovi uslovi (i)-(iv).

Каруш-Кун-Такерови услови

U slušaju kada problem (NLP) predstavlja problem konveksnog programiranja, Kun-Takerovi uslovi (i)-(iv) su istovremeno i dovoljni za optimalnost .

Teorema (dovoljni uslovi u konveksnom slučaju). Neka su u problem (NLP) funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ konveksne. Ako u tački (x^*, λ^*) važe Kun-Takerovi uslovi (i)-(iv) , tada je x^* globalni minimum problema (NLP).

Каруш-Кун-Такерови услови

Primer 6. Problem iz Primera 4

$$\min e^{x_1+x_2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1.$$

Funkcija cilja $f(x) = e^{x_1+x_2}$ i funkcija ograničenja $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ su konveksne i tačka $x^* = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ zadovoljava Kun-Takerove uslove (i)-(iv) $\Rightarrow$ x^* je globalni minimum.

Каруш-Кун-Такерови услови

ПИТАЊА:

1. Како се дефинишу услови регуларности под којима важи Кун-Такерова теорема?

2. Како гласе Каруш-Кун-Такерови неопходни услови за локални минимум општег проблема нелинеарног програмирања?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА