

S A D R Ž A J

1.	<u>UVOD</u>	1
2.	<u>ANALIZA OBAVIJANJA PODATAKA – OSNOVE I CILJEVI</u>	2
	2.1. KONCEPTI I NAČINI MERENJA EFIKASNOSTI	3
	2.2. MERENJE EFIKASNOSTI POMOĆU ANALIZE OBAVIJANJA PODATAKA	8
3.	<u>DEA MODELI</u>	12
	3.1. OSNOVNI DEA MODELI	12
	3.2. ORIJENTACIJA DEA MODELA	23
	3.3. MODIFIKOVANI DEA MODELI	29
	3.3.1. DEA MODELI ZA MERENJE SUPEREFIKASNOSTI DMU	29
	3.3.2. NERADIJALNE MERE EFIKASNOSTI	32
	3.3.3. MODELI SA NEKONVEKSНОM GRANICOM EFIKASNOSTI	37
	3.4. PROŠIRENJE OSNOVNIH DEA MODELIMA	39
	3.4.1. PROCENA EFIKASNOSTI KADA SU NEKI OD ULAZA I IZLAVA EGZOGENO FIKSIRANI	40
	3.4.2. PROCENA EFIKASNOSTI KADA SU NEKI OD ULAZA I IZLAVA KATEGORIJSKE PRIRODE	41
	3.4.3. OGRANIČAVANJE TEŽINA	43
	3.4.4. DIREKTNO OGRANIČAVANJE TEŽINA	46
	3.4.5. PODEŠAVANJE POSMATRANIH ULAZNO-IZLAZNIH NIVOVA	48
	3.5. DEA MODELI ZA PRAĆENJE PROMENA EFIKASNOSTI I PRODUKTIVNOSTI	49
	3.5.1. WINDOW DEA ANALIZA	50
	3.5.2. MALMKVISTOVI DEA INDEKSI I MERENJE UKUPNE PRODUKTIVNOSTI	51
4.	<u>IMPLEMENTACIJA ANALIZE OBAVIJANJA PODATAKA</u>	58
	4.1. IZBOR JEDINICA ZA ODLUČIVANJE I SPECIFIKACIJA MODELAA	58
	4.2. SPECIFIKACIJA ULAZA I IZLAVA	60
	4.3. REŠAVANJE DEA MODELAA	61
	4.4. ANALIZA I TUMAČENJE REZULTATA	74
	4.4.1. RASPODELA VIRTUELNIH ULAZA I IZLAVA	74
	4.4.2. MATRICA UNAKRSNE EFIKASNOSTI	75
	4.4.3. REFERENTNE JEDINICE	76
	4.4.4. CILJNI ULAZI I IZLAZI	77
	4.4.5. PRAĆENJE PROMENA EFIKASNOSTI TOKOM VREMENA	77
	4.4.6. PRERASPODELA RESURSA IZMEĐU JEDINICA	78
8.	<u>LITERATURA</u>	80

1. UVOD

Jedan od najvažnijih principa u svakom poslovanju jeste princip efikasnosti koji se sastoji u ostvarivanju što većih ekonomskih efekata (izlaza) uz što manje ekonomске žrtve (ulaze). U klasičnim ekonomskim teorijama efikasnost se meri kao odnos jednog izlaza i jednog ulaza. Problem se javlja kod određivanja efikasnosti jedinica koje imaju više raznorodnih ulaza i koriste ih za stvaranje više raznorodnih izlaza, odnosno kod entiteta čiji se ulazi i izlazi ne mogu svesti na istu mernu jedinicu.

Analiza obavljanja podataka (DEA – *Data Envelopment Analysis*) se može smatrati specijalno dizajniranom tehnikom za merenje efikasnosti kompleksnih entiteta sa raznorodnim ulazima i izlazima. Razvoj ove metodologije traje preko trideset godina i može se reći da je DEA postala vodeća metoda za merenje performansi organizacionih jedinica. Na osnovu rezultata ovakve analize može se odrediti koliko su pojedine jedinice o kojima se odlučuje - DMU (*Decision Making Unit*) neefikasne u odnosu na jedinice koje su efikasne. Pored toga, može se zaključiti koliko je potrebno da se smanji određeni ulaz i/ili poveća određeni izlaz da bi ove jedinice postale efikasne.

Značajna osobina DEA metode je da ulazi i izlazi za konkretnu DMU ne moraju biti istorodni, ali je neophodno da ove jedinice koje se ocenjuju u okviru jedne analize međusobno imaju iste vrste ulaza i izlaza. DEA metoda je zbog svoje fleksibilnosti, koja podrazumeva mali broj prepostavki, primenljiva za merenje efikasnosti i profitnih i neprofitnih organizacija. DEA je razvijena upravo za merenje efikasnosti u neprofitnom uslužnom sektoru (škole, bolnice,...) gde se izlazi ne mere u novčanim jedinicama već efikasnost zavisi od kvaliteta i obima pružene usluge. Pored toga, za neprofitne organizacije je karakteristično da je veza između ulaza i izlaza sistema veoma kompleksna i često je skoro nemoguće formalno opisati. Polje primene DEA metode je veoma prošireno poslednjih godina što je uslovilo razvoj velikog broja modela i proširenja pogodnih za analizu širokog spektra organizacija na osnovu različitih parametara. Pored ostalih, razvijeni modeli omogućavaju analizu produktivnosti, praćenje i analizu efikasnosti tokom vremena, rangiranje posmatranih entiteta, itd.

Rezultati dobijeni primenom DEA modela za procenu performansi entiteta na osnovu vrednosti ulaza i izlaza za ceo vremenski interval, često mogu dovesti do pogrešnog tumačenja rezultata, pošto se gubi vremenska dimenzija. Da bi se u analizu uključila dinamička komponenta razvijena je takozvana *Window* (prozorska) DEA analiza, koja prikazuje promenu efikasnosti DMU tokom vremena. Još jedan od načina na koji se može pratiti dinamika i promena efikasnosti i produktivnosti kroz vremenske periode je primena

Malmkvistovih DEA indeksa. Oni omogućavaju praćenje promena tehničke efikasnosti, proizvodne tehnologije i produktivnosti.

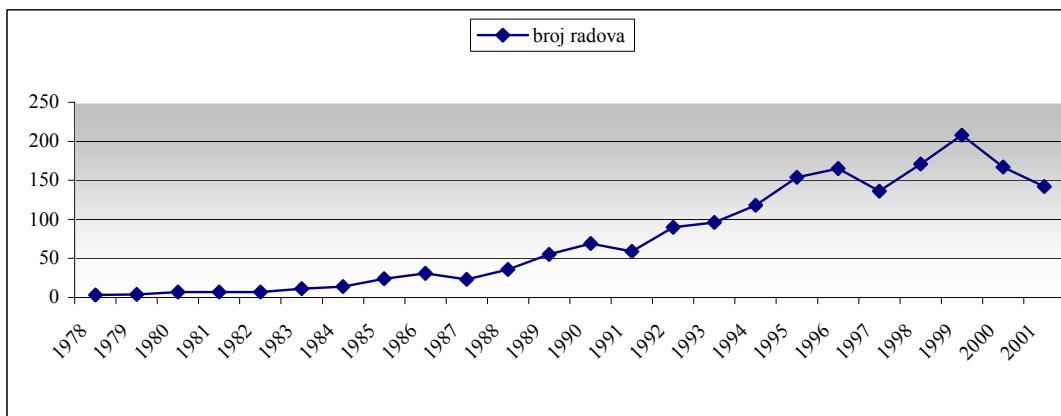
2. ANALIZA OBAVIJANJA PODATAKA – OSNOVE I CILJEVI

Analiza obavijanja podataka (DEA – *Data Envelopment Analysis*) se može smatrati specijalno dizajniranom tehnikom za merenje efikasnosti kompleksnih entiteta. DEA omogućava analizu efikasnosti posmatranih entiteta uzimajući u obzor kombinacije različitih ulaznih i izlaznih promenljivih. Upotreba ove tehnike za merenje efikasnosti velikog broja, kompleksnih jedinica, koje za proizvodnju više raznorodnih izlaza koriste više raznorodnih ulaza, veoma je rasprostranjena u poslednje vreme. Može se reći da je DEA postala vodeća metoda za merenje performansi organizacionih jedinica. Posledica toga je veoma veliki broj objavljenih radova i realizacija velikog broja primena DEA za evaluaciju performansi realnih sistema.

A. Emrouznejad [20] je sakupio sveobuhvatnu bibliografiju koja sadrži 1841 referencu vezanu za publikovane radove i 196 doktorskih radova koji su vezani za DEA metodologiju i merenje performansi objavljenih do 2001. godine. G. Tavares je u [68] statistički obradio 3203 publikacije koje uključuju radove objavljene u časopisima, izložene na međunarodnim konferencijama, poglavља u monografijama, knjige i istraživačke radove. U radu su izvršene detaljne statističke analize (po godinama, po broju radova, po časopisima, po oblastima, po autorima, itd.). Prema ovim analizama DEA se primenjuje u 49 država i to najviše u Sjedinjenim Američkim Državama (1981 objavljen rad), a najmanje u Srbiji (2 objavljena rada od međunarodnog značaja [50]). Gatofi i drugi su u [28] dali pregled stanja primena analize obavijanja podataka posmatrajući razvoj metodologije kroz vreme i u odnosu na druge discipline operacionih istraživanja. Na osnovu njihovog pregleda može se zaključiti da je primena DEA u ekspanziji pošto je 55% od ukupnog broja radova objavljeno od 1995-2001 godine. Grafički pregled broja radova je dat na Slici 1.

Analizu obavijanja podataka su uveli Čarns, Kuper i Rouds 1978. godine [13]. DEA je alat za merenje i praćenje efikasnosti organizacionih performansi. Organizacione jedinice se definišu kao jedinice o kojima se odlučuje - DMU (*Decision Making Unit*). Ovaj naziv je uveden da pokaže da se DEA može koristiti za merenje efikasnosti različitih vrsta entiteta koji posluju na sličan način. DEA je u početku bila namenjena za merenje efikasnosti neprofitnih organizacija, za koje je teško izmeriti izlaze koji nisu obavezno izraženi istim mernim jedinicama, (npr. za bolnice ulazi mogu biti broj uspešno obavljenih operacija i procenat iskorišćenosti bolničkih kreveta, a da se profit kao ekonomski mera izražena u monetarnim jedinicama uopšte ne uzima u obzir). Samim tim teško je i definisati realnu meru efikasnosti za neprofitnu organizaciju.

Efikasnost, kao jedan od parametara poslovanja kome se pridaje posebna pažnja kada se procenjuju performanse organizacionih jedinica, se može meriti upravo kroz odnos ostvarenih izlaza i ulaza upotrebljenih za njihovu proizvodnju. Analiza obavljanja podataka je metoda koja pri komparativnoj analizi efikasnosti uzima u obzir sve relevantne ulaze i izlaze iz sistema, bez obzira na tehnologiju pretvaranja ulaza u izlaze. Za analizu obavljanja podataka je bitno da svaka DMU koristi iste vrste ulaza i transformiše ih u iste vrste izlaza.



Slika 1. *Ukupan broj DEA radova po godinama*

DEA je nastala kao proširenje Farelove metode za merenje efikasnosti [23]. O načinima merenja efikasnosti će biti više reči u sledećem potpoglavlju.

2.1. KONCEPTI I NAČINI MERENJA EFIKASNOSTI

Efikasnost je reč latinskog porekla (*efficax*) koja znači uspešnost. Ona pokazuje stepen delotvornosti proizvodnih činilaca (angažovanih resursa) u proizvodnji materijalnih dobara i usluga. Efikasnost se, u najjednostavnijem slučaju, kod organizacija koje koriste jedan ulaz (troškovi, angažovana sredstva i sl.) za proizvodnju jednog izlaza (dubit, profit, prihod i sl.) definiše kao odnos izlaza prema ulazu:

$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{izlaz}}{\text{ulaz}} \quad (1)$$

Navedena definicija se relativno lako proširuje na slučaj kada postoji više jednorodnih ulaza i izlaza koji se po pravilu izražavaju u monetarnim jedinicama i bez velikih problema se mogu svesti na jedinstveni ulaz odnosno izlaz. U ovim slučajevima može se koristiti veći broj parcijalnih indikatora efikasnosti (produktivnost, ekonomičnost, rentabilnost i drugi "ratio" koeficijenti) koji se dobijaju stavljanjem u odnos pojedinih ostvarenih rezultata (izlaz) i ulaganja (ulaz).

Farel je, polazeći od neadekvatnosti parcijalnih pokazatelja kao što su produktivnost rada i produktivnost kapitala, predložio u [23] analitičku proceduru za merenje efikasnosti i procenu granice efikasnosti proizvodnje. Farel je razmatrao slučaj kada organizacija koristi više ulaza i proizvodi jedan izlaz, a pretpostavio je konstantni prinos na obim (*constant returns to scale*). Neka organizacija posluje sa konstantnim prinosom na obim ako povećanje u njenim ulazima rezultuje u proporcionalnom povećanju njenih izlaza. Farel je uveo i definisao sledeće 3 mere efikasnosti:

- tehničku efikasnost (TE),
- alokativnu efikasnost (AE) i
- ukupnu efikasnost (UE).

Razlika između ove tri mere efikasnosti je u daljem tekstu objašnjena teorijski i grafički na jednom jednostavnom primeru. Rezultati su preuzeti iz [8].

Tehnička efikasnost

Pri analizi efikasnosti kao ulazi se najčešće posmatraju rad, kapital ili maštine koje su potrebne za proizvodnju određene količine izlaza. Ulazne vrednosti se upoređuju u odnosu na jedinicu koja predstavlja najbolju praksu u posmatranom skupu entiteta. Drugim rečima, definisana je ista tehnologija proizvodnje za sve jedinice o kojima se odlučuje, takva da ne ograničava količinu ulaza potrebnih za proizvodnju unapred određene količine izlaza. Organizacija koja najbolje posluje u odnosu na sve druge posmatrane jedinice smatra se ukupno tehnički efikasnog i može se definisati kao najbolja praksa. Ostale jedinice se procenjuju u odnosu na najbolju i njihova tehnička efikasnost je izražena kao procenat od najbolje prakse. Na tehničku efikasnost utiče način upravljanja i stepen operativnosti posmatranog entiteta. To znači da procenat tehničke efikasnosti predstavlja meru operativnosti organizacionih entiteta ne uzimajući u obzir cenu i troškove proizvodnje.

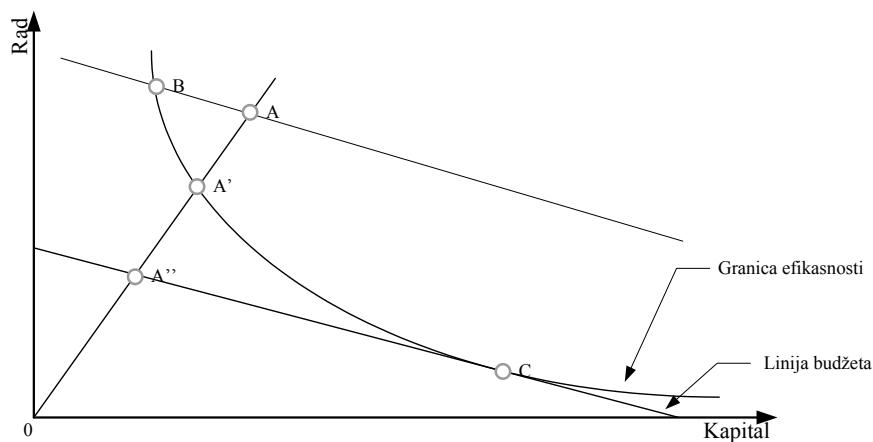
Alokativna efikasnost

Posmatrana jedinica o kojoj se odlučuje teži da minimizira cenu proizvodnje određenog nivoa izlaza odgovarajućim izborom ulaza za dati skup ulaznih cena, pod pretpostavkom da je posmatrana organizacija potpuno tehnički efikasna. Efikasnost alokacije resursa se izražava kao procenat, gde 100% ili 1 pokazuje da organizacija na odgovarajući način koristi ulaze tako da minimizira cenu proizvodnje. Organizacija koja je u inženjerskom (tehničkom) smislu efikasna može biti alokativno neefikasna, pošto ne koristi ulaze u odgovarajućoj proporciji u odnosu na date cene.

Ukupna ili troškovna efikasnost

Ukupna efikasnost kombinuje tehničku i alokativnu efikasnost. Organizacija može biti troškovno efikasna samo ako je i tehnički i alokativno efikasna. Troškovna tj. ukupna efikasnost se računa kao proizvod tehničke i alokativne efikasnosti (izraženo u procentima). Znači organizacija može postići troškovnu efikasnost 100% samo ako je tehnička efikasnost jednaka 100% i efikasnost alokacije resursa jednaka 100%.

Ove koncepte je najlakše prikazati grafički. Na Slici 2. su prikazane različite kombinacije dva ulaza (kapital i radna snaga) potrebne za proizvodnju tražene količine izlaza. Linija koja predstavlja minimalnu vrednost ulaza potrebnih za proizvodnju izlaza naziva se granica efikasnosti (izokvanta). To je kriva koja predstavlja teoretski najbolju inženjersku praksu. Pri tome kriva je konveksna i svaka njena tačka predstavlja različitu kombinaciju rada i kapitala potrebnu da se proizvede ista količina izlaza. To znači da ako se smanji vrednost jednog mora se povećati količina drugog ulaza da bi se dobio isti izlaz. Jedinica može značajno menjati ulazne kombinacije sa prikazanom tehnologijom. Ako organizacija posluje kao tačka na granici efikasnosti može se smatrati tehnički efikasnom, ali ona ne uključuje troškove poslovanja. Zato je budžet (za raspoložive resurse) dodat na sliku.



Slika 2. Tipovi efikasnosti

Sa datim budžetom može se kupiti ili radna snaga ili povećati kapital. Moguće je napraviti različite kombinacije ulaza sa poznatim cenama. Sve kombinacije koje zadovoljavaju budžet su predstavljene pravom linijom. Troškovi proizvodnje tražene količine izlaza se minimiziraju u tački dodira budžetske linije sa granicom efikasnosti (tačka C). U toj tački se postiže potpuna tehnička i alokativna efikasnost.

Ako bi jedinica predstavljena tačkom A imala izlaz kao i tačka A' koja se nalazi na izokvantu, tada bi bila tehnički efikasna. Ona je tehnički neefikasna pošto koristi veće količine ulaza od potrebnih za proizvodnju istog izlaza kao tačka A'. Tačka B je tehnički efikasna, ali

je troškovno neefikasna, pošto tačka C proizvodi isti nivo izlaza sa proporcionalno manjim troškovima.

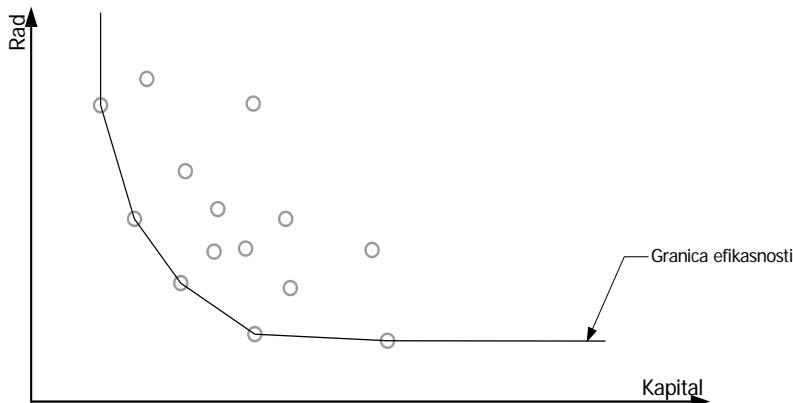
Za tačku A se mogu izvesti sledeće definicije:

- Tehnička efikasnost (TE)= OA'/OA
- Alokativna efikasnost (AE)= OA''/OA' i
- Ukupna efikasnost (UE)= $TE * AE = (OA'/OA) * (OA''/OA') = OA''/OA$.

Dakle, da bi organizacija A postala troškovno tj. ukupno efikasna potrebno je da proporcionalno smanji troškove ulaza za vrednost $1-(OA''/OA)$. Ovo će dovesti do poboljšanja alokativne efikasnosti za vrednost $1-(OA''/OA')$, pošto se podrazumeva da samo tehnički efikasna jedinica može postati i alokativno efikasna. Tehnička efikasnost će se povećati za vrednost $1-(OA'/OA)$. Tehnička efikasnost se često definiše kao proporcionalno smanjenje ulaza neophodno da se dostigne granica efikasnosti. Ovaj proces je poznat kao "radijalno smanjenje" ulaza pošto se tačka pomera duž linije koja je spaja sa koordinatnim početkom.

Teoretsku granicu efikasnosti je u praksi komplikovano odrediti, jer ta procedura prepostavlja da je poznata teoretski najbolja praksa u posmatranoj oblasti. Teoretski najbolju praksu je teško izračunati za posmatrani skup jedinica pošto obično nisu poznate sve informacije o njihovom poslovanju. U realnim situacijama su najčešće poznati podaci samo za posmatrane jedinice o kojima se odlučuje. Iz tih podataka bi se moglo prepostaviti koja je najbolja praksa. Međutim, teško je sa sigurnošću tvrditi da neka od posmatranih organizacija dostiže najbolju praksu. Posebno je teško definisati najbolju praksu za uslužne organizacije sa kompleksnim ulazima, gde se može dogoditi da posmatrane tačke ne obuhvataju čitav opseg mogućih kombinacija ulaznih vrednosti.

Farel je razvio praktičan pristup formiranju granice efikasnosti polazeći od inženjerski definisane najbolje prakse, ali preporučujući najbolju praksu koja se definiše vrednostima ulaza i izlaza posmatranih jedinica. O je u [23] pokazao kako se može konstruisati obvojnica, kao pesimistična specifikacija granice u cilju definisanja funkcije koja se nalazi najbliže posmatranim jedinicama, i kako se može konstruisati granica efikasnosti rešavanjem linearnih jednačina. Ilustracija obvojnica je prikazana na Slici 3, na kojoj su jedinice o kojima se odlučuje sa različitim kombinacijama dva ulaza (rad i kapital) predstavljene tačkama..



Slika 3. *Granica efikasnosti*

Dakle, Farel je definisao koncept granične proizvodne funkcije nasuprot dotada najčešće korišćenom konceptu prosečnih performansi koje su služile kao osnova za poređenje posmatranih jedinica u ekonometrijskoj literaturi. U [24] se navode sledeći Farelovi doprinosi:

- Mera efikasnosti za neefikasnu jedinicu se bazira na radikalnom smanjenju ili povećanju vrednosti do tačke na granici efikasnosti;
- Proizvodna granica se definiše kao najpesimističnija «deo po deo» linearna obvojnica podataka;
- Proizvodna granica je izokvanta koja se dobija rešavanjem sistema linearnih jednačina pri čemu se ispunjavaju dva uslova:
- nagib granice efikasnosti nije pozitivan i
- ne postoji ni jedna posmatrana jedinica koja se nalazi između granice efikasnosti i koordinatnog početka.

Postoji nekoliko načina da se na osnovu ulazih podataka za jedinice iz posmatranog skupa nacrti kriva sa Slike 3. koja predstavlja granicu efikasnosti i oni se mogu predstaviti kroz pravce razvoja Farelove ideje. Najčešće korišćene tehnike se mogu podeliti na parametarske i neparameterske.

Može se reći da bi merenje efikasnosti poslovanja bilo jednostavno kada bi analitički oblik proizvodne funkcije bio poznat. Međutim, u praksi njen oblik uglavnom nije poznat i postoje samo podaci o nivoima izlaza koji su postignuti za određene vektore ulaza kod određenog broja sličnih organizacija. Zbog toga je u praksi najčešće primenjivan “parametarski” pristup za merenje efikasnosti. Ovaj pristup zahteva nametanje analitičkog oblika funkcije (jednačina regresije ili proizvodna funkcija) koja definiše odnos nezavisnih i zavisnih promenljivih. Izabrani oblik ove funkcije zahteva i pretpostavku o funkciji raspodele

greške, kao i neka druga ograničenja za njene parametre. Kao oblik proizvodne funkcije najčešće su korištene translog (*transcendental logarithmic*) i Kob-Daglasova proizvodna funkcija. Ocenjivanje parametara proizvodne funkcije moguće je vršiti pomoću regresione analize ili pomoću linearog programiranja u zavisnosti od načina definisanja slučajnih uticaja.

Parametarski pristup podrazumeva analizu centralnih tendencija pošto se jedna optimizaciona ravan na osnovu prosečnog ponašanja postavlja kroz centar podataka i na njoj se uglavnom ne nalazi ni jedna od stvarnih organizacija čiju efikasnost treba proceniti. Regresionu analizu je moguće koristiti za određivanje performansi onih jedinica o kojima se odlučuje koje koriste jedan ulaz ili obezbeđuju jedan izlaz. U slučaju DMU sa jednim ulazom, da bi se parametri modela procenili moguće je regresirati ulazne nivoe na izlazne. Ako je pronađen zadovoljavajući model, on se može koristiti za određivanje ulaznih nivoa svake DMU na osnovu njihovih izlaznih nivoa. Poredeći stvarne i predviđene ulazne nivoe neke DMU određuje se njena efikasnost. Stohastička analiza je metoda koja koristi regresionu tehniku. Ona pokušava da razmatra tačke izvan linije koje su ili vrlo atipične, ili su izuzetci koji su rezultat greške u podacima. Relevantnost stohastičke analize je ograničena na situacije kada postoji samo jedan izlaz ili su raspoloživi relativno kompletни podaci što nije čest slučaj u uslužnom sektoru. Na sličan način regresiona analiza se može koristiti za određivanje performansi DMU sa jednim izlazom. Određivanje performansi, u slučaju gde DMU koriste više ulaza i stvaraju više izlaza, zahteva korišćenje simultanih jednačina. Više o parametarskim tehnikama se može videti u [44].

Drugi pristup ocene granice efikasnosti je neparametarski i to je najčešće analiza obavijanja podataka o čijim osnovama i modifikacijama će biti reči u sledećem potpoglavlju.

2.2. MERENJE EFIKASNOSTI POMOĆU ANALIZE OBAVIJANJA PODATAKA

Neparametarski pristup je razvijen polazeći od činjenice da se za ocenjivanje uspešnosti organizacija, pogotovo neprofitnih, u praksi najčešće mora razmatrati više ulaza i izlaza koji su po svojoj prirodi raznorodni (finansijski, tehnički, tehnološki, ekološki, socijalni, itd.) i izražavaju se u različitim mernim jedinicama. U ovom slučaju se ne može doneti zaključak o nivou efikasnosti na osnovu parcijalnih pokazatelja efikasnosti koji mere delotvornost pojedinih resursa jer se njihove vrednosti uglavnom kreću u suprotnom smeru. Neophodno je definisati sumarni sintetički pokazatelj efikasnosti koji će uzeti u obzir sve značajne višestruke rezultate i sve resurse koji su korišćeni za njihovo ostvarivanje. Formula za efikasnost dobija sledeći oblik:

$$\text{Efikasnost} = \frac{\text{težinska suma izlaza}}{\text{težinska suma ulaza}} \quad (2)$$

Ovde nastaju problemi agregacije posmatranih ulaza (izlaza) u jedan virtualni ulaz (izlaz) da bi se odredila efikasnost organizacije. Najpre treba rešiti problem koji se odnosi na izražavanje ulaznih i izlaznih podataka u opsezima vrednosti koje su međusobno uporedive (problem skaliranja). Sledeći problem se odnosi na određivanje relativnih važnosti pojedinih ulaza odnosno izlaza (dodeljivanje težinskih koeficijenata ili ponderisanje).

Pored dosada pomenutih, problem se takođe javlja i kada treba odrediti efikasnost više različitih jedinica koje koriste iste vrste ulaza i proizvode iste vrste izlaza. Za zajednički fiksirani skup težinskih koeficijenata moguće je jednostavno izračunati efikasnost svake od posmatranih jedinica prema formuli (2). Tako izračunate efikasnosti se mogu koristiti kao kriterijum za određivanje redosleda jedinica. Očigledno je da redosled zavisi od vrednosti ulaza i izlaza jedinica, ali i od vrednosti koje su dodeljene za težinske koeficijente. Međutim, u praksi je veoma teško vrednovati ulaze i izlaze i doći do zajedničkog skupa težinskih koeficijenata jer pojedine jedinice dodeljuju prilično različite stepene važnosti njihovim ulazima i izlazima. Na primer, ako se procenjuje efikasnost škola onda se može uočiti da neke škole dostignuća u muzici i u sportu vrednuju na drugačiji način u odnosu na ostale škole. Kada bi postojala objektivna metoda za određivanje vrednosti težinskih koeficijenata, računanje efikasnosti posmatranih jedinica bi bilo jednostavno.

Tvorci DEA metode su pretpostavili da pri oceni efikasnosti jedinica ne mora da postoji objektivan postupak za određivanje vrednosti težinskih koeficijenata. Ono oko čega treba da se dogovore sve jedinice čija se efikasnost procenjuje jeste koji su to ulazi i izlazi koje treba uzeti u obzir i koje su najmanje dozvoljene vrednosti za težinske koeficijente. Pored toga, jedinstveno se rešava problem skaliranja tako da se efikasnost izražava kao broj između 0 i 1. Svaka jedinica ima slobodu da odredi vrednosti težinskih koeficijenata na način koji njoj najviše odgovara, odnosno tako da maksimizira svoju efikasnost. Naknadnom analizom moguće je pokazati koje su od razmatranih jedinica efikasne, a koje nisu.

Na osnovu podataka o ulazima i izlazima, DEA metoda ocenjuje da li je neka jedinica o kojoj se odlučuje efikasna ili nije u odnosu na preostale jedinice uključene u analizu, odnosno da li se nalazi na granici efikasnosti. DEA je determinističko sredstvo konstruisanja "deo po deo" linearne aproksimacije granice efikasnosti bazirane na raspoloživom skupu jedinica. Drugim rečima, posmatra se distribucija skupa tačaka i konstruiše se linija oko njih koja ih obavlja – "obvojnica" (*envelope*). Odatle potiče i naziv metode - Analiza obavijanja podataka. Granica efikasnosti u ekonomskom smislu predstavlja empirijski dobijen maksimum izlaza koji svaka jedinica odlučivanja može ostvariti sa datim ulazima i ponaša se kao obvojnica za neefikasne jedinice. Metoda analizira svaku jedinicu odlučivanja i proverava da li je njene

ulaze moguće obaviti odozdo (dati izlaz moguće je postići sa manjom količinom ulaza) imajući u vidu vrednosti ulaza preostalih jedinica, kao i da li je moguće njene izlaze obaviti odozgo (sa datim ulazom moguće je proizvoditi veći izlaz) na osnovu vrednosti izlaza preostalih jedinica. Ako je moguće jedinicu obaviti ona je relativno neefikasna, a ako nije ona učestvuje u formiranju granice efikasnosti koja ovde predstavlja ekvivalent za graničnu funkciju proizvodnje.

Dakle, DEA je tehnika matematičkog programiranja koja omogućuje da se utvrdi da li je entitet, na osnovu podataka o njegovim ulazima i izlazima, efikasan ili nije, relativno prema drugim entitetima uključenim u analizu. To je neparametarski pristup jer ne zahteva *a priori* pretpostavku o analitičkoj formi funkcije proizvodnje. Dok su parametarski pristupi okrenuti ka centralnim tendencijama i procena performanse nekog entiteta vrši se u odnosu na prosečnu performansu, DEA je granična metoda koja se sastoji od serije optimizacija (po jedna za svaki entitet uključen u analizu). Za svaku DMU se izračunava maksimalna mera performansi u odnosu na sve druge jedinice u posmatranoj populaciji koje moraju zadovoljiti uslov da "leže" na ili ispod ekstremne granice, koja se naziva granica efikasnosti. Mera efikasnosti koju DEA daje je relativna, jer zavisi od toga koji su i koliki broj entiteta je uključeno u analizu, kao i od broja i strukture ulaza i izlaza.

Osnovna karakteristika DEA metode je da ona svaku DMU procenjuje kao relativno efikasnu ili relativno neefikasnu. Čarns, Kuper i Rouds [13, str. 439] navode da se jedna DMU može okarakterisati kao efikasna samo ako nisu ispunjena sledeća 2 uslova:

- Moguće je povećati joj bilo koji izlaz bez povećanja bilo kog od ulaza i bez smanjenja bilo kog drugog izlaza;
- Moguće je smanjiti joj bilo koji ulaz bez smanjenja bilo kog od izlaza i bez povećanja bilo kog drugog ulaza.

Gore navedena karakterizacija koja istovremeno uključuje i izlaznu i ulaznu orijentaciju može se smatrati kao proširenje koncepta Pareto efikasnosti.

Za svaku neefikasnu DMU, DEA identificuje sadržaj i nivo neefikasnosti za svaki ulaz i izlaz. Nivo neefikasnosti određen je upoređivanjem sa jednom referentnom DMU ili sa konveksnom kombinacijom drugih referentnih DMU koje se nalaze na granici efikasnosti i koje koriste proporcionalno isti nivo ulaza, a proizvode proporcionalno isti ili veći nivo izlaza. DEA metoda je uspešan i nov način za empirijsko određivanje najbolje praktične granice proizvodnje. Autori u [13, str. 24] posebno ističu sledeće njene osobine:

- fokus je na pojedinačnim opservacijama nasuprot populacionim usrednjavanjima;
- određuje se pojedinačna sumarna mera za svaku DMU na osnovu vrednosti ulaznih faktora pri proizvodnji željenih izlaza;

- u analizu su uključene vrednosti za više ulaza i izlaza koje su izražene u njihovim prirodnim jedinicama;
- moguće je uključiti egzogene promenljive da bi se predstavili ulazni i izlazni faktori koji su pod kontrolom okruženja;
- moguće je uključiti kategoriske promenljive da bi se predstavili ulazni i izlazni faktori koji mogu uzeti samo diskretne vrednosti iz dopustivog skupa vrednosti;
- ne zahtevaju se *a priori* cene i težine za ulazne i izlazne faktore;
- ne zahteva se funkcionalna forma proizvodnog odnosa ulaz-izlaz;
- moguće je uključiti vrednosne ocene za ulaze i izlaze kada se želi;
- ukazuje se na potrebne promene ulaza i/ili izlaza da bi DMU ispod granice efikasnosti (neefikasan DMU) bio projektovan na granicu efikasnosti;
- dobijene mere efikasnosti su Pareto optimalne;
- potpuno jednaki kriterijumi se primenjuju u ocenjivanju svake DMU.

DEA metoda obuhvata nekoliko različitih pristupa i familiju međusobno povezanih modela linearног programiranja. Rešenja ovih modela imaju posebna ekonomска тumačења и на основу njih dobijaju se informacije koje су од значаја за управљање daljim radom kako efikasnih, tako i neefikasnih jedinica.

3. DEA MODELI

Procena efikasnosti pomoću analize obavijanja podataka se može vršiti sa više aspekata u zavisnosti od izabranih modela. Pošto se DEA intenzivno razvija i primenjuje 30 godina postoji veliki broj modela. Osnovni DEA modeli i neka njihova proširenja će biti predstavljeni i korišćeni u okviru ove teze.

3.1. OSNOVNI DEA MODELI

Teorijska osnova opisana u prethodnom poglavlju je poslužila Čarnsu, Kuperu i Roudsu da razviju DEA modele, koji su tokom godina modifikovani i proširivani. Pretpostavimo da raspoložemo podacima o angažovanim ulazima i realizovanim izlazima za svaku od n DMU čiju efikasnost treba proceniti. Takođe, pri selekciji jedinica o kojima će se odlučivati treba voditi računa o sledećim prepostavkama [17, str. 22]:

- Podaci o ulazima i izlazim su raspoloživi za svaki ulaz i izlaz i imaju pozitivne vrednosti za svaku DMU;
- Svi podaci koji izražavaju interes menadžera ili analitičara su uključeni u analizu efikasnosti;
- U principu teži se smanjenju ulaza i povećanju izlaza i indeks efikasnosti treba da odražava ovaj princip;
- Merne jedinice ulaza i izlaza ne moraju biti jednorodne. One mogu uključivati broj časova, površinu radnog prostora, novac, itd.

Neka je x_{ij} - posmatrani iznos ulaza i -te vrste za DMU_j ($x_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$), a y_{rj} - posmatrani iznos izlaza r -te vrste za DMU_j ($y_{rj} > 0$, $r = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, n$). Čarns, Kuper i Rouds su u [13] predložili da se za svaku DMU_k , $k = 1, 2, \dots, n$, reši optimizacioni zadatak (u literaturi poznat kao CCR racio model):

MODEL (M1)

$$(Max) h_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (3)$$

p.o.

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\mu_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (5)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

gde su:

h_k – relativna efikasnost k -te DMU;

n – broj DMU koje treba porebiti;

m – broj ulaza;

s – broj izlaza;

μ_r – težinski koeficijent za izlaz r ;

v_i – težinski koeficijent za ulaz i .

Relativna efikasnost h_k za DMU $_k$, je definisana kao odnos težinske sume njenih izlaza (virtuelni izlaz) i težinske sume njenih ulaza (virtuelni ulaz) što je matematička formulacija definicije (2). CCR racio model izračunava ukupnu tehničku efikasnost u koju su uključena i čista tehnička efikasnost i efikasnost kao posledica različitih obima poslovanja. U modelu se teži maksimizaciji vrednosti h_k tako što svaka jedinica dodeljuje vrednosti upravljačkim promenljivim μ_r i v_i takve da je prikažu u što boljem svetu. Kao i kod Farela, pretpostavlja se konstantni prinos na obim, odnosno da povećanje vrednosti angažovanih ulaza treba da rezultuje u proporcionalnom povećanju ostvarenih izlaznih nivoa. Može se pokazati da vrednost h_k ne zavisi od mernih jedinica ulaza i izlaza, pri čemu su naravno merne jedinice iste za sve DMU. Za detaljno objašnjenje videti tzv. «teoremu jedinične invarijantnosti» [17, str. 24].

Pošto i za k -tu DMU za koju se traži maksimalna efikasnost (3) važi uslov (4), očigledno da važi $0 < h_k \leq 1$. Ako je vrednost za h_k u funkciji cilja jednaka 1, onda je k -ta DMU relativno efikasna, a ako je manja od 1, DMU $_k$ je relativno neefikasna i vrednost h_k pokazuje za koliko procentualno ova jedinica treba da smanji svoje ulaze. DMU $_k$ se može smatrati potpuno efikasnog ako i samo ako, dostignuća drugih DMU ne obezbeđuju dokaz da bi se neki od njenih ulaza ili izlaza mogao poboljšati bez pogoršavanja nekog od njenih preostalih ulaza ili izlaza. Odnosno, ako je posmatrana jedinica efikasna, to znači da sa njenim optimalnim vrednostima za težinske koeficijente nijedna druga jedinica ne može da ostvari veću vrednost izlaza za dati ulaz, dok za neefikasne jedinice to nije slučaj. Uslov dat u relaciji (4) važi za sve DMU i označava da svaka od njih leži na ili ispod granice efikasnosti.

Težinski koeficijenti μ_r i v_i (nepoznate u modelu) pokazuju stepene važnosti svakog ulaza i izlaza koje svaka jedinica bira tako da bude što je moguće efikasnija. Ako tada ne postoji neka druga jedinica koja sa istim angažovanim ulazima proizvodi veći izlaz onda je posmatrana jedinica efikasna. Dakle, DMU_k bira vrednosti težina za ulaze i izlaze tako da se njena efikasnost maksimizira, ali vrednosti težina moraju biti dopustive za sve DMU uključene u merenje efikasnosti i zadovoljavati uslov da je za svaku DMU odnos težinske sume izlaza i težinske sume ulaza manji ili jednak od 1. Dobijene vrednosti za težinske faktore zavise od skale merenja vrednosti za ulaze i izlaze i nisu pogodne za međusobno poređenje. Udeo i važnost svakog ulaza (izlaza) u dobijenom indeksu efikasnosti pokazuje proizvod vrednosti tog ulaza (izlaza) i dodeljenog težinskog koeficijenta. Već je objašnjeno da se u DEA terminologiji proizvod vrednosti nekog ulaza (izlaza) i njemu dodeljenog težinskog koeficijenta naziva virtuelni ulaz (izlaz).

Ograničenja data relacijama (5) i (6) koja označavaju da težinski koeficijenti mogu imati samo nenegativne vrednosti kasnije su modifikovana u sledeća ograničenja:

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (5')$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6')$$

gde je: ε - mala pozitivna vrednost. U literaturi se najčešće predlaže da je $\varepsilon = 10^{-6}$. Naravno, ako su stvarne vrednosti za neki od ulaza i izlaza velike (veće od 10^6), treba ih ili podeliti sa nekim pogodnim brojem ili treba zadati manju vrednost za ε . Ova modifikacija sprečava potpuno ignorisanje uticaja pojedinih ulaza i izlaza pri određivanju mere efikasnosti. Neka DMU može da bude "lažno" klasifikovana kao relativno efikasna samo na osnovu vrednosti jednog ulaza i jednog izlaza, za koje će izabrati pogodne vrednosti težinskih faktora.

Zadatak opisan relacijama (3) – (5) je nelinearan, nekonveksan sa linearno-razlomljennom funkcijom cilja i linearno-razlomljennim ograničenjima. Zadatak linearog razlomljennog programiranja može se pomoću jednostavnih transformacija svesti na ekvivalentan linearni program.

MODEL (M2)

$$(Max) \quad h_k = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} \quad (7)$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (10)$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

Dokaz ekvivalencije modela (3)-(6) i (7)-(11) se može naći u [17, str. 24]. U modelu (7)-(11) za k -tu DMU maksimizira se virtuelni izlaz, a njen virtuelni ulaz je jednak 1. Ograničenja data relacijom (9) označavaju da optimalne težine za k -tu DMU moraju zadovoljavati uslov da za svaku od n DMU njen virtuelni izlaz ne može biti veći od njenog virtuelnog ulaza. Ako je vrednost funkcije cilja jednaka 1, onda za sve preostale jedinice njihov virtuelni izlaz biće manji od virtuelnog ulaza, a ako je vrednost funkcije cilja manja od 1, onda one jedinice kod kojih virtuelni izlaz bude jednak njihovom virtuelnom ulazu čine uzorne ili referentne jedinice za k -tu DMU i obrazuju facet (lice) u odnosu na koju je izmeren njen nivo efikasnosti.

Broj promenljivih u modelu M2 jednak je $(m+s)$, a broj ograničenja $(n+m+s+1)$. S obzirom da je broj DMU koje se ocenjuju uglavnom dosta veći od ukupnog broja ulaza i izlaza, u praksi se, najčešće rešava njegov dualni model. U dualnom modelu funkcija cilja pokazuje sa kojom minimalnom vrednošću ulaza je moguće ostvariti postojeći nivo izlaza k -te DMU. Promenljiva Z_k naziva se faktor intenziteta i pokazuje koliko je moguće da k -ta DMU proporcionalno smanji sve izlaze. Dualne promenljive s_i^- i s_r^+ pokazuju koliko je moguće da k -ta DMU pojedinačno smanji i -ti ulaz i poveća r -ti izlaz da bi postala efikasna. S obzirom da one predstavljaju dopunu do jednakosti u relacijama (14) i (15), one se nazivaju dopunske promenljive. U ovom modelu dualna promenljiva λ_j predstavlja dualnu težinu koja pokazuje važnost koja je dodeljena DMU_j ($j = 1, 2, \dots, n$) pri definisanju ulazno-izlaznog miksa hipotetičke kompozitne jedinice sa kojom će se DMU_k direktno porebiti. Vrednosti za promenljive λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) se biraju tako da svaki od s izlaza hipotetičke kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, r = 1, 2, \dots, s \right)$ ne bude manji od odgovarajućeg stvarnog izlaza DMU_k , a da svaki od ulaza kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m \right)$ ne bude manji od odgovarajućeg stvarnog ulaza DMU_k . Naziv metode upravo dolazi od ovog dualnog DEA modela za koji se kaže da ima formu obavijanja. Kada hipotetičku kompozitnu jedinicu nije moguće konstruisati izvan postojećih jedinica k -ta DMU je efikasna. Dualni CCR DEA model glasi:

MODEL (M3)

$$(\text{Min}) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right) \quad (12)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (13)$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Z_k - \text{neograničeno} \quad (15)$$

Ako od svih λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) samo λ_k ima pozitivnu vrednost onda je faktor intenziteta $Z_k = 1$, što znači da je DMU_k angažovala minimalnu količinu ulaznih faktora i granična je tačka. Ako to nije slučaj, k -ta DMU je neefikasna, a njoj najbliža površ granice efikasnosti sa kojom je obavijena je formirana od onih DMU za koje je vrednost promenljive λ_j pozitivna u optimalnom rešenju modela M3. Ove jedinice sa pozitivnom vrednošću za dualnu težinu λ_j nazivaju se referentne ili uzorne za k -tu DMU. Najkraće rastojanje između neefikasne DMU i granice efikasnosti je upravo rastojanje do kompozitne jedinice. Dakle, ako je $Z_k < 1$, onda je DMU_k relativno neefikasna i treba proporcionalno za $(1-Z_k)*100$ procenata da smanji sve ulaze da bi postala efikasna sa postojećim nivoom izlaza.

Uloga parametra ε u dualnom DEA modelu je da se istakne da minimizacija vrednosti faktora intenziteta ima prednost u odnosu na maksimizaciju dopunskih promenljivih s_i^- i s_r^+ . Ako posmatramo ograničenja zadata relacijom (14) očigledno je da se smanjivanje ulaza za k -tu DMU (sve do nivoa ulaza kompozitne jedinice) može postići ili preko smanjivanja vrednosti faktora intenziteta Z_k (od vrednosti 1 prema 0) ili preko povećavanja vrednosti odgovarajuće dopunske promenljive za taj ulaz. Isto tako, na osnovu relacije (13) k -ta DMU može povećavati vrednost odgovarajuće dopunske promenljive za izlaz sve do dostizanja izlaza kompozitne jedinice. Pošto faktor intenziteta neke jedinice pokazuje njen nivo neefikasnosti, onda mu treba odrediti najmanju moguću vrednost, pa je u funkciji cilja uz promenljivu Z_k koeficijent 1, a uz dopunske promenljive koeficijent je dovoljno mali pozitivni broj ε .

Treba istaći da se ovde za svaku DMU_j ($j = \overline{1, n}$) uzetu kao DMU_k rešava odgovarajući problem linearног programiranja. Dakle potrebno je rešiti n zadatka linearног programiranja oblika (12) – (15), sa po $(n+s+m+1)$ promenljivom i sa $(s+m)$ ograničenja (broj ulaznih i izlaznih faktora uključenih u analizu). Očigledno je da se povećanjem broja jedinica čija se

efikasnost meri ne menja se broj ograničenja u dualnom DEA modelu, već samo povećava broj promenljivih.

Zbog povezanosti problema opisanih modelima M2 i M3, kao i zbog teoreme dualiteta u linearном programiranju DMU_k je efikasna, ako i samo ako, su za optimalno rešenje

$(\lambda^*, s^{+*}, s^{-*}, Z_k^*)$ problema (12) – (15) ispunjeni uslovi:

$$Z_k^* = 1 \quad (16)$$

$$s^{+*} = s^{-*} = 0 \quad (17)$$

Potreban uslov, da bi k -ta DMU bila relativno efikasna je da joj je faktor intenziteta jednak 1, a neophodno je i da su sve dopunske promenljive s_i^- i s_r^+ jednake 0. Ova dva uslova se odnose na “radijalnu” efikasnost posmatrane DMU_k . Ako je faktor intenziteta Z_k jednak 1, a neka od dopunskih promenljivih je pozitivna, DMU_k je granična tačka, ali nije efikasna granična tačka. Takva DMU je nepotpuno obavijena, jer bar sa jedne strane nije obavijena. Za takvu jedinicu se kaže i da je “slabo efikasna”. Pokazano je da je neka neefikasna jedinica potpuno obavijena samo ako u optimalnom rešenju dualnog DEA modela postoji $(m+s-1)$ pozitivna dualna težina λ_j ($j = \overline{1, n}$). Dakle, samo ako se za neefikasnu jedinicu može identifikovati $(m+s-1)$ referentnih jedinica. [46].

Pomoću optimalnog rešenja $(\lambda^*, s^{+*}, s^{-*}, Z_k^*)$ problema (12) – (15) mogu se odrediti ciljane vrednosti za jedinice o kojima se odlučuje:

$$X''_k = Z_k^* X_k - s^{-*}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

$$Y''_k = Y_k + s^{+*}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (19)$$

Vrednosti X''_k i Y''_k koje se dobijaju relacijama (18) i (19) predstavljanju vektore ciljanih vrednosti ulaza i izlaza za DMU_k sa kojima bi ona postala efikasna (X'' predstavlja m -dimenzioni ulaza, a Y'' n -dimenzioni vektor izlaza). Pri tome razlika $\Delta X_k = X_k - X''_k$ odnosno $\Delta Y_k = Y''_k - Y_k$ pokazuje procjenjeni iznos neefikasnosti i -tog ulaza odnosno r -tog izlaza respektivno. Na taj način se na osnovu optimalnog rešenja dualnog DEA modela za neefikasnu DMU_k direktno izračunava koliko bi trebalo da promeni ulaze i/ili izlaze pa da postane efikasna.

CCR modeli, koji su do sada izloženi, mere ukupnu tehničku efikasnost jedinice i u dobijen indeks efikasnosti su uključene i čista tehnička efikasnost i efikasnost obima. Pretpostavlja se da jedinice posluju sa konstantnom prinosom na obim, odnosno da povećanje

ulaza mora rezultovati u proporcionalnom povećanju izlaznih nivoa. Granica efikasnosti koju daju CCR modeli je u obliku konveksnog konusa (*covex cone*).

Da bi merili čistu tehničku efikasnost Banker, Čarns i Kuper su 1984. godine u [3] dali proširenje originalnih CCR DEA modela. Granica efikasnosti koju daje BCC model je u obliku konveksnog omotača (*convex hull*). BCC model meri čistu tehničku efikasnost, odnosno daje meru efikasnosti koja ignoriše uticaj obima poslovanja tako što se k -ta DMU poredi samo sa drugim jedinicama sličnog obima. Efikasnost obima (*scale efficiency*) koja pokazuje da li posmatrana jedinica posluje sa optimalnim obimom operacija može se dobiti kada se mera efikasnosti koju daje CCR model (ukupna tehnička efikasnost) podeli sa merom efikasnosti koju daje BCC model (čista tehnička efikasnost).

U odnosu na primalni CCR model, primalni BCC model sadrži dodatnu promenljivu u^* koja definiše položaj pomoćne hiperravnih koja leži na ili iznad svake DMU uključene u analizu. Izloženi matematički model proverava da li je k -ta DMU postigla željeni nivo izlaza sa minimalnim angažovanjem ulaza i od svih mogućih hiperravnih koje prekrivaju sve DMU bira se ona kod koje je horizontalno rastojanje od posmatrane DMU do hiperravnih najmanje. Vrednost parametra u^* direktno ukazuje na prirodu ekonomije obima koju dopušta DEA model. To je pokazano u teoremi koju su Banker i Tral dokazali u [5], čija je osnovna ideja malo relaksirana uslovima koji slede. Prema teoremi, ako se prepostavi da DMU_k leži na granici efikasnosti sledeći uslovi identifikuju prirodu ekonomije obima za posmatrani entitet:

- DMU_k posluje sa neopadajućim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* \leq 0$ za sve alternativne optimume;
- DMU_k posluje sa nerastućim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* \geq 0$ za sve alternativne optimume;
- DMU_k posluje sa konstantnim prinosom na obim ako je i samo ako je vrednost $u^* = 0$ za sve alternativne optimume.

Ako je $u^* = 0$ onda se BCC model svodi na CCR model (3)-(6). Relaksacija se odnosi na to da su strogi ulovi negativnosti ili pozitivnosti zamenjeni sa nepozitivnošću tj. nenegativnošću i na taj način se posmatra neopadajući umesto rastući povraćaj na obim odnosno nerastući umesto opadajućeg. Ova relaksacija ne menja suštinu teoreme, ali je bliža realnim situacijama i takvi modeli su lakši za primenu. U slučaju jednog ulaza i jednog izlaza pomoćna hiperravan koja prekriva podatke u baznom BCC modelu se svodi na polupravu, a u^* definiše vrednost odsečka na aspcisi iz kojeg polazi ta poluprava.

Primalni BCC DEA model koji je predložen u [3] ima sledeći oblik:

MODEL (M4)

$$(\text{Max}) \quad h_k = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} + u_* \quad (20)$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1 \quad (21)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_* \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (23)$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

Ideja na kojoj se zasnivaju BCC modeli lakše se može razumeti na dualnom DEA modelu. Dualni BCC model se dobija ako se u dualni CCR model (M3) doda ograničenje konveksnosti:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (25)$$

Ovo ograničenje omogućuje promenljivi (varijabilni) prinos na obim (povećanje ulaza ne mora rezultovati u proporcionalnoj promeni izlaza) i obezbeđuje da referentan skup bude formiran kao konveksna kombinacija DMU koje su u njemu (one koje imaju pozitivnu vrednost za λ u optimalnom rešenju). Ograničenje konveksnosti obezbeđuje da je kompozitna hipotetička jedinica sličnog obima i sličnog ulazno-izlaznog miksa kao i jedinica koja se ocenjuje. Ukoliko je potrebno u model uvesti konkretan pravac prinosa na obim ograničenje (25) se zamenjuje sa:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \text{ za nerastući prinos na obim} \quad (25')$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \text{ za neopadajući prinos na obim} \quad (25'')$$

Neka DMU posluje sa nerastućim prinosom na obim, ako proporcionalno povećanje svih njenih ulaza dovodi do manjeg ili jednakog proporcionalnog povećanja svih njenih izlaza. Granica efikasnosti za DEA modele sa nerastućim prinosom na obim uvek se sastoji od 2 dela i to prvi "niži" deo se poklapa sa CCR granicom efikasnosti, a drugi deo se poklapa sa BCC granicom efikasnosti.

Za neku DMU se kaže da posluje sa neopadajućim prinosom na obim ako proporcionalno povećanje svih njenih ulaza rezultuje u većem ili jednakom proporcionalnom povećanju svih njenih izlaza. Granica efikasnosti koju daju ovi modeli se takođe sastoji od 2 dela samo što sada njen niži deo odgovara BCC granici efikasnosti, a njen viši deo se poklapa sa CCR granicom efikasnosti.

U daljem tekstu bazni BCC model sa varijabilnim prinosom na obim će biti označen kao BCC_1 , model sa nerastućim prinosom na obim sa BCC_2 i poslednji model u kom se zahteva neopadajući prinos biće označen sa BCC_3 .

Primer 1.

Za ilustraciju osnovnih razlika između CCR i BCC modela biće korišćen primer dat u Tabeli 1. U ovom slučaju će biti posmatrano 7 mikro-kreditnih organizacija sa jednim ulazom i jednim izlazom. Relevantni parametri su:

- Broj kreditnih asistenata (BKA) – ulaz,
- Broj aktivnih kredita (BAK)- izlaz 1.

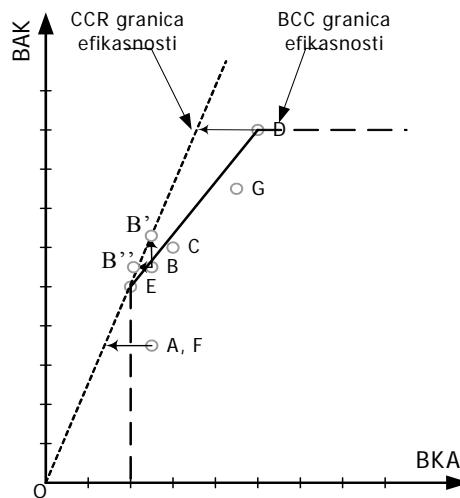
Mikrokreditne organizacije	BKA	BAK	CCR model	BCC model		
			$h_k^*(CCR)$	$h_k^*(BCC_1)$	$h_k^*(BCC_2)$	$h_k^*(BCC_3)$
A	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
B	50	110	0.88	0.95	0.95	0.88
C	60	120	0.80	0.92	0.92	0.80
D	100	180	0.72	1.00	1.00	0.72
E	40	100	1.00	1.00	1.00	1.00
F	50	75	0.60	0.80	0.60	0.80
G	90	150	0.67	0.86	0.86	0.67

Tabela 1. *Rezultati primene CCR i BCC DEA modela*

Na Slici 4, svaka DMU je na osnovu vrednosti ulaza i izlaza predstavljena kao jedna tačka u koordinatnom sistemu, a predstavljene su i granice efikasnosti dobijene na osnovu rešenja CCR i tri BCC modela sa različitim prinosima na obim (BCC_1 – varijabilni prinos, BCC_2 – nerastući i BCC_3 – neopadajući).

Kao što se može videti sa slike, poluprava koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku E pokazuje granicu efikasnosti dobijenu rešavanjem CCR modela. U slučaju jednog ulaza i jednog izlaza, granica efikasnosti koju daje CCR model je uvek prava linija koja polazi iz početka koordinatnog sistema. Ovo je posledica činjenice da CCR model ne dozvoljava da DMU posluju sa različitom ekonomijom obima, odnosno da dozvoljava samo konstantni prinos na obim. Na primer ako se posmatraju jedinice E i B može se reći da je broj aktivnih kredita 2.5 puta veći od broja kreditnih asistenata u slučaju organizacije E, dok je taj odnos za

DMU B jednak 2.2. Znači jedinica B je neefikasna pošto je njen prinos na obim manji od prinosa koji obezbeđuje E. Ona bi mogla postati efikasna i naći se na polupravoj OE (između tačaka B' i B'') ako smanji ulaz ili poveća izlaz u pravcu strelica na grafu. Puna linija koja spaja tačke E i D na «severozapadnoj» granici skupa proizvodnih mogućnosti predstavlja granicu efikasnosti dobijenu rešavanjem BCC_1 modela. U ovom slučaju DMU D je proglašena efikasnom iako je odnos izlaza prema ulazu jednak samo 1.8. Međutim prema modelu BCC_1 dozvoljen je varijabilan prinos na obim, i ne postoji ni jedna druga jedinica sa sličnom izlazno-ulaznom kombinacijom sa kojom bi se D mogla porebiti, pa je postala efikasna. Isprekidane linije na grafikonu pokazuju kakav je zapravo oblik granice efikasnosti (konveksni omotač) koji se dobija kao rezultat primene osnovnog BCC modela (BCC_1).



Slika 4. Oblici granice efikasnosti

Na osnovu dobijenih indeksa efikasnosti, kao i na osnovu prikaza CCR i BCC granice efikasnosti može se zaključiti da je indeks efikasnosti koji daje CCR model uvek manji ili jednak od indeksa efikasnosti koji daje BCC model. Na primer ako se ponovo analizira tačka B iz tabele 1. vidi se da je ona sada znatno efikasnija ($h_k^*=0.95$), što se grafički može tumačiti kao udaljenost od granice efikasnosti. Ova vrednost govori da bi jedinica B postala efikasna ako bi smanjila broj asistenata na vrednost $0.95*50=47.5$. Kada se primeni BCC_1 matematički model za izračunavanje efikasnosti DMU B, pored indeksa efikasnosti dobijaju se i referentne jedinice i faktori intenziteta. Jedinice na koje treba B da se ugleda su efikasne E i D. Faktori intenziteta ovih jedinica iznose 0.125 i 0.875 respektivno, što nam govori da je ograničenje (25) zadovoljeno ($0.125+0.875=1$). Ove dualne vrednosti se takođe mogu iskoristiti kod računanja ciljanih vrednosti ulaza i izlaza:

- $BKA'_B=0.125*100+0.875*40=47.5 \Rightarrow$ potrebno je smanjiti ulaz za 2.5.
- $BAK'_B=0.125*180+0.875*100=100 \Rightarrow$ izlaz ostaje nepromenjen.

Granicu efikasnosti za model BCC_2 čini deo CCR granice OE, a ostatak BCC granica (duž ED i isprekidana poluprava koja je paralelna sa X-osom). Kao posledica primene BCC modela sa nerastućim prinosom na obim smanjila se efikasnost jedinica A i F (imaju iste ulazne i izlazne vrednosti) koje se nalaze u delu grafikona na kom se promenio pravac granice efikasnosti. Sve ostale vrednosti su iste kao kod BCC_1 modela. Za ove dve jedinice referentna je organizacija E sa intenzitetom $0.75 < 1$ i on govori da bi A i F postale efikasne sa istim izlazom ako bi smanjile ulaz na $0.75 \cdot 40 = 30$. Znači tačke A i F treba da se kreću u pravcu strelice na Slici 4. da bi dostigle granicu efikasnosti na najkraćim putem.

Granicu efikasnosti za model BCC_3 čini deo BCC granice paralelan sa Y-osom od apscise do tačke E i ostatak je deo CCR granice (poluprava koja se kreće od tačke E u beskonačnost). Kao posledica primene BCC modela sa neopadajućim prinosom na obim, u odnosu na rezultate BCC_1 modela, smanjila se efikasnost organizacija B, D i G koje se nalaze u gornjem delu grafikona na kom se promenio pravac granice efikasnosti, pa su one sada znatno više udaljene od granice u odnosu na koju se računa efikasnost posmatranih jedinica. Za sve ove jedinice referentna je jedina efikasna organizacija E. Ako se analizira jedinica D, koja je prema BCC_1 modelu bila efikasna, da bi sada dostigla indeks efikasnosti 1 potrebno je da se kreće u pravcu strelice na grafikonu. To znači da bi jedinica D postala efikasna i ostvarila trenutni nivo izlaza (180) koji je 1.8 puta veći od izlaza DMU E, potrebno je angažuje i 1.8 puta više ulaza od DMU E ($1.8 \cdot 40 = 0.72 \cdot 100 = 72$).

Na osnovu analize rezultata dobijenih rešavanjem četiri DEA modela može se zaključiti da CCR daje najmanje indekse efikasnosti zbog najstrožih zahteva, da prinos na obim treba da bude konstantan čime se istovremeno meri i ukupna tehnička efikasnost i efikasnost obima poslovanja. BCC_1 model ne uključuje meru obima poslovanja već meri samo čistu tehničku efikasnost pretvaranja ulaza u izlaze i prema tome daje najveću vrednost za indeks efikasnosti i najveći broj jedinica proglašava efikasnim. Modeli BCC_2 i BCC_3 u obzir uzimaju jedan tip ekonomije na obim, pa prema tome indeks efikasnosti se kreće u intervalu između najmanje i najveće dobijene vrednosti za svaku DMU. To znači da je

$$h_k^*(CCR) \leq h_k^*(BCC_2), h_k^*(BCC_3) \leq h_k^*(BCC_1) \quad (26)$$

Može se reći da su BCC_2 i BCC_3 hibridne varijante osnovnih DEA modela za procenu efikasnosti jedinica koje posluju sa nerastućim, odnosno sa neopadajućim prinosom na obim. Pošto je granica efikasnosti u ovim slučajevima kombinacija CCR i BCC granice efikasnosti, u praksi je dovoljno rešiti samo CCR i BCC model.

3.2. ORIJENTACIJA DEA MODELA

Do sada se uglavnom govorilo o modelima u kojima je cilj da se minimiziraju ulazi potrebni za proizvodnju tražene količine izlaza. Takvi modeli se najčešće nazivaju *ulazno orijentisani* modeli. DMU_k se smatra relativno neefikasnom ako joj je moguće smanjiti bilo koji ulaz bez smanjenja bilo kog izlaza i bez uvećanja nekog od preostalih ulaza. Neefikasna jedinica može postati efikasna smanjujući svoje ulaze (proporcionalno faktoru intenziteta Z u dualnom modelu) dok se njeni izlazi ne menjaju. Nasuprot ulaznoj orijentaciji, u *izlazno orijentisanom* modelu cilj je da se maksimizira izlaz pri zadatom nivou ulaza, a neefikasna jedinica postaje efikasna kroz povećanje svojih izlaza (proporcionalno faktoru intenziteta θ u dualnom modelu). DMU_k je relativno neefikasna ako joj je moguće povećati bilo koji izlaz bez povećanja bilo kog ulaza i smanjenja nekog od preostalih izlaza. Pored ove dve striktno određene orijentacije modela u literaturi se često pominju i *neorijentisani* [17] ili *kombinovani* [37, 69] modeli. Kod ovih modela se razmatra mogućnost da se vrši simultano smanjenje ulaza i povećanje izlaza da bi posmatrana jedinica postala efikasna.

Osnovni linearni DEA CCR i BCC modeli za ulaznu i izlaznu orijentaciju i neorijentisani modeli dati su u Tabeli 2. Prvo su dati primalni (težinski problem) i dualni (problem obavijanja) osnovni DEA modeli sa ulaznom orijentacijom, a zatim primalni i dualni izlazno orijentisani DEA modeli i na kraju neorijentisani modeli. Svi modeli su dati u matričnoj formi.

U primalnom izlazno orijentisanom DEA modelu virtuelni izlaz za DMU_k je jednak 1 (100%), a minimizira se njen virtuelni ulaz pri ograničenju da za svaku DMU koja je uključena u analizu virtuelni izlaz ne može biti veći od virtuelnog ulaza. Ovaj model se naziva "težinski" problem pošto treba odrediti vrednosti težinskim faktorima za ulaze i izlaze. Ove težine moraju imati nenegativne vrednosti, a za svaku DMU se određuju tako da se ona predstavi u najboljem mogućem svetlu. Najmanja moguća vrednost za f-ju cilja je 1 i tada je posmatrana DMU relativno efikasna, odnosno sa datim nivoom ulaza postigla je maksimalno mogući nivo izlaza. Ako je vrednost funkcije cilja veća od 1, posmatrana jedinica je relativno neefikasna i proporcionalno toj vrednosti treba da poveća svoje izlaze da bi bila efikasna. Ako je vrednost funkcije cilja veća od 1, onda one jedinice kod kojih je virtuelni izlaz jednak njihovom virtuelnom ulazu čine uzorne ili referentne jedinice za posmatranu jedinicu i obrazuju facet u odnosu na koju je izmeren njen nivo efikasnosti. Mera efikasnosti na osnovu rešenja izlazno orijentisanog DEA modela jednaka je recipročnoj vrednosti njegove funkcije cilja.

Ulazno orijentisani	
Težinski problem	Problem obavijanja
$(\max_{\mu, \nu}) h = \mu^T Y_k + u_*$	$(\min_{\theta, \lambda}) Z - \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
<p>p.o.</p> $\nu^T X_k = 1$ $u_* e^T + \mu^T Y - \nu^T X \leq 0$ $\mu^T \geq \varepsilon, \nu^T \geq \varepsilon$	<p>p.o.</p> $Y \lambda - s^+ = Y_k$ $ZX_k - X \lambda - s^- = 0$ $Z \text{ neograničeno}, \lambda, s^+, s^-, \varepsilon \geq 0$
Izlazno orijentisani	
Težinski problem	Problem obavijanja
$(\min_{\mu, \nu}) q = \nu^T X_k + u_*$	$(\max_{\theta, \lambda}) \theta + \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
<p>p.o.</p> $\mu^T Y_k = 1$ $u_* e^T - \mu^T Y + \nu^T X \geq 0$ $\mu^T \geq \varepsilon, \nu^T \geq \varepsilon$	<p>p.o.</p> $X \lambda + s^- = X_k$ $-Y \lambda + \theta Y_k + s^+ = 0$ $\theta \text{ neograničeno}, \lambda, s^+, s^-, \varepsilon \geq 0$
Neorijentisani	
Težinski problem	Problem obavijanja
$(\min_{\mu, \nu}) q = \nu^T X_k - \mu^T Y_k + u_*$	$(\max_{\theta, \lambda}) \theta + \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-)$
<p>p.o.</p> $\nu^T X_k + \mu^T Y_k = 1$ $u_* e^T - \mu^T Y + \nu^T X \geq 0$ $\mu^T \geq \varepsilon, \nu^T \geq \varepsilon$	<p>p.o.</p> $X \lambda + \theta X_k + s^- = X_k$ $-Y \lambda + \theta Y_k + s^+ = -Y_k$ $\theta \text{ neograničeno}, \lambda, s^+, s^-, \varepsilon \geq 0$

Za sve težinske probleme važi:

$$v_* \begin{cases} = 0 & \text{u CCR,} \\ \text{neograničeno u BCC}_1, \\ \leq 0 & \text{u BCC}_2, \\ \geq 0 & \text{u BCC}_3 \end{cases}$$

Za sve probleme obavijanja važi:

- CCR: nema dodatnog ograničenja
- BCC₁: dodaje se $e^T \lambda = 1$
- BCC₂: dodaje se $e^T \lambda \leq 1$
- BCC₃: dodaje se $e^T \lambda \geq 1$

Tabela 2. *Orijentacija DEA modela*

Kao što je već istaknuto, osnovnu ideju DEA metode najbolje ilustruje dualni model koji se naziva "problem obavijanja". U dualnom modelu pokušava se da se za datu jedinicu konstruiše hipotetička kompozitna jedinica izvan postojećih jedinica. Ako je to moguće posmatrana jedinica je neefikasna, a ako nije ona je efikasna. U izlazno orijentisanom DEA modelu vrednosti za dualne težine pokazuju važnost koju je imala svaka DMU pri definisanju

ulaza i izlaza kompozitne jedinice i određuju se tako da nijedan od ulaza kompozitne jedinice $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m \right)$ ne bude veći od vrednosti tog ulaza za k -tu DMU. Pomoću tako

izabralih dualnih težina izračunava se za svaki izlaz potrebna količina $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, r = 1, 2, \dots, s \right)$

koju k -ta DMU treba da proizvede da bi bila efikasna. Ako posmatrana k -ta DMU proizvodi manju količinu izlaza, onda faktor intenziteta λ_j pokazuje za koliko proporcionalno ona treba da poveća svoje izlaze da bi bila efikasna. Kada od svih λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) u optimalnom rešenju samo λ_k ima pozitivnu vrednost, onda se k -ta DMU nalazi na granici efikasnosti i nije moguće od preostalih DMU konstruisati kompozitnu jedinicu koja bi sa istim nivoom ulaza kao i k -ta DMU proizvodila veću količinu izlaza.

Orijentacija DEA modela (ulazna ili izlazna) određuje pravac projekcije neefikasne DMU na granicu efikasnosti. U ulazno orijentisanom modelu efikasnost se poboljšava preko proporcionalnog smanjenja ulaza, a izlazna orijentacija zahteva proporcionalno povećanje izlaza. Dakle, u ulazno orijentisanom modelu neefikasna k -ta DMU se projektuje nalevo (horizontalno) na graničnu tačku (ZX_k, Y_k) , a u izlazno orijentisanom modelu naviše (vertikalno) na graničnu tačku $(X_k, \theta Y_k)$ gde X_k, Y_k predstavljaju vektore ulaza i izlaza za DMU_k . Međutim, treba napraviti razliku između granične tačke (za nju faktor intenziteta mora biti jednak 1) i efikasne granične tačke za koju je neophodno i da su sve dopunske promenljive u dualnom DEA modelu jednake 0.

CCR modeli daju meru ukupne tehničke efikasnosti jedinice (uključene su i čista tehnička efikasnost i efikasnost obima). Za CCR model (i za primal i za dual) postoji veza između optimalnih rešenja ulazno i izlazno orijentisanog modela. Proizvod ovih rešenja je 1, odnosno za primalni model $h^* \cdot q^* = 1$, a za dualni $Z^* \cdot \theta^* = 1$. Dakle, granica efikasnosti je ista bez obzira na orijentaciju modela, samo je pravac projektovanja na nju različit.

Neorientisani modeli se razlikuju od do sada opisanih modela ulazne ili izlazne orientacije pošto se istovremeno mogu izračunati poboljšanja i u izlazima i u ulazima da bi DMU_k postala efikasna. Ako se posmatra primalni neorientisani model može se zaključiti da se zahteva minimizacija razlike virtualnih ulaza i izlaza pri ograničenjima da njihov zbir bude jednak 1 i da za svaku DMU koja je uključena u analizu virtualni izlaz ne može biti veći od virtualnog ulaza. To znači da pojedinačne vrednosti virtualnog ulaza ili izlaza DMU_k moraju biti manje ili jednake 1, a zbog prirodnih ograničenja veće ili jednake 0. Prema tome vrednost virtualnih ulaza može da se kreću između 0 i 1. Minimum njihove razlike će se ostvariti ako je vrednost funkcije cilja jednak 0, tj. kada su virtualni ulazi i izlazi međusobno jednaki (0.5). Ako je vrednost funkcije cilja veća, ona pokazuje za koliko bi procentualno DMU_k trebalo

istovremeno da smanjiti ulaze i poveća izlaze da bi postala efikasna. Dualne težine imaju isto značenje kao kod ulazno ili izlazno orijentisanih modela i referentne jedinice se određuju na već opisani način. Ako je DMU_k efikasna moraju biti ispunjeni sledeći uslovi.

- $\theta = 0,$
- $\lambda_k = 1, \lambda_j = 0, j \neq k,$
- $e^T s^+ = 0, e^T s^- = 0.$

Iz prethodnih uslova sledi da su ograničenja ispunjena i imaju oblike $1^* X_k = X_k, 1^* Y_k = Y_k$. Za neefikasnu DMU, granična tačka, koja joj je uzorna jedinica, ima koordinate $((1-\theta)X_k, (1+\theta)Y_k)$, pod uslovom da su sve dopunske promenljive s^+ i s^- jednake 0.

Primer 2.

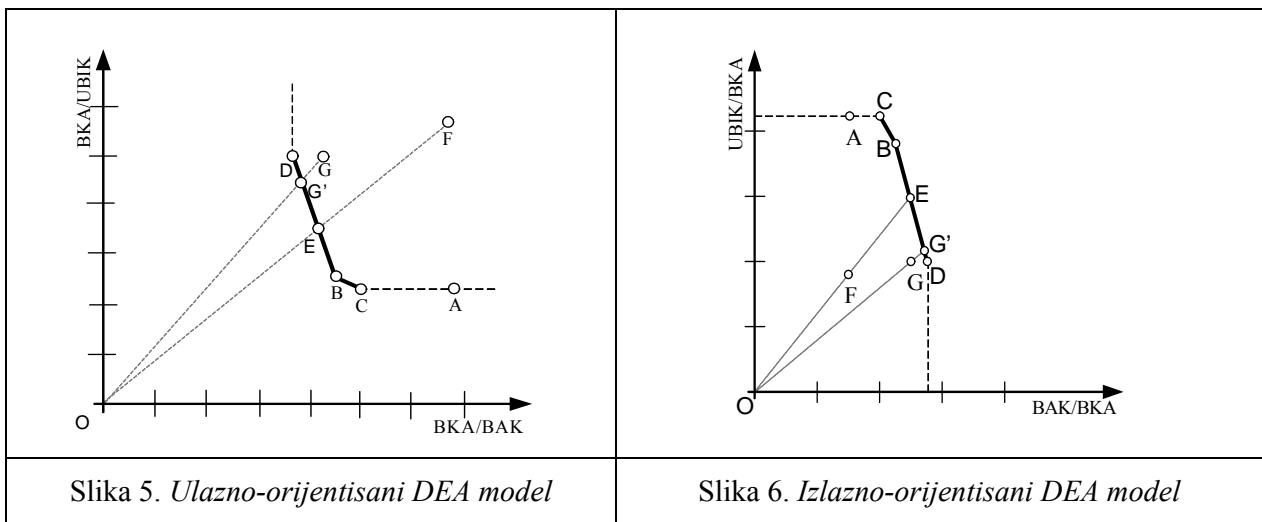
Za ilustraciju razlike između ulazno, izlazno orijentisanih i neorijentisanih modela biće korišćeni korišćeni podaci iz primera 1. za 7 mikro-kreditnih organizacija koje koriste jedan ulaz (kao i u primeru 1.) i proizvode dva izlaza. Prvi izlaz je isti kao u primeru 1. (Broj aktivnih kredita –BAK), a izlaz 2 je Ukupan broj izdatih kredita (UBIK).

Mikrokreditne organizacije	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani model (U)			Izlazno orijentisani model (I)			Neorijentisani model (N)		
				BKA BAK	BKA UBIK	Z_k	BAK BAK	UBIK BAK	h_k	BAK-BKA BAK+BKA	UBIK-BKA UBIK+BKA	Z_k
A	50	75	210	0.67	0.24	1.00	1.50	4.20	1.00	0.20	0.62	0.00
B	50	110	190	0.45	0.26	1.00	2.20	3.80	1.00	0.38	0.58	0.00
C	60	120	252	0.50	0.24	1.00	2.00	4.20	1.00	0.33	0.62	0.00
D	100	275	200	0.36	0.50	1.00	2.75	2.00	1.00	0.47	0.33	0.00
E	40	100	120	0.40	0.33	1.00	2.50	3.00	1.00	0.43	0.50	0.00
F	50	75	90	0.67	0.56	0.60	1.50	1.80	1.67	0.20	0.29	0.25
G	90	225	180	0.40	0.50	0.92	2.50	2.00	1.08	0.43	0.33	0.04

Tabela 3. Rezultati primene DEA modela različite orientacije

Za merenje efikasnosti posmatranih organizacija korišćeni su CCR ulazno i CCR izlazno orijentisani i neorijentisani modeli. Rezultati su dati u kolonama U, I, N tabele 3., respektivno. Iz tabele 3. se može videti da su četiri naglašene jedinice (B, C, D, E) efikasne bez obzira na orientaciju modela, a ostale su neefikasne. Jedinica A ima indeks efikasnosti 1 kao da je efikasna, međutim to nije slučaj. Objasnjenje nastale situacije i prikaz razlika između modela dat je grafički u dvodimenzionalnom prostoru. Za konstruisanje grafikona za

ulazno odnosno izlazno orijentisane modele korišćeni su količnici iz 5. i 6. i 8. i 9. kolone koji u stvari predstavljaju racia ulaza i izlaza.



Na Slici 5. je dat grafikon koji odgovara ulazno-orijentisanom modelu, a na Slici 6. grafikon koji odgovara izlazno-orijentisanom modelu. Granicu efikasnosti ili obvojnicu u oba slučaja čine efikasne jedinice C, B, E i D. Razlika je u načinu obavljanja neefikasnih jedinica.

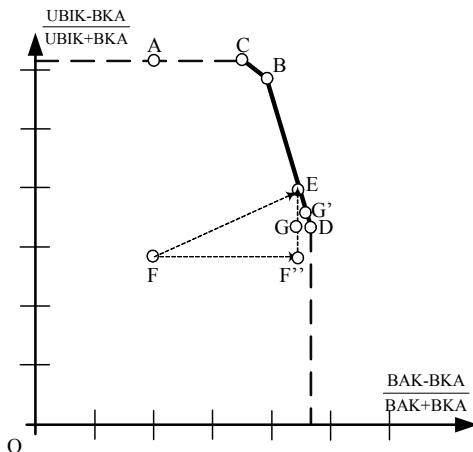
U prvom slučaju očigledno neefikasne jedinice F i G (indeks efikasnosti manji od 1) su obavijene odozdo pošto se teži minimizaciji ulaza potrebnih za proizvodnju traženih izlaza. U drugom slučaju se teži maksimizaciji izlaza sa datom količinom ulaza, pa su neefikasne jedinice, F i G, sa indeksom većim od 1 obavijene odozgo. Za svaku od neefikasnih organizacija se može konstruisati referentna jedinica na granici efikasnosti. Za organizaciju F, to je postojeća organizacija E. Za organizaciju G mora se konstruisati hipotetička jedinica G', koja nastaje kao linearna kombinacija ulaza i izlaza organizacija E i D, pošto se G' nalazi na duži koja spaja ove dve organizacije. Indeks efikasnosti se može izračunati kao odnos radijalnog rastojanja posmatrane DMU od koordinatnog početka i radijalnog rastojanja njene referentne tačke od koordinatnog početka (OG'/OG i OE/OF). Očigledno je da su jedinice F i G na Slici 5. dalje od koordinatnog početka od njihovih referentnih tačaka pa je i indeks efikasnosti manji od 1, a na Slici 6. ja njihovo radijalno rastojanje manje od rastojanja tačaka G' i E što implicira indeks efikasnosti veći od 1.

U drugom slučaju se teži maksimizaciji izlaza koji se mogu proizvesti sa datim ulazima, pa su neefikasne jedinice, F i G, sa indeksom većim od 1 obavijene odozdo. Referentne jedinice se formiraju na isti način kao kod ulazno orijentisanog modela, samo što se neefikasne tačke nalaze bliže koordinatnom početku u odnosu na tačke E i G' pa su količnici OG'/OG i OE/OF veći od jedan. Vrednosti količnika predstavljaju indekse efikasnosti za jedinice F i G i govore za koliko procentualno jedinice treba da povećaju izlaze da bi postale efikasne. Znači ako bi jedinica F povećala svoje izlaze za 1.67 puta, njihove vrednosti bi bile

približno jednake 125, odnosno 150. Količnici bi imali vrednosti $\frac{BAK}{BKA} = 2.50$ i $\frac{BKA}{BAK} = 3$, što bi značilo da bi tačka F imala iste koordinate kao E i našla bi se na granici efikasnosti.

Za analizu je interesantna DMU A koja ima indeks efikasnosti jednak 1 u oba slučaja, ali je proglašena neefikasnom. Na grafikonima se može videti da se ona u oba slučaja nalazi na isprekidanim odsečcima granice efikasnosti koji su paralelni sa apscisom ili ordinatom. U poređenju sa tačkom C, posmatrana tačka A ima manji odnos izlaz/ulaz $\frac{BAK}{BKA}$ za 0.5, odnosno veći racio ulaz/izlaz $\frac{BKA}{BAK}$ za 0.17. Odnos drugog izlaza i ulaza je isti kao kod tačke C. Znači, da bi A postala efikasna mora povećati izlaz "broj aktivnih kredita" na 100. Razlika između željene vrednosti i stvarne ($100-75=25$) predstavlja vrednost izravnavajuće promenljive, koja je veća od nule i ukazuje da organizacije A nije efikasna.

Grafikon koji bi ilustrovaо granicu efikasnosti za neorientisane modele je dat na Slici 7.



Slika 7. Neorientisani DEA model

Za crtanje grafikona iskorišćeni su količnici dati u Tabeli 3. Ako se posmatra neorientisani primalni (težinski) model vidi se da se teži minimizaciji razlike virtuelnih ulaza i izlaza. Pri crtanjу grafikona nisu uzeti u obzir multiplikatori tj. težinski koeficijenti za ulazne tj. izlazne parametre koje onemogućuju da funkcija cilja bude negativna. Da bi se sprečilo da funkcija cilja postane negativna u obzir je uzeta razlika izlaza i ulaza. Pored toga iskorišćena je osobina linearног programiranja $(\min)f(x) = (\max)(-f(x))$, i zbog toga granica efikasnosti koja spaja tačke C, B, E i D obavlja neefikasne jedinice F i G odozgo. Može se primetiti da su sve jedinice ocenjene na isti način kao i kod prethodna dva modela, samo je indeks efikasnosti za efikasne jednak 0. Jedinica A takođe ima indeks efikasnosti 0, ali je neefikasna iz istih razloga kao i kod prethodnih modela. Ako se posmatra tačka F, može se primetiti da je njena

referentna jedinica ponovo tačka E. Indeks efikasnosti 0.25 govori da tačka F treba da smanji ulaze za 25% (na 37.5) i poveća izlaze za 25% (93.75 i 112.5) da bi se našla na granici efikasnosti. Kretanje tačke F prema granici efikasnosti je u pravcu vektora FE. Vektor FE je rezultanta dobijena sabiranjem vektora FF" i F"E, koji pokazuju pravce u kojima se kreće tačka F ako se vrši smanjenje ulaza BKA i pojedinačno povećanje izlaza BAK odnosno izlaza UBIK, respektivno. Na isti način tačka G dostiže koordinate tačke G' na granici efikasnosti smanjenjem ulaza za 4% i istim procentualnim povećanjem izlaza.

3.3. MODIFIKOVANI DEA MODELI

Osnovni DEA modeli koji su opisani u prethodnom poglavlju razlikuju se u pretpostavljenom prinosu na obim jedinica koje se ocenjuju, geometrijskim oblikom obvojnica i načinu projekcije na granicu efikasnosti. Uporedo sa sve širom primenom DEA metode u različitim oblastima, razvijala se i usavršavala teorijska osnova koja je prethodila ili pratila te praktične primene. Kako svaka oblast u kojoj je DEA našla primenu ima svoje specifičnosti, teorija je morala da pronađe način da prilagodi postojeće ili uvede nove modele koji će omogućiti dobijanje validnih rezultata. Do sada je objavljen veliki broj naučnih radova u kojima su predstavljene i upoređivane brojne modifikacije osnovnih DEA modela [46].

Modifikacije DEA modela su vršene sa različitih aspekata. U ovom poglavlju će biti obuhvaćene modifikacije koje su realizovane u raspoloživim softverima. O softverskim paketima će biti više reči u poglavlju 4, a neke od modifikacija će biti korištene za analizu efikasnosti mikro-kreditnog programa i njihovi rezultati će biti poređeni sa rezultatima osnovnih DEA modela.

3.3.1. DEA modeli za merenje superefikasnosti DMU

Jedan od nedostatka osnovnih DEA modela je što sve efikasne jedinice imaju efikasnost 1 i prema nivou efikasnosti nije moguće napraviti njihov redosled. Uzimajući u obzir činjenicu da je u uslovima ubrzanog razvoja i sve jače konkurencije često potrebno porebiti i efikasne organizacije međusobno, Anderesen i Petersen [1] su predložili modifikovani DEA model kojim je omogućeno rangiranje efikasnih jedinica tj. ocena superefikasnosti. Modifikacija primalnog modela se sastoji u tome što se iz skupa ograničenja zadatih relacijom (9) u modelu (M2) izostavlja ono ograničenje koje odgovara DMU_k . Oblik ovih ograničenja sada je:

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, j \neq k \quad (27)$$

U dualnom CCR modelu pri definisanju ulazno-izlaznog miksa kompozitne jedinice ne uzima se u obzir DMU_k čija se efikasnost ocenjuje. Na taj način se efikasna jedinica upoređuje sa novom granicom efikasnosti koja se formira ne uzimajući ovu jedinicu u obzir. Ograničenja zadata relacijama (13) i (14) u modelu M3 imaju sledeći oblik:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (28)$$

$$Z_k x_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (29)$$

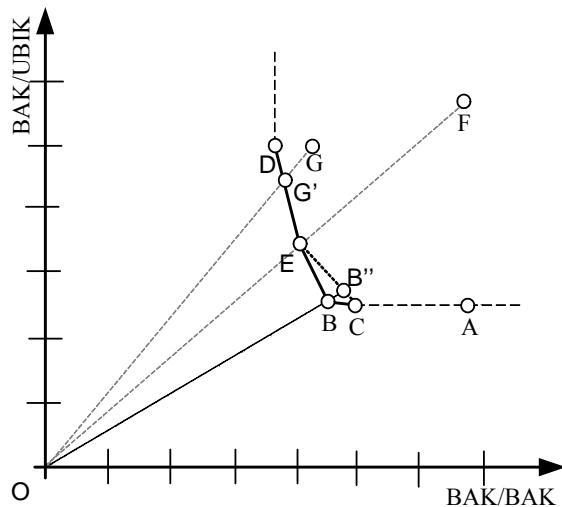
Ovako modifikovani ulazno-orientisani DEA modeli omogućuju da se efikasne jedinice rangiraju slično kao neefikasne na osnovu indeksa efikasnosti koji je veći ili jednak 1. Indeks efikasnosti koji daje ovaj model predstavlja maksimalno moguće proporcionalno povećanje ulaznih nivoa pri kom jedinica ostaje efikasna. Do sada su izložene modifikacije koje su Andersen i Petersen predložili za ulazno orientisane CCR modele. Analogne modifikacije važe i za izlazno orientisane modele. Posledice isključivanja jedinice čija se efikasnost ocenjuje pri definisanju kompozitne jedinice ilustrovane su u sledećem primeru.

Primer 3.

U tabeli 4. su prikazani rezultati koji se dobijaju primenom ulazno-orientisanog CCR modela i rezultati dobijeni primenom Andersen-Petersenovog modela pri čemu su korišćeni podaci iz primera 2.

Mikrokreditne organizacije	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani CCR model			Ulazno orijentisani AP model	
				BKA BAK	BKA UBIK	h_k	h'_k	Rang
A	50	75	210	0.67	0.24	1.00	1.00	5
B	50	110	190	0.45	0.26	1.00	1.01	4
C	60	120	252	0.50	0.24	1.00	1.06	2
D	100	275	200	0.36	0.50	1.00	1.10	1
E	40	100	120	0.40	0.33	1.00	1.02	3
F	50	75	90	0.67	0.56	0.60	0.60	7
G	90	225	180	0.40	0.50	0.92	0.92	6

Tabela 4. Rezultati rangiranje efikasnih jedinica tj. merenje superefikasnosti



Slika 8. Rangiranje efikasnih jedinica (merenje superefikasnosti)

Ako se uporede rezultati dobijeni primenom osnovnog CCR DEA modela i modifikovanog DEA modela za rangiranje može se zaključiti da su sve efikasne jedinice i dalje efikasne, a neefikasne su i dalje neefikasne sa istom vrednošću indeksa efikasnosti $h_k = h'_k$. Ako se dobijeni rezultati prikažu grafički (Slika 8.) vidi se da je granica efikasnosti ista kao na Slici 5. Razlika se javlja samo kod vrednosti indeksa za efikasne jedinice ($h'_k \geq 1$) koji je prema osnovnom modelu uvek bio jednak 1. Način na koji se dobija novi indeks efikasnosti biće objašnjen na primeru efikasne DMU B.

Ako se tačka B isključi iz analize pri određivanju h_B onda granicu efikasnosti čine jedinice D, E i C umesto D, E, B i C. Na novoj granici efikasnosti uočava se hipotetička jedinica B'' koja se koristi za izračunavanje indeksa efikasnosti tačke B korišćenjem iste relacije kao za neefikasne jedinice $h_B = OB/OB''$. Pošto je radijalno rastojanje tačke B'' od koordinatnog početka veće od radijalnog rastojanja tačke B od koordinantnog početka jasno je da će indeks efikasnosti biti veći od 1. Analogna analiza se može izvršiti za sve efikasne jedinice i može se utvrditi da će njihov indeks efikasnosti uvek biti veći ili jednak 1. Vrednosti indeksa efikasnosti su iskorišćene za rangiranje jedinica pa se može primetiti da je D najbolje, a F najlošije rangirana jedinica. Rangiranje se vrši po opadajućem redosledu vrednosti indeksa efikasnosti. DMU D bi mogla da smanji izlaze za 10% a da i dalje ostane efikasna. Indeks efikasnosti bi u tom slučaju bio jednak 1. Na isti način se može vršiti rangiranje pomoću izlazno-orientisanog modela gde će sve efikasne jedinice imati indeks efikasnosti manji ili jednak jedan i najbolje će biti rangirana jedinica sa najmanjom vrednošću h_k ili Z_k . Ova vrednost bi pokazivala za koliko procenatualno DMU_k može da smanji izlaze ili poveća ulaze, a da i dalje ostane efikasna.

3.3.2 Neradijalne mere efikasnosti

Za razliku od osnovnih modela u kojima se indeks efikasnosti određuje kao radijalna distanca DMU_k od njene referentne jedinice, razvijeni su modeli u kojima je indeks efikasnosti neradijalna mera. Pri rešavanju modela koji podrazumevaju neradijalnu mjeru efikasnosti značajnu ulogu imaju dopunske promenljive, pa su modeli dobili nazive uzimajući u obzir način na koji se one tretiraju. U daljem tekstu će biti prikazana dva tipa ovih modela.

Aditivni modeli

Prvi tip modela kod kojih indeks efikasnosti direktno zavisi od vrednosti izravnavaajućih promenljivih naziva se aditivni model, pošto funkcija cilja predstavlja zbir svih dodatnih promenljivih. Ovaj model je najlakše razumeti u formi obavijanja (Model M5).

MODEL (M5)

$$(\max) \varepsilon(e^T s^+ + e^T s^-) \quad (30)$$

p.o.

$$X\lambda + s^- = X_k \quad (31)$$

$$Y\lambda - s^+ = Y_k \quad (32)$$

$$\lambda, s^+, s^-, \varepsilon \geq 0 \quad (33)$$

CCR: nema dodatnog ograničenja

$$\text{BCC}_1: \text{ dodaje se } e^T \lambda = 1 \quad (34)$$

$$\text{BCC}_2: \text{ dodaje se } e^T \lambda \leq 1$$

$$\text{BCC}_3: \text{ dodaje se } e^T \lambda \geq 1$$

U prethodnom poglavlju je rečeno da DMU_k može biti efikasna samo ako su joj sve dodatne promenljive (s^- i s^+) jednake nuli. Znači da bi DMU_k bila efikasna prema aditivnom modelu vrednost funkcije cilja mora biti jednaka 0. U suprotnom ona predstavlja ukupnu vrednost za koju treba simultano povećati izlaze i smanjiti ulaze. Očigledno je da se ovde radi o neorientisanom modelu. Ograničenja (31) i (32) definišu da vrednost ulaza posmatrane jedinice mora biti veća ili jednaka od ulaza kompozitne jedinice i da vrednost izlaza posmatrane jedinice mora biti manja ili jednaka izlazu kompozitne jedinice. Kada je DMU_k efikasna ova ograničenja postaju jednakosti. Ograničenje (34) zavisi od prepostavljenog prinosa na obim i može imati jednu od 4 predložene forme, kao i kod osnovnih modela. U tumačenju rešenja važnu ulogu imaju vrednosti dopunskih promenljivih koje govore za koliko po apsolutnoj vrednosti treba povećati izlaz i smanjiti ulaz da bi DMU_k postala efikasna.

Pomoću optimalnog rešenja $(\lambda^*, s^{+*}, s^{-*})$ problema (30) - (34) mogu se odrediti ciljane vrednosti za neefikasne DMU_k:

$$X_k'' = X_k - s^{-*} \quad (35)$$

$$Y_k'' = Y_k + s^{+*} \quad (36)$$

Za model (M5) odgovarajući dualni model (u literaturi se model (M6) najčešće naziva primalni, a model (M5) dualni aditivni modela) glasi:

MODEL (M6)

$$\underset{u,v}{\min} q = v^T X_k - \mu^T Y_k + v_* \quad (37)$$

p.o

$$v_* e^T - \mu^T Y + v^T X \geq 0 \quad (38)$$

$$\mu^T \geq \varepsilon, v^T \geq \varepsilon \quad (39)$$

gde je:

$$v_* \begin{cases} = 0 & \text{u CCR,} \\ \text{neograničeno u BCC}_1, \\ \leq 0 & \text{u BCC}_2, \\ \leq 0 & \text{u BCC}_3 \end{cases} \quad (40)$$

Ukoliko se rešavaju modeli ulazne orijentacije podrazumeva se da se mogu samo ulazi smanjivati. Prema tome, samo dopunska promenljiva za ulaze može biti veća od nule ($s^- \geq 0$ i $s^+ = 0$), što znači da se menjaju funkcija cilja $((\max) \varepsilon(e^T s^-))$ i ograničenje (38) koje postaje $Y\lambda = Y_k$.

Slično, ukoliko se rešavaju modeli izlazne orijentacije podrazumeva se da se mogu povećavati samo izlazi što implicira da je $s^- = 0$ i $s^+ \geq 0$. To znači da funkcija cilja sabira samo izlazne dopunske promenljive $((\max) \varepsilon(e^T s^+))$ i menja se ograničenje (38) koje postaje $X\lambda = X_k$. Analogno promenama u dualnom modelu moraju se napraviti promene i u primalnom modelu poštujući poznate principe linearног programiranja koji definišu način prevođenja modela iz primala u dual [17].

Za objašnjenje modela M5 i M6 iskoristićemo podatke iz primera 2.

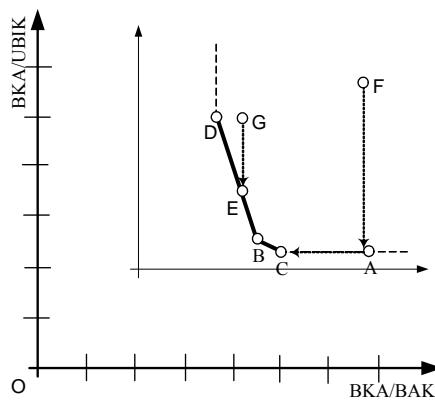
Primer 4.

Poređenje će biti izvršeno na osnovu rezultata dobijenih rešavanjem osnovnih modela ulazne orientacije i neorientisanih aditivnih DEA, koji prepostavljaju konstantan prinos na obim.

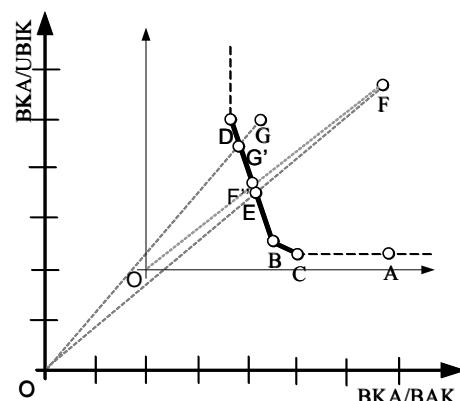
Mikro-kreditne organizacije	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orientisani model (I)				Aditivni model				
				$\frac{BKA}{BAK}$	$\frac{BKA}{UBIK}$	Z_k	S_{BKA}^-	S_{BAK}^+	S_{UBIK}^+	Z_k	$\frac{BKA}{BAK + S_{BAK}^+}$	$\frac{BKA}{BAK + S_{UBIK}^+}$
A	50	75	210	0.67	0.24	1.00	0	25	0	0	0.50	0.24
B	50	110	190	0.45	0.26	1.00	0	0	0	0	0.45	0.26
C	60	120	252	0.50	0.24	1.00	0	0	0	0	0.50	0.24
D	100	275	200	0.36	0.50	1.00	0	0	0	0	0.36	0.50
E	40	100	120	0.40	0.33	1.00	0	0	0	0	0.40	0.33
F	50	75	90	0.67	0.56	0.60	0	25	120	145	0.50	0.24
G	90	225	180	0.40	0.50	0.92	0	0	90	90	0.40	0.33

Tabela 5. Rezultati primene aditivnog DEA modela

Na osnovu rezultata očigledno je da jedinice B, C, D i E ostaju efikasne i na osnovu rešenja aditivnog modela. Za jedinicu A smo već na osnovu prethodne analize zaključili da treba da poveća vrednost izlaza "broj aktivnih kredita" za 25 da bi postala efikasna. Jedinica F bi trebalo da poveća izlaze za 25 i 120 da bi postala efikasna. Zbir ovih izravnavačujućih tj. dopunskih promenljivih daje indeks efikasnosti jednak 145 (25+120). Slično se može zaključiti i za G koja postaje efikasna ako poveća "ukupan broj izdatih kredita" za 90. U poslednje dve kolone tabele 4. su prikazani količnici ulaza i ciljanih izlaza koji se računaju na osnovu formula (35) i (36).



Slika 9. Aditivni DEA model



Slika 10. Osnovni DEA model

Na Slici 9. i u tabeli 4. se vidi da je za tačku F referentna tačka C pošto je novi odnos izlaza i ulaza isti za obe jedinice. Sličan zaključak se može izvesti posmatrajući tačke G i E. Jedinica G je neefikasnja, a tačka E je njena referentna jedinica, i može se reći da organizacija G treba da teži da ostvari odnos ulaza i izlaza isti kao jedinica E. Tačke F i G bi trebalo da se kreće u pravcu vektora na Slici 9. da bi se pozicionirale na granici efikasnosti.

Pored razlika u matematičkoj formulaciji i tumačenju dobijenih rezultata dve bitne razlike između osnovnih i aditivnih DEA modela su:

- Indeks efikasnosti dobijen rešavanjem osnovnih DEA modela je neosetljiv na promenu mernih jedinica ulaza i izlaza, dok se indeks efikasnosti menja u slučaju primene aditivnih modela. Na primer ako bi broj aktivnih kredita bio predstavljen jedinicama, indeks efikasnosti jedinice G bi bio 90000, a ne 90.
- Indeks efikasnosti dobijen rešavanjem osnovnih DEA modela zavisi od položaja koordinatnog sistema, dok se on ne menja kod aditivnih modela ako se promeni pozicija koordinatog početka. Kao što se vidi na Slici 9. rastojanje se meri korišćenjem metrike L1 [17] od posmatrane tačke do granice efikasnosti, pa položaj koordinatnog sistema ne igra nikakvu ulogu. Za razliku od neradijalnih, kod radijalnih modela rastojanje se računa kao udaljenost posmatrane tačke do koordinatnog početka koristeći Euklidovu metriku i direktno zavisi od pozicije na kojoj se koordinatni početak nalazi. Na Slici 10. je prikazano šta se dešava ako se koordinatni početak nalazi u tački (0.2; 0.2) a primenjuje se CCR DEA model. Na primeru tačke F (Slika 10.) se vidi da se menja indeks efikasnosti koji se sada meri kao $O'F'/O'F$ i očigledno ima vrednost oko 0.4, a bio je jednak $OE/OF=0.6$, dok ista promena nema uticaja na indeks efikasnosti dobijen primenom aditivnih modela (Slika 9).

Mere bazirane na dopunskim promenljivim

Aditivni modeli kod kojih vrednost funkcije cilja ne zavisi od mernih jedinica ulaza i izlaza daju meru efikasnosti baziranu na dopunskim promenljivim (*Slack Based Measures – SBM*) [71]. Efikasnost se izražava u skalarnoj formi i ostaje ista bez obzira da li je merena jedinica nekog parametra kilometar ili metar. Ova osobina se naziva “sloboda dimenzija” ili “jedinična invarijantnost”. Mera bazirana na dopunskim promenljivim ima dve važne osobine [17, str 96]:

- Mera efikasnosti je invarijantna na merne jedinice ulaza i izlaza (Jedinična invarijantnost). (O1)
- Vrednost indeksa efikasnosti je monotono opadajuća za svaku ulaznu ili izlaznu dopunsку promenljivu (monotonost). (O2)

U cilju procene efikasnosti kreće se od ulazno orijentisanog modela razlomljenog programiranja (M7).

MODEL (M7)

$$(\min) \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{rk}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \quad (41)$$

p.o

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (43)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s \quad (44)$$

Pretpostavlja se da su vrednosti za ulazne tj. izlazne promenljive veće od nule, a ako su jednake nuli ($x_{ik} = 0$ ili $y_{rk} = 0$) iz funkcije cilja se briše izraz s_i^- / x_{ik} ili s_r^+ / y_{rk} . Očigledno je da će vrednost funkcije cilja biti jednaka 1, što znači da je DMU_k efikasna, samo u slučaju da sve dopunske promenljive za ulaze i izlaze imaju vrednost 0, a ako je bar jedna od njih veća od 0 indeks efikasnosti je manji od 1. Ovaj model očigledno ispunjava osobine O1 i O2. Kada se posmatraju imenilac i brojilac funkcije cilja očigledno je da se i ulazne i izlazne promenljive i njihove odgovarajuće dopunske promenljive izražavaju istim mernim jedinicama čime se postiže jedinična invarijantnost. Ako se vrednost neke od dopunskih promenljivih (s_i^- ili s_r^+) poveća, a da se ništa drugo ne promeni vrednost funkcije cilja očigledno striktno monotono opada. Kod izlazno orijentisanog modela menja se samo funkcija cilja (41') čija bi vrednost bila jednak 1 za efikasne i veća od 1 za neefikasne DMU.

$$(\max) \psi = \frac{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}}{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{rk}} \quad (41')$$

Ako se u model (41)-(44) uvede pozitivna skalarna varijabla t i primene pravila transformacije modela razlomljenog u model linearног programiranja dobija se model M7'.

MODEL (M7')

$$(\min) \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{rk} \quad (45)$$

p.o

$$t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk} = 1 \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (48)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s \quad (49)$$

Za neefikasne jedinice (indeks efikasnosti različit od 1) se slično kao u osnovnim DEA modelima može odrediti skup referentnih jedinica za koje važi da je $\lambda \geq 0$ i takođe se na isti način kao kod aditivnih modela mogu odrediti ciljane vrednosti ulaza i izlaza preko relacija (35) i (36) koje posmatrana DMU treba da dostigne da bi bila efikasna.

3.3.3. Modeli sa nekonveksnom granicom efikasnosti

Osnovni DEA modeli podrazumevaju da granica efikasnosti koja obavlja sve neefikasne jedinice ima oblik konveksnog konusa ili omotača u zavisnosti od izabrane ekonomije obima. Granicu efikasnosti formiraju efikasne DMU. Sa slike 5. i 6. se može videti da se neefikasna jedinica G poredi sa hipotetičkom jedinicom G' koja se dobija kao linearna kombinacija dve efikasne jedinice.

Da bi izbegli pretpostavke o obliku granice efikasnosti i da bi obezbedili da se jedinice porede prema stvarnim performansama Deprins, Simar i Tulkens su uveli metodu pod nazivom *Free Desposal Hull* –FDH [17, str. 105]. Granica efikasnosti predstavlja “najmanji skup” koji obuhvata sve proizvodne mogućnosti generisane na osnovu performansi posmatranih jedinica. To znači da bi DMU_k pripadala granici efikasnosti potrebno je da vrednosti njenih ulaza budu manje ili jednake, a vrednosti izlaza veće ili jednake od odgovarajućih vrednosti svih ostalih jedinica posmatranog skupa. ($x_k \leq x_j, y_k \geq y_j, j = 1, \dots, n$). Za ilustraciju načina na koji se formira FDH granica efikasnosti biće korišćeni podaci iz primera 3. gde se podrazumeva izlazna orijentacija modela.

Primer 5.

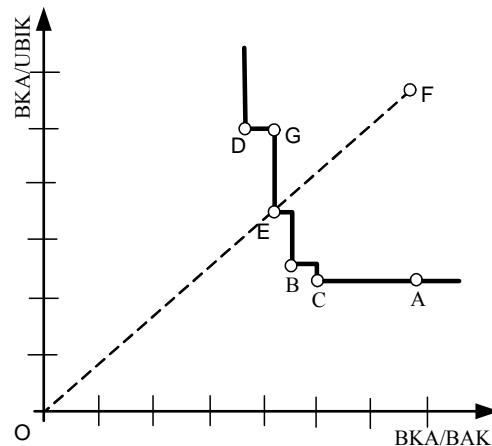
Mikro-kreditne organizacije	BKA	BAK	UBIK	Ulazno orijentisani model		
				$\frac{BKA}{BAK}$	$\frac{BKA}{UBIK}$	FDH
A	50	75	210	0.67	0.24	1.00
B	50	110	190	0.45	0.26	1.00
C	60	120	252	0.50	0.24	1.00
D	100	275	200	0.36	0.50	1.00
E	40	100	120	0.40	0.33	1.00
F	50	75	90	0.67	0.56	0.80
G	90	225	180	0.40	0.50	1.00

Tabela 6. Rezultati primene FDH modela

Na Slici 11. je prikazana stepenasta funkcija koja predstavlja FDH granicu efikasnosti (A-C-B-E-G-D). FDH tehnologija ne podrazumeva radikalnu distancu i može se reći da prikazana isprekidana linija ne postoji tj. tačka E nije referentna tačka za tačku F koja je jedina neefikasna jedinica. FDH tehnologija se zasniva na principima dominacije. Pri određivanju proizvodnog skupa koji treba da formira granicu efikasnosti eliminuši se sve dominirane jedinice (sa manjom vrednošću nekog izlaza i većom vrednošću ulaza). Ako se porede ulazi i izlazi jedinice F sa ostalim kreditnim organizacijama može se uočiti sledeće:

Tačka F ima istu vrednost ulaza kao jedinice A i B, ali proizvodi manje izlaza što automatski znači da nad njom dominiraju A i B;

- Jedinica E uz manji ulaz proizvodi više izlaza od F što znači da je F dominirana od strane E.



Slika 11. FDH granica efikasnosti

Navedene karakteristike čine tačku F neefikasnom. Ona bi trebalo da ostvari odnos izlaza i ulaza kao tačka E da bi postala efikasna, što se vidi na Slici 11.

Model koji daje rešenje problema sa nekonveksnom granicom efikasnosti ima sledeći oblik:

MODEL (M8)

$$(\text{Min}) Z_k \quad (50)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} \leq y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (51)$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (52)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (53)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Z_k \text{-neograničeno} \quad (54)$$

Očigledno je da model M8 predstavlja problem mešovitog “0-1” programiranja i da je nastao kao modifikacija BCC modela koja podrazumeva da samo jedna jedinica može imati težinski koeficijent λ jednak 1. Na taj način se osigurava da u skup efikasnih jedinica ulaze samo nedominirane opservacije.

3.4. PROŠIRENJE OSNOVNIH DEA MODELA

Kako svaka oblast u kojoj je DEA našla primenu ima svoje specifičnosti, teorija je morala da pronađe način da prilagodi postojeće ili uvede nove modele koji će omogućiti dobijanje validnih rezultata.

U ovom poglavlju su prikazana proširenja osnovnih modela preuzeta iz [46]. Modeli dati u ovom poglavlju se direktno naslanjaju na osnovne DEA modele i omogućuju:

- da neki od ulaza i/ili izlaza nisu pod kontrolom menadžmenta jedinice koja se ocenjuje (egzogeno fiksirani ulazi i izlazi),
- da neki od ulaza i/ili izlaza su kategorijske prirode,
- da se dodaju ograničenja težina u primalne DEA modele,

3.4.1 Procena efikasnosti kada su neki od ulaza i izlaza egzogeno fiksirani

Menadžeri se često u praksi suočavaju sa situacijom da neke od ulaza ne mogu kontrolisati (reklame, konkurenca,...). Takvi ulazi i izlazi koji se ne mogu kontrolisati nazivaju se egzogeno fiksiranim. Da bi se procenila efikasnost ovakvih jedinica treba proširiti CCR i BCC modele tako da se odredi minimalni nivo ulaza koji se mogu kontrolisati koji je potreban da se proizvede postojeći nivo izlaza, a da se pri tome egzogeno fiksirani ulazi održe na tekućem nivou.

Ovo proširenje predložili su Banker i Morej [3] ocenjujući efikasnost 60 restorana brze hrane u okviru lanca restorana. U njihovoj analizi svaki od restorana koristio je 6 vrsta ulaza za proizvodnju 3 vrste izlaza. Dva ulaza su bili troškovi nabavke i plate radnika i oni su svakako pod kontrolom menadžmenta restorana. Sledeća dva ulaza bili su starost lokala i troškovi reklame (pretpostavljeno je da se odluke o reklamiranju donose na nivou lanca) za koje je smatrano da se ne mogu kontrolisati. Poslednja dva ulaza su bila demografskog karaktera i ukazivala su da li je lokal u urbanoj ili ruralnoj oblasti i da li je moguće posluživanje gosta u restoranu ili nije. Ove karakteristike koje se ne mogu kontrolisati tretirane su kao binarne vrednosti.

U ovom modelu sa I_d je označen skup ulaza koji se mogu kontrolisati, a sa I_f skup egzogeno fiksiranih ulaza. Pri tome, svaki ulaz je ili u I_d ili u I_f , odnosno unija ova 2 skupa je skup koji sadrži svih m ulaza. Modifikovani dualni CCR model glasi:

MODEL (M9)

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i \in I_d} s_i^- \right) \quad (55)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (56)$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i \in I_d \quad (57)$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = I_f \quad (58)$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Z_k \text{-neograničeno} \quad (59)$$

Da bi neefikasnja jedinica postala efikasnja dopušta se da proporcionalno smanji vrednosti samo za one ulaze koji se mogu kontrolisati. Treba primetiti da se ove dopunske promenljive ne pojavljuju u funkciji cilja što znači da se indeks efikasnosti izračunava samo na osnovu mogućih redukcija ulaza koji su pod kontrolom i mogućih povećanja izlaznih nivoa.

Prema ovom modelu za neefikasnju DMU_k ciljne vrednosti ulaza koji se mogu kontrolisati dobijaju se primenom relacije (57), a za izlaze pomoću relacije (56). Na sličan način kao za izlaze mogu se dobiti i ciljane vrednosti za ulaze koji su egzogeno fiksirani, tako što se od postojećih ulaza oduzme vrednost dopunske promenljive koja se na taj ulaz odnosi. Dakle, ovi ciljevi dobijaju se prvo zajedničkom redukcijom svih ulaza koji su pod kontrolom jedinice na najmanju moguću proporciju njenih početnih nivoa, a zatim daljim pojedinačnim smanjivanjem ovih ulaza i pojedinačnim povećavanjem izlaza. Ciljni nivoi za ulaze koji nisu pod kontrolom jedinice koja se ocenjuje pokazuju koliko se spolja utvrđeni njihovi nivoi mogu smanjiti, a da se ne zahteva promena ostalih ciljnih nivoa.

3.4.2. Procena efikasnosti kada su neki od ulaza i izlaza kategoriskske prirode

U do sada prikazanim DEA modelima pretpostavlja se da su vrednosti za ulaze i izlaze kontinualne. Dualni osnovni DEA modeli procenu efikasnosti izvode poređenjem jedinice koja se ocenjuje sa hipotetičkom kompozitnom jedinicom koja se pokušava konstruisati izvan postojećih jedinica. Ona je linearna (CCR) ili konveksna (BCC) kombinacija referentnih jedinica jedinice koja se ocenjuje.

Međutim, u realnim problemima često neki ulazi i izlazi mogu izražavati neku karakteristiku i uzimati samo diskretne vrednosti iz određenog skupa vrednosti. U tim situacijama, pri formiranju hipotetičke kompozitne jedinice mogu nastupiti određene poteškoće. Na primer, pri proceni univerzitetskih istraživačkih jedinica neki od izlaza može biti procenjen samo na ordinalnoj skali (dobar, bolji, odličan). U ovakvim slučajevima ovaj izlaz kompozitne jedinice, formiran kao linearna ili konveksna kombinacija odgovarajućih ordinalnih vrednosti referentnih jedinica teško da bi imao smisla, jer bi se ordinalne vrednosti koristile kao da su merene na intervalnoj skali. Isto tako ako neki ulaz ima vrednost 0 kada jedinica nema neku osobinu ili sredstvo, a vrednost 1 ako ima, onda bi taj ulaz kod kompozitne jedinice mogao imati vrednost 0.5 što je besmisleno.

Da bi prevazišli ove probleme Banker i Morej [4] su modifikovali originalni dualni DEA model da bi obezbedili da se referentna grupa jedinice koja se procenjuje može sastojati

samo od onih jedinica koje imaju iste ili lošije vrednosti za kategoriske varijable od nje same. Dakle, jedinica koja se ocenjuje upoređuje se samo sa onim jedinicama koje posluju u sličnim ili lošijim uslovima od onih u kojima ona deluje. Ako bude procenjena kao neefikasna, menadžment ove jedinice ne može neefikasnost pravdati lošim uslovima poslovanja. Razmatran je slučaj kada postoji jedan ulaz koji je kategoriske prirode i nije pod kontrolom jedinice koja se ocenjuje (u praksi su ulazi kategoriske prirode uglavnom egzogeno fiksirani).

Banker i Morej su ocenjivali efikasnost 69 apoteka na osnovu podataka za 4 ulaza i 2 izlaza. Kao ulazi razmatrani su plate radnika, operativni troškovi, prosečna veličina zaliha i veličina tržišta izražena kao broj stanovnika u gradu u kome se apoteka nalazi. Jasno je da je četvrti ulaz uticaj okruženja i da nije pod kontrolom posmatranih jedinica. Vrednosti za ovaj ulaz bile su od 500 stanovnika do 220 000. Izlazi koji su uzeti u obzir su broj recepata i vrednost prodaje. Primenom modela M8 dobijeno je da 28 apoteka posluje efikasno, a da je najniži indeks efikasnosti 0.403. Analizom dobijenih rezultata primećeno je da pojedine apotekе imaju nizak indeks efikasnosti, iako su imale solidnu prodaju u odnosu na veličinu tržišta. Kombinacijom efikasnih jedinica iz gradova sa velikim brojem stanovnika sa onim sa malom veličinom tržišta uglavnom je bilo moguće konstruisati kompozitnu jedinicu koja je izrazito dominantna nad jedinicom koja se ocenjuje. Da bi rešili ovaj problem autori su veličinu tržišta proglašili za kategorisku promenljivu koja može uzeti vrednost od 1 do 11 (broj stanovnika svakog od gradova "upada" u jedan od mogućih intervala).

Banker i Morej su uveli L novih binarnih promenljivih d_k^l za svaku DMU, gde je $L+1$ ukupan broj vrednosti koje jedan ulaz kategoriske prirode može uzeti (u opisanom primeru L je 10). U zavisnosti od kategorije kojoj vrednost tog ulaza pripada, za jedinicu koja se ocenjuje promenljive d_k imaju sledeće vrednosti:

$$d_k^\ell = 0, \ell = 1, 2, \dots, L; \text{ ako } DMU_k \text{ ima najnižu vrednost (kategorija 1)},$$

$$d_k^\ell = 1, d_k^1 = 0, \ell = 2, 3, \dots, L; \text{ ako } DMU_k \text{ pripada kategoriji 2}.$$

$$d_k^\ell = 1, d_k^2 = 1, d_k^1 = 0, \ell = 3, 4, \dots, L; \text{ ako } DMU_k \text{ pripada kategoriji 3}.$$

...

$$d_k^\ell = 1, \ell = 1, 2, \dots, L; \text{ ako } DMU_k \text{ pripada kategoriji } L+1.$$

Pod pretpostavkom da je m - ti ulaz kategoriske prirode onda se procena k -te DMU može izvršiti primenom sledećeg modela:

MODEL (M10)

$$(Min) Z_k - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right) \quad (60)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (61)$$

$$Z_k \cdot x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (62)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j d_j^l \leq d_k^l, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (63)$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Z_k \text{-neograničeno} \quad (64)$$

$$d_j^l = \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (65)$$

U modelu (M10) je dodato novih L ograničenja datih relacijom (63). Ova ograničenja obezbeđuju da se referentna grupa za DMU_k sastoji samo od onih jedinica koje imaju m -ti ulaz u istoj ili nižoj kategoriji od nje same. Samo one dualne težine λ_i koje se odnose na jedinice iz "iste" ili "nižih" kategorija mogu dobiti pozitivnu vrednost.

Do sada je razmatran problem kada je jedan od ulaza kategoriskske prirode i kada je on egzogeno fiksiran. Izloženi model se može lako prilagoditi situaciji kada je više ulaza kategoriskske prirode i egzogeno fiksirano. Međutim teškoće se javljaju kada je neki od ulaza kategoriskske prirode i pod kontrolom jedinica koje se ocenjuju. Banker i Morej su za taj slučaj formulisali matematički model mešovitog celobrojnog linearog programiranja. Pokazano je da je mnogo jednostavniji pristup modifikovati postupak rešavanja osnovnih DEA modela. Predlaže se da se sve DMU koje se ocenjuju podele u L klase (D_1, D_2, \dots, D_L) i da se prvo uključe u model samo jedinice iz klase 1 i da se njihova efikasnost oceni, zatim da se ocene jedinice iz klase 2 uključujući u analizu jedinice iz prve 2 klase, itd.

Analogno izloženom modelu (M10) dobija se model za procenu efikasnosti jedinica kada je jedan ili više izlaza kategoriskske prirode.

3.4.3. Ograničavanje težina

DEA metoda za svaku DMU čija se efikasnost ocenjuje (primalni model) određuje vrednosti težinskih koeficijenata za ulaze i izlaze. Osnovni DEA modeli dozvoljavaju potpunu fleksibilnost u izboru težina jedinici čija se efikasnost ocenjuje tako da ona postigne maksimalnu efikasnost u skladu sa nivoima njenih ulaza i izlaza.

Ova potpuna fleksibilnost u izboru težina je važna za identifikaciju neefikasnih DMU, koji su ispod granice efikasnosti čak i sa svojim skupom težina. Međutim, težine koje su

određene DEA analizom, nekada mogu biti u suprotnosti sa prethodnim znanjem ili prihvaćenim stanovištima za relativne vrednosti ulaza i izlaza. Primene metode u raznim realnim problemima nametnule su razvoj procene vrednosti.

Koncept procene vrednosti nema formalnu definiciju u DEA analizi. To je deo studije ocene efikasnosti koji reflektuje preference donosioca odluke u tom procesu. Navode se sledeći razlozi za korišćenje procene vrednosti u DEA (pregled rezultata preuzet iz [46]):

Uključivanje prethodnih stanovišta o vrednostima pojedinih ulaza i izlaza;

Kao ilustracija ovog primera izvršena je ocena efikasnosti poreskih odeljenja. Analiza rezultata dobijenih primenom osnovnih DEA modela je ukazala da su pojedina poreska odeljenja bila efikasna jer su im u optimalnom rešenju velike vrednosti težina dodeljene za broj rešenja o umanjenju poreza i broj sudskeih poziva neodgovornim poreskim obveznicima (izlazi), dok su neki "važniji" izlazi, kao što je broj izdatih poreskih rešenja, bili praktično ignorisani. Restrikcija fleksibilnosti težina je bila nametnuta u pokušaju da se objedine pogledi top menadžmenta u vezi sa relativnom važnošću ulaza i izlaza korišćenih u oceni efikasnosti.

Povezivanje vrednosti pojedinih ulaza i/ili izlaza;

Primer je ocena efikasnosti jedinica za zaštitu trudnica u Velikoj Britaniji, gde je zahtevano da težina za ulazni faktor "rizik kod odojčadi" bude ista kao i za izlazni faktor "broj preživelih". Odnos broja preživelih i broja rizičnih beba je zapravo dodatni faktor koji je trebalo uključiti u procenu. Kako originalni CCR model ne može da reši ovaj tip problema, razvijen novi model da bi objedinio ove zahteve. Drugi primer je ocena efikasnosti univerzitetskih departmana u Velikoj Britaniji, gde je trebalo da departmani sa većim brojem postdiplomaca budu favorizovani pri proceni efikasnosti, jer su Univerziteti računali na ove studente zbog dodele veće pomoći vlade. Ovi kvalitativni elementi ne mogu biti uključeni bez objedinjavanja procene vrednosti sa ocenom efikasnosti.

Uključivanje prethodnih stanovišta o efikasnim i neefikasnim jedinicama;

Pri proceni efikasnosti, menadžment često ima stav o tome koje su od posmatranih jedinica sa "dobrim", a koje sa "lošim" performansama. Na primer, pri proceni efikasnosti banaka u Americi je zapaženo da su primenom CCR modela neke opšte poznato neefikasne banke svrstane u efikasne. Stavovi rukovodstva treba da budu objedinjeni pri ocenjivanju efikasnosti u cilju dobijanja rezultata koji su bliži ranijim zapažanjima rukovodstva. Ovo je dovelo do familije novih DEA modela u kojima se efikasnost banaka procenjuje na osnovu ulaznih/izlaznih vrednosti tri prethodno izabrane banke koje su priznate kao efikasne.

Predizbor nekih jedinica pri proceni efikasnosti je u suprotnosti sa studijom efikasnosti poreskih odeljenja, gde su autori uspeli da otkriju suštinu pri određivanju efikasnih odeljenja.

Ocenjivanje efikasnosti treba da uzme u obzir mogućnost supstitucije ulaz/izlaz;

Korišćenje parametarske proizvodne funkcije u ekonomiji, i pored njenih nedostataka, dovelo je do uvođenja marginalnih stopa supstitucije između ulaza i izlaza u proceni efikasnosti. One se mogu koristiti pri donošenju odluka o preraspodeli resursa. Odnos između optimalnih težina koje CCR model daje za ulazne i izlazne faktore koristi se za procenu marginalnih stopa transformacije. Ovaj koeficijent, međutim, ne može uvek biti određen zato što neke težine mogu biti bliske nuli. Navodi se da problem dobijanja pouzdanih stopa supstitucije korišćenjem DEA metode tek treba da postane glavna istraživačka oblast. Ovo je verovatno posledica do sada ograničenih pokušaja korišćenja DEA analize u oblasti donošenja odluka u vezi preraspodele resursa. Još jedan razlog za uključivanje vrednosne procene u DEA proizilazi iz potrebe da se odredi ukupna efikasnost posmatranih jedinica. Ukupna efikasnost, kako ju je definisao Farel, je sastavljena od tehničke i alokativne efikasnosti. Procena alokativne, a samim tim i ukupne efikasnosti zahteva znanje "cena" ulaza. Informacije o cenama nisu uvek lako dostupne u neprofitno, pa čak i u profitno orijentisanom okruženju, te stoga treba neke oblike alternativnih informacija uključiti u procenu. Pokazano je da se procene vrednosti mogu koristiti za određivanje opsega cena za količnike ulaz/izlaz u cilju utvrđivanja njihove ukupne efikasnosti. Ovo je u suprotnosti sa tradicionalnim načinom određivanja ukupne efikasnosti, gde su cene određene korišćenjem pojedinačnih vrednosti za svaki ulaz i izlaz.

Omogućavanje razdvajanja efikasnih jedinica;

Primer gde je omogućeno razdvajanje efikasnih jedinica je analiza 6 mogućih lokacija za nuklearna postrojenja u Teksasu. Primenom osnovnog DEA modela dobijeno je da je pet lokacija bilo relativno efikasno, pa se pojavio problem nemogućnosti razdvajanja efikasnih jedinica. Diskriminaciona moć analize je bila povećana definisanjem oblasti prihvatljivih težina (takozvani regioni sigurnosti), koje su onda korišćene za određivanje preferirane efikasne lokacije.

U literaturi se mogu naći brojna proširenja originalnog DEA modela u kojima su uključene procene vrednosti u DEA, ali se ona mogu svrstati u sledeća tri osnovna pristupa:

- Direktno ograničavanje težina,
- Podešavanje posmatranih ulazno-izlaznih nivoa,
- Ograničenje virtuelnih ulaza i izlaza.

3.4.4. Direktno ograničavanje težina

U primalnom CCR modelu težinski koeficijenti ne mogu imati manju vrednost od parametra ε čime se sprečava potpuno ignorisanje uticaja pojedinih ulaza i izlaza pri određivanju mere efikasnosti. Direktna restrikcija težina se sastoji od nametanja strožijih zahteva za težinske koeficijente umesto onih datih relacijama (8) i (9) u modelu M2. Prema [46] do sada korišćene direktne restrikcije težina mogu se svrstati u sledeće 3 kategorije:

a) Potpuno ograničavanje težina:

Ovaj tip restrikcija sprečava da pojedini ulazi i/ili izlazi budu previše naglašeni ili ignorisani u oceni efikasnosti. Dodatna ograničenja su sledećeg oblika:

$$\delta_i \leq v_i \leq \tau_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (66)$$

$$\rho_r \leq \mu_r \leq \eta_r, \quad r = 1, \dots, s \quad (67)$$

Korisnik (ekspert) zadaje vrednosti za parametre (granice) $\delta_1, \tau_1, \rho_1, \eta_1$ i na taj način uvodi procenu vrednosti u DEA model imajući u vidu relativnu važnost ulaznih i izlaznih faktora. Vrednosti granica težinskih koeficijenata pojedinih ulaznih i izlaznih faktora potpuno su nezavisne. Osnovna poteškoća u primeni ove kategorije restrikcije težina leži u zadavanju vrednosti ovih granica. One mogu dovesti da DEA model nema dopustivo rešenje, jer uvođenje donje granice za težinu jednog ulaza ograničava gornju granicu težina svih ostalih ulaza. Pored toga, uvođenje ovog tipa ograničavanja težina može dovesti do različitih indeksa efikasnosti u zavisnosti da li je korišćen ulazno ili izlazno orijentisan CCR model. Za procenu granica pri potpunoj restrikciji težina mogu se koristiti sledeća 2 postupka:

- dvofazni postupak u rešavanju DEA modela

U prvoj fazi treba rešiti DEA modele bez ikakvih ograničenja za težinske koeficijente. Da bi se odredile njihove granice koje će biti uključene u drugu fazu može se za određeni procenat odstupiti od ekstremnih vrednosti težinskih koeficijenata ili izračunati njihova srednja vrednost pa onda definisati odstupanja od nje.

- na osnovu prosečnog ulaznog nivoa po jedinici izlaza

Ovaj postupak je razvijen za procenu efikasnosti jedinica koje koriste jedan ulaz za proizvodnju više izlaza ili onih koje imaju jedan izlaz i više ulaza. Metoda najmanjih kvadrata se primenjuje za procenu prosečnog ulaznog nivoa po jedinici izlaza (ili prosečnog izlaznog nivoa po jedinici ulaza). Na osnovu razumnog odstupanja od prosečnog nivoa mogu se definisati granice za težine.

b) Regioni sigurnosti -I tip :

Ova kategorija restrikcija težina omogućuje da se zada relativan poredak između više ulaza ili više izlaza i uglavnom se koriste za implementaciju marginalnih stopa substitucije. Termin "*type I Assurance Regions*" predložen je u jednom od radova gde su primenjena sledeća ograničenja za težinske koeficijente:

$$k_i v_i + k_{i+1} v_{i+1} \leq v_{i+2} \quad (68)$$

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i+1}} \leq \beta_i \quad (69)$$

Prikazana ograničenja se odnose na težine za ulazne faktore. Analogno njima mogu biti formulisana ograničenja za težine izlaznih faktora. U literaturi se koristi i sledeća veza između težinskih koeficijenata ulaza 1 i 2:

$$c_2 v_1 - c_1 v_2 = 0 \quad (70)$$

Dodavanje ovakvog ograničenja je jednak kombinovanju prvog i drugog ulaza u jedan agregatni ulaz i ima smisla kada su oni izraženi u istoj mernoj jedinici.

Pri zadavanju granica k_l , α_l , β_l mora se voditi računa da su njihove vrednosti osetljive na jedinice mere ulaznih i izlaznih faktora. U praktičnim primenama za njihovo zadavanje uglavnom su korišćena mišljenja eksperata. Kada su za težinske koeficijente primenjena ograničenja data relacijama (68) i (69), DEA model će uvek imati dopustivo rešenje i postojaće bar jedna efikasna DMU. Bez obzira na orijentaciju modela kada se koristi ova kategorija restrikcije težina dobija se isti indeks efikasnosti.

c) Regioni sigurnosti -II tip :

Ovaj tip restrikcije uspostavlja vezu između vrednosti težina pojedinih ulaza i težina pojedinih izlaza. Pod nazivom "*type II Assurance Regions*" predloženo je sledeće ograničenje za proširenje CCR modela:

$$\gamma_i v_i \geq u_r \quad (71)$$

U zavisnosti od zadate vrednosti za parametar γ_l moguće je da DEA model nema dopustivo rešenje. Bez obzira na orijentaciju modela dobija se isti indeks efikasnosti.

3.4.5. Podešavanje posmatranih ulazno-izlaznih nivoa

Prema ovom pristupu vrednosna procena se uvodi u DEA tako što se podaci o ulazima i izlazima transformišu u "veštački" skup podataka koji se koristi za ocenu efikasnosti. Na taj način moguće je korišćenje i onih DEA programskih paketa koji na drugi način ne nude mogućnost restrikcija težina. Druga prednost je što je dozvoljeno korišćenje nula ili čak negativnih vrednosti kod stvarnih podataka o ulazima i izlazima. Nedostatak je što kada se dobiju rezultati podaci moraju biti ponovo transformisani u originalni oblik da bi se rezultati mogli interpretirati. Ovo može biti glomaznije nego direktna primena restrikcije težina na originalne podatke. U literaturi su poznata dva pristupa po kojima se vrši transformacija podataka o ulazima i izlazima da bi se simulirala restrikcija težina ovih ulaza i izlaza u osnovnom DEA modelu.

Prvi, "*cone-ratio*" pristup, obezbeđuje generisanje veštačkog skupa podataka tako da se dobije isti indeks efikasnosti koji daje CCR model proširen ograničenjima datim relacijom (71). Informaciju o ograničenju težinskih koeficijenata daju zatvoreni konveksni konusi:

$$V = \{v : Dv \geq 0, v \geq 0\} \text{ - ulazni konusi,} \quad (72)$$

$$U = \{\mu : F\mu \geq 0, \mu \geq 0\} \text{ - izlazni konusi.} \quad (73)$$

Na osnovu elemenata matrica D i F izračunavaju se vrednosti elemenata matrica A i B na sledeći način:

$$A^T = (D^T D)^{-1} D^T \quad (74)$$

$$B^T = (F^T F)^{-1} F^T \quad (75)$$

Na primer, neka je rešen osnovni CCR model M2 i neka su dobijene optimalne vrednosti težinskih koeficijenata za ulaz 1 i ulaz 2 jednake a_1 i a_2 za DMU₁ i b_1 i b_2 za DMU₂. Ako se želi nametnuti ograničenje $b_1/b_2 \leq v_1/v_2 \leq a_1/a_2$ tada se može izračunati:

$$D = \begin{bmatrix} -b_2 & -b_1 \\ -a_2 & -b_1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Pomoću matrice A bi se izvršila transformacija polaznog skupa podataka za ulaz 1 i ulaz 2.

Pomoću elemenata ove dve matrice vrši se generisanje veštačkog skupa podataka za ulaze i izlaze. Pokazano je da sledeći model (M11) daje isti indeks efikasnosti kao u slučaju korišćenja ograničenja za težinske koeficijente datih relacijom (71).

MODEL (M11)

$$(Max) \quad h_k = \sum_{r=1}^s g_r b_{rk} y_{rk} \quad (76)$$

p.o

$$\sum_{i=1}^m w_i a_{ik} x_{ik} = 1 \quad (77)$$

$$\sum_{r=1}^s g_r b_{rj} y_{rj} - \sum_{i=1}^m w_i a_{ij} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (78)$$

$$g_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad (79)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (80)$$

Drugi pristup za podešavanje ulazno-izlaznih nivoa predložio je Golani, vidi [46]. On je nastojao da uvede redne relacije oblika $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \varepsilon$ (isto i za izlaze) između težinskih koeficijenata. Nedozvoljavajući težinama da imaju vrednost nula, dobijene vrednosti relativne efikasnosti su iste kao i one dobije transformacijom ulazno-izlaznih podataka u novi veštački skup podataka, sabiranjem odgovarajućih faktora. Golanijeve transformacije su zapravo specijalni slučaj transformacija konusnog racia. Na primer, ograničenja $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \varepsilon$ mogu biti izostavljena u DEA modelu zamenjujući x_{2j} sa $x_{2j} + x_{1j}$ i x_{3j} sa $x_{3j} + x_{2j} + x_{1j}$, za svako j , gde je x_{ij} nivo i -tog ulaza j -te jedinice o kojoj se odlučuje. Međutim, pokazano je da transformacije podataka koje je predložio Golani obezbeđuju odgovarajuće rešenje samo za stroge (znak $>$ između težina), ali ne i za slabe redne relacije između težina usled toga što su one striktno pozitivne. Više o mogućnostima ograničavanja težina i virtuelnih ulaza i izlaza, kao i originalna rešenja mogu se naći u [46].

3.5. DEA MODELI ZA PRAĆENJE PROMENA EFIKASNOSTI I PRODUKTIVNOSTI

Primena do sada prikazanih DEA modela se najčešće svodi na ocenu efikasnosti u statičkim uslovima. Međutim, rezultati dobijeni primenom DEA modela za procenu performansi entiteta na osnovu vrednosti ulaza i izlaza za ceo vremenski interval često mogu navesti na stranputnicu posto se gubi vremenska dimenzija. Da bi se u analizu uključila dinamička komponenta razvijena je takozvana *Window* DEA analiza. Pored toga, za analizu sveukupnih performansi sistema koriste se i Malmkvistovi indeksi za ocenu produktivnosti koji istovremeno pokazuju promenu tehničke efikasnosti i promene granične tehnologije između dva vremenska intervala.

3.5.1. Window DEA analiza

Naziv metode asocira da se analiza vrši pomoću *prozora*. Odnosno, ako je potrebno odrediti performanse jedinica za nekoliko vremenskih perioda, a istovremeno i pratiti njihovu dinamiku, na početku se definiše dužina i broj *prozora* u okviru kojih se preklapaju vremenski periodi. Može se reći da je *Window* analiza zasnovana na principu pokretnih sredina i da je vrlo korisna pri određivanju trendova performansi entiteta [53]. Svaka jedinica se u različitom vremenskom periodu tretira kao različita DMU. Prema tome, performanse posmatrane DMU se porede sa njenim performansama u ostalim vremenskim periodima i sa performansama svih ostalih jedinica obuhvaćenih jednim *prozorom*.

Window analiza se sastoji od serije analiza sa vremenski zavisnim jedinicama o kojima se odlučuje koje se menjaju za svaku analizu da bi imitirale pristup pokretnih sredina [40]. Formalno, posmatra se n DMU ($j=1,\dots,n$) u P vremenskih intervala ($t=1,\dots,P$) i sve koriste s ulaza za proizvodnju m izlaza. Znači posmatrani skup se sastoji od $n \times P$ entiteta i jedan entitet j u periodu t , DMU_j^t ima s -dimenzioni ulazni i m -dimenzioni izlazni vektor (x_j^t i y_j^t). Prozor koji počinje u trenutku l , $1 \leq l \leq P$ i ima dužinu w , $1 \leq w \leq P-l$, se označava sa l_w i sastoji se od $n \times w$ observacija.

Matrica ulaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$X_{l_w} = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l, x_1^{l+1}, x_2^{l+1}, \dots, x_n^{l+1}, x_1^{l+w}, x_2^{l+w}, \dots, x_n^{l+w}),$$

a matrica izlaza za *window* analizu ima sledeći oblik:

$$Y_{l_w} = (y_1^l, y_2^l, \dots, y_n^l, y_1^{l+1}, y_2^{l+1}, \dots, y_n^{l+1}, y_1^{l+w}, y_2^{l+w}, \dots, y_n^{l+w}),$$

Na osnovu prethodnih pretpostavki može se definisati ulazno-orijentisani DEA *window* problem:

MODEL (M12)

$$(Min) Z_{k_l_w}^t \quad (81)$$

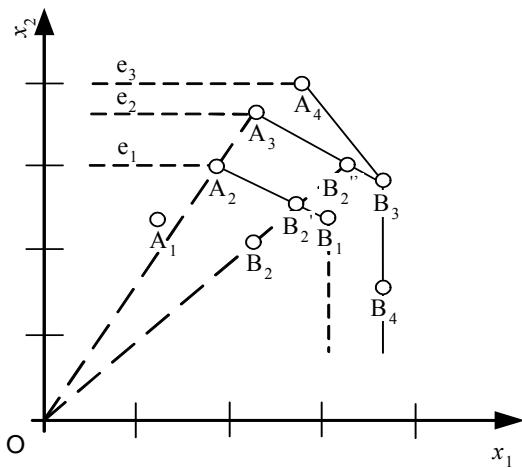
p.o.

$$Y_{l_w} \lambda \geq y_{k_l_w}^t, \quad (82)$$

$$Z_{k_l_w}^t \cdot X_{k_l_w}^t - X_{l_w} \lambda \geq 0 \quad (83)$$

$$\lambda_s \geq 0; \quad s = 1, 2, \dots, n \times w \quad (84)$$

Slično kao kod osnovnih DEA modela, moguće je kreirati DEA *window* model izlazne orijentacije.



Slika 12. Ilustracija DEA window analize

Na Slici 12. je pokazan način formiranja granice efikasnosti kod izlazno-orientisanog *window* DEA modela. U prikazanom primeru procenjuju se jedinice A i B ($n = 2$) u četiri vremenska perioda, a dužina prozora iznosi dva vremenska intervala ($w = 2$). Broj jedinica koje se procenjuju u svakom prozoru iznose $n \times w = 4$. Prema tome u prvom prozoru se procenjuju DMU A₁, A₂, B₁ i B₂, u drugom A₂, A₃, B₂ i B₃ i u trećem A₃, A₄, B₃ i B₄. Granicu efikasnosti u prvom prozoru čine DMU B₁ i A₂, a DMU B₂ predstavlja referentnu jedinicu za B₂, dok u drugom prozoru granicu efikasnosti čine tačke B₃ i A₃, dok je tačka B₂ referentna jedinicu za B₂, a A₃ referentna tačka za neefikasnu jedinicu A₁. Može se primetiti da je jedinica A bila neefikasna u prvom, a efikasna u drugom vremenskom intervalu, pa ponovo efikasna u trećem i četvrtom periodu. Na isti način se može pratiti trend efikasnosti jedinice B i svih DMU u posmatranom skupu.

3.5.2. Malmkvistovi DEA indeksi i merenje ukupne produktivnosti

Koncept produktivnosti postoji dugi niz godina. Klasičan način merenja produktivnosti podrazumeva odnos izlaza i ulaza. To znači da se produktivnost može tumačiti kao efikasnost korišćenja resursa kao što su rad, kapital, materijal i energija. Izlazi mogu biti proizvodi ili usluge.

Merenje produktivnosti se obično vrši sa dva aspekta, uzimajući u obzir nivo i trend produktivnosti. Racio produktivnosti predstavlja njen nivo u datom trenutku, izražen odnosom proizvedenog izlaza i kombinacije iskorišćenih ulaza. Mere produktivnosti se mogu podeliti u sledeće grupe:

Parcijalna produktivnost (PP). Ovo je pojedinačna mera koja uzima u obzir odnos samo jednog izlaza i jednog ulaza (npr. radna produktivnost koja pokazuje odnos izlaza i broja radnika ili kapitalna produktivnost koja se dobija kada se vrednost izlaza podeli sa vrednošću uloženog kapitala). Prednost je što je lako razumljiva.

Ukupna faktorska produktivnost (UFP). Ovo je mnogo više korišćen i teoretski bolje razrađen koncept koji uzima u obzir mogućnost supstitucije rada i kapitala, ali je teži za razumevanje i primenu.

Ukupna produktivnost (UP). Ovo je najpotpunija mera produktivnosti, ali se ponovo javljaju problemi kod njenog razumevanja i primene.

Mere produktivnosti su date u tabeli 7.

$PP = \frac{y}{R \text{ (ili } K, M, E, m)}$	$UP = \frac{y}{R+K}$	$UP = \frac{y}{R+ K+ M+E+ m}$
y - izlaz	K - kapital	E - energija
R - rad	M - materijal	m - ostali ulazi

Tabela 7. *Mere produktivnosti*

Drugi aspekt produktivnosti su trendovi koji se definišu posmatranjem promena u toku vremena. Rast produktivnosti je jedan od osnovnih izvora ekonomskog razvoja i razumevanje faktora koji na njega utiču je veoma značajno. Poslednjih godina merenje i analiza promena produktivnosti su postali predmet interesovanja mnogih istraživača koji se bave ispitivanjem performansi firmi i njihovog ponašanja. Istraživači se najčešće fokusiraju na uzroke promena produktivnosti i njihovu dekompoziciju. Dekompozicija produktivnosti omogućuje određivanje determinanti za postizanje boljih performansi i obezbeđuje važne informacije o poslovanju za menadžere i planere u posmatranim entitetima i u privatnom i u javnom sektoru. U ranim istraživanjima u ovom polju promena produktivnosti se objašnjavala samo tehničkim promenama, ali u poslednje vreme široko je prihvaćeno mišljenje da i promene efikasnosti mogu uticati na produktivnost. Trend racija produktivnosti se obično pretvaraju u indekse koji se zajedno sa ulazima i izlazima mogu grafički prikazati. Malmkvistove indekse bazirane na DEA razvili su Fare i drugi [22] da bi merili promenu produktivnosti kroz vreme, i istovremeno pratili tehničko-tehnološke i promene efikasnosti koje utiču na rast ili smanjenje performansi posmatrane organizacije.

Malmkvist je prvi 1953. predložio kvantitativne indekse za merenje uspešnosti korišćenja ulaza za proizvodnju izlaza. Polazeći od mere ukupne faktorske produktivnosti i Kob-Daglasove proizvodne funkcije Malmkvist je u [45] kreirao kvantitativne indekse sa osnovnom idejom da se izvrši poređenje između ekonomija A i B. Prepostavlja se da su

poznate proizvodne funkcije za obe ekonomije $y_{AA} = f_A(K_A, L_A)$ i $y_{BB} = f_B(K_B, L_B)$. Ako se ulazi ekonomije A zamene sa ulazima ekonomije B i obrnuto dobijaju se još dve vrednosti $y_{AB} = f_A(K_B, L_B)$ i $y_{BA} = f_B(K_A, L_A)$. Malmkvistov indeks A u odnosu na B predstavlja geometrijsku sredinu y_{AA}/y_{AB} i y_{BA}/y_{BB} . On će biti veći od 1 ako je proizvodna tehnologija A bolja B. Na isti način se može dobiti Malmkvistov indeks ako se umesto ekonomija A i B u razmatranje uzmu dva vremenska intervala t i $t+1$.

Malmkvistov indeks produktivnosti baziran na DEA se računa kao geometrijska sredina dva osnovna Malmkvistova indeksa produktivnosti koji se definišu kao funkcije rastojanja $D(\cdot)$. Funkcije rastojanja su uveli Kaves i drugi u [12], pretpostavljajući da je tehnologija za posmatranu jedinicu k efikasna ($D_k(x_k, y_k) \equiv 1$). Pored toga oni su postavili teoremu i dokazali da postoji ekvivalencija između Malmkvistovih indeksa produktivnosti (ako se pretpostavi da je proizvodna funkcija tipa *translog*) i Torkvistovih indeksa ili *Solow* reziduala [43] koji se najčešće koriste za praćenje promena ukupne produktivnosti. Fare i drugi [22] su 1992. kombinovanjem Malmkvistovog indeksa sa Farelovom idejom merenja efikasnosti i Kavesovom idejom merenja produktivnosti konstruisali Malmkvistove indekse direktno iz ulaznih i izlaznih podataka koristeći DEA analizu. Oni su uveli neefikasnost u razmatranje i kreirali indekse koji prate promene produktivnosti skupa posmatranih jedinica u periodima t , $t = 1, \dots, T$.

Malmkvistovi indeksi se mogu definisati polazeći od pretpostavki da postoji dopustivi skup izlaza i definisana proizvodna funkcija [44]:

$$P^t(x^t) = \{y^t : x^t \text{ može da proizvede } y^t, x^t \in R_+^N, y^t \in R_+^M, t = 1, \dots, T\}.$$

Ulagana funkcija rastojanja za period t kao inicijalni period, može se definisati kao:

$$D^t(x^t, y^t) = \min \left\{ Z : \frac{y^t}{Z} \in P^t(x^t) \right\} \quad (85)$$

Ukoliko je Z minimalno, y^t/Z je maksimalno i može se reći da funkcija rastojanja meri maksimalan mogući izlaz koji se može proizvesti sa datom količinom ulaza. To je mera tehničke efikasnosti. Na sličan način se može definisati funkcija rastojanja za period $t+1$

$$(D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min \left\{ Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1}) \right\}).$$

Ove dve mere moraju imati vrednosti manje ili jednake od 1. Za proveru uticaja promene tehnologije definišu se dve funkcije rastojanja koje pokazuju koliko bi bila vrednost izlaza ako se koristi proizvodna funkcija iz perioda t a vrednosti ulaza (npr. rad i kapital) iz perioda $t+1$ i obrnuto

$$(D^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min \left\{ Z : \frac{y^{t+1}}{Z} \in P^{t+1}(x^{t+1}) \right\}) \quad \text{i} \quad D^{t+1}(x^t, y^t) = \min \left\{ Z : \frac{y^t}{Z} \in P^{t+1}(x^t) \right\}.$$

Kombinovane mere mogu imati i vrednosti veće od 1 pošto tehnologija iz drugog perioda npr. $t+1$ ne mora biti dopustiva za ulaze iz perioda t i obrnuto [30].

Ukoliko se prepostavi da postoje proizvodne funkcije za dva perioda t i $t+1$, izračunavanje Malmkvistovog DEA indeksa zahteva izračunavanje dve mere za jedinstveni period i dve kombinovane mere. Mera za jedinstveni period se izračunava kao CCR DEA indeks efikasnosti za DMU _{k} u posmatranom periodu t :

MODEL (M13)

$$D_k^t(x_k^t, y_k^t) = (\text{Min}) Z_k^t \quad (86)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj}^t \geq y_{rk}^t, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (87)$$

$$Z_k^t \cdot x_{ik}^t - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (88)$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (89)$$

gde x_{ij}^t i y_{rj}^t predstavljaju i -ti ulaz odnosno r -ti izlaz DMU _{j} u periodu t . Indeks efikasnosti ($D_k^t(x_k^t, y_k^t) = Z_k^{t*}$) određuje vrednost za koju ulaz posmatrane jedinice može biti proporcionalno smanjen, a da i dalje proizvodi traženi izlaz u periodu t . Ako se umesto podataka za period t koriste podaci iz perioda $t+1$ za jedincu DMU _{k} se izračunava skor tehničke efikasnosti u periodu $t+1$ ($D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = Z_k^{(t+1)*}$). Prva mera za kombinaciju perioda t i $t+1$ ($D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$), gde je $t+1$ polazni period, za svaku DMU _{k} , $k = 1, \dots, n$, se dobija kao optimalna vrednost sledećeg linearogn problema:

MODEL (M14)

$$D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1}) = (\text{Min}) Z \quad (90)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj}^t \geq y_{rk}^{t+1}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (91)$$

$$Z \cdot x_{ik}^{t+1} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (92)$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (93)$$

Na sličan način se dobija i druga mera za kombinaciju perioda $D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)$ ako se u modelu (M14) zamene indeksi t i $t+1$. To znači da će se za DMU_k uzimati vrednosti iz perioda t , a za svaku DMU_j , $j=1,\dots,n$, vrednosti za period $t+1$. Modeli M13 i M14 predstavljaju ulazno orijentisane Malmkvistove indekse produktivnosti.

Kada su poznati sve četiri mere rastojanja može se izračunati Malmkvistov indeks produktivnosti koji predstavlja njihovu geometrijsku sredinu i meri promenu performansi između perioda t i $t+1$ za posmatranu DMU_k :

$$M_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \quad (94)$$

Ako je $M_k > 1$, produktivnost je porasla, ako je $M_k < 1$ produktivnost se smanjila i ako je $M_k = 1$ produktivnost DMU_k je ostala ista u periodu $t+1$ kao u periodu t . Drugi deo jednakosti (94) pokazuje kako se dekomponuje Malmkvistov indeks produktivnosti. Prvi količnik indeksa M_k predstavlja promenu tehničke efikasnosti:

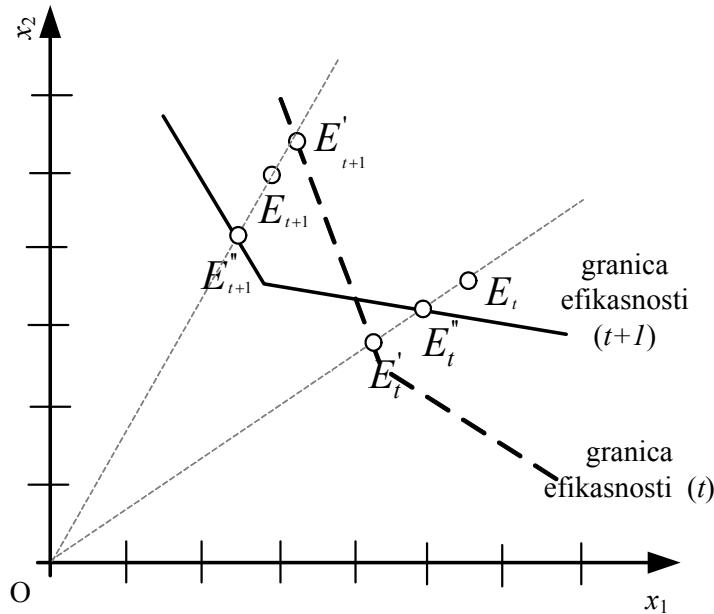
$$E_k = \frac{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^t(x_k^t, y_k^t)} \quad (95)$$

Druga komponenta M_k predstavlja meru tehničke promene proizvodne tehnologije [39] između t i $t+1$:

$$P_k = \left[\frac{D_k^t(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})}{D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})} \frac{D_k^t(x_k^t, y_k^t)}{D_k^{t+1}(x_k^t, y_k^t)} \right]^{1/2} \quad (96)$$

Može se zaključiti da važi relacija $M_k = E_k \times P_k$. Promena produktivnosti između perioda t i $t+1$ prikazana je na Slici 13. u najjednostavnijem slučaju (dva ulaza i jedan izlaz sa konstantnim prinosom na obim).

Tačke E_t i E_{t+1} na Slici 13. prikazuju ulazno-izlazne kombinacije proizvodnih jedinica u periodima t i $t+1$. U oba slučaja, jedinice funkcionišu ispod svojih granica proizvodnih mogućnosti. Indeks tehničke efikasnosti u periodu t se može prikazati kao $E_t'/E_t < 1$, a u periodu $t+1$ kao $E_{t+1}'/E_{t+1} < 1$. Odavde sledi da se promena tehničke efikasnosti može prikazati kao $E_k = (E_{t+1}'/E_{t+1})(E_t'/E_t) < 1$.



Slika 13. Dekompozicija Malmkvistovih indeksa produktivnosti

Promena granice proizvodne tehnologije se može izračunati kada se odrede mere odstojanja $E''_t/E_t < 1$ i $E'_{t+1}/E_{t+1} > 1$ koje pokazuju kako bi se ponašala jedinica iz perioda t ako se primeni proizvodna tehnologija $t+1$ i obrnuto. Može se primetiti da su vrednosti obe ove mera veće od vrednosti mera za odstojanje od granice efikasnosti za period t . Uticaj promene proizvodne tehnologije se predstavlja kao $P_k = \sqrt{(E'_{t+1}/E''_{t+1})(E'_t/E''_t)}$. Na osnovu vrednosti pojedinačnih količnika ne može se zaključiti da li je promena granice efikasnosti tj. promena proizvodne tehnologije pozitivno uticala na jedinicu E posto je jedna vrednost funkcije rastojanja veća, a druga manja od 1, tako da se ne može doneti ni zaključak o konačnoj vrednosti Malmkvistovog indeksa produktivnosti. Detaljna analiza zaključaka do kojih se može doći ako se kombinuju vrednosti indeksa E_k i P_k je data u [30].

Prikazani Malmkvistov indeks je ulazno-orientisan pošto su korišćeni ulazno orientisani DEA modeli za izračunavanje mera distance $D(\cdot)$ i vrednost indeksa dobijena rešavanjem modela M12 mora biti manja ili jednaka 1, dok vrednosti indeksa dobijenih rešavanjem modela M13 mogu imati bilo koju vrednost ($= 1$). Ukoliko je potrebno izračunati

\leq
izlazno-orientisani indeks, modele M13 i M14 treba zameniti sa analognim izlazno orientisanim DEA modelima. U praksi se često koristi *Window* DEA analiza za dužinom prozora $w=1$ za računanje vrednosti $D_k^t(x_k^t, y_k^t)$ i $D_k^{t+1}(x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$, $k=1, \dots, n$, da bi se izbeglo dvostruko rešavanje i kreiranje linearnih modela za istu jedinicu DMU_k.

Malmkvistovi indeksi pružaju potpuniju sliku o performansama posmatranih entiteta i pokazuju trend promena iz perioda u period, dok *Window* analiza može da poveća broj posmatranih jedinica i pokaže trend koristeći panel podatke.

Malmkvistovi DEA indeksi produktivnosti su korišćeni za određivanje promena preferenci bankarskih sistema [53], [39], [38], [27], [72], [11], bolnica [22], za poređenje 500 kompjuterskih kompanija [14] i u drugim industrijskim sferama.

4. IMPLEMENTACIJA ANALIZE OBAVIJANJA PODATAKA

U prethodnom poglavlju je dat prikaz modela koji se mogu primeniti za analizu efikasnosti entiteta u zavisnosti od kvaliteta raspoloživih podataka, uslova u okruženju ili specifičnih zahteva menadžmenta.

Da bi rezultati dobijeni primenom DEA modela bili validni, dobro protumačeni i primenljivi u realnim sistemima neophodno je definisati osnovne principe i korake koje bi trebalo poštovati pri primeni analize obavijanja podataka. Neki osnovni principi su dati u [10]. Implementacija DEA metode se može podeliti u četiri osnovne faze koje su opisane u okviru ovog poglavlja. U okviru svake od faza se mogu definisati neki osnovni principi i pravila koji se moraju poštovati, ali takođe i problemi koji se mogu pojaviti i moraju biti rešeni u toku primene DEA metode.

4.1. Izbor jedinica za odlučivanje i specifikacija modela

U prethodnim poglavljima je prikazana jedna grupa DEA modela i njihovih modifikacija i proširenja koji mogu biti korišćeni pri određivanju relativne efikasnosti posmatranih jedinica. Rezultati dobijeni rešavanjem nekog od modela će biti validni ukoliko model ispunjava neke osnovne osobine kao što je pozitivnost, izotonost, itd.

Osobina pozitivnosti. Pri formulaciji DEA modela zahteva se da ulazno/izlazne vrednosti budu veće ili jednake nuli. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen postoje dve moguće alternative. Prva je da se koriste translatorno invarijantni modeli koji omogućavaju pomeranje koordinatnog sistema bez promene indeksa efikasnosti, npr. prikazani aditivni modeli su translatorno invarijantni. To znači da je moguće dodati apsolutnu vrednost negativnog ulaza ili izlaza svim parametrima u aditivnom modelu u cilju rešavanja problema sa negativnim vrednostima. Dodavanjem dovoljno velike konstante ulazna ili izlazna vrednost postaje pozitivna. Ista vrednost se može dodati za iste ulaze ili izlaze svih jedinica u posmatranom skupu. Na primer, ako se 7 mikro-finansijskih organizacija sa podacima datim u primeru 2. porede i prema ostvarenom profitu gde je organizacija A u gubitku 50000 dinara, moguće je svim organizacijama dodati više od 50000 za neto profit i rešavati aditivni model koji će dati relevantne rezultate. Druga alternativa je pogodna u slučaju da neki od izlaza ima negativnu vrednost. DEA pristup polazi od toga da svaka jedinica treba da bude prikazana u što je moguće boljem svetlu. To znači da će onim izlazima koji imaju veće vrednosti biti dodeljeni veći težinski koeficijenti da bi indeks efikasnosti koji se računa kao zbir proizvoda težinskih koeficijenata i izlaznih vrednosti ($\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}$) bio što veći. Zbog ove osobine moguće je

negativne vrednosti izlaza zameniti sa malim pozitivnim vrednostima, a da one nemaju veliki uticaj na efikasnost posmatrane DMU.

U [57] su razvijeni modeli bazirani na pristupu usmerene funkcije rastojanja (RDM – *Range Directional Model*). Vrednost funkcije cilja predstavlja opseg neophodnog poboljšanja izlaza ili smanjenja ulaza (definiše se kao razlika maksimalnog i stvarnog izlaza ili minimalnog i stvarnog ulaza). Za razliku od aditivnih modela kod kojih se posmatrana jedinica projektuje u najdalju tačku na granici efikasnosti, kod RDM modela intencija je da se poboljšaju najlošije performanse i da DMU uz minimalne napore postane efikasnija.

Osobina izotonosti (isitonoisity). Pri formulaciji DEA modela zahteva se da funkcionalna zavisnost izlaza i ulaza ima matematičku osobinu izotonosti [10]. Pod ovom osobinom se podrazumeva da povećanje nekog ulaza rezultuje u istom povećanju izlaza bez smanjenja bilo kog drugog ulaza. O ovoj osobini je bilo reči u drugom poglavljiju kao o osobini koja je osnova za Pareto optimalnost dobijenih rešenja. Da bi se dokazala osobina izotonosti moguće je izvršiti korelacionu analizu između pojedinih ulaza i izlaza. Ukoliko je koeficijent korelacije pozitivan i značajan pretpostavka izotonosti nije narušena. Sa druge strane pretpostavlja se da postoji izotonost između ulaza i izlaza. Ako je ona narušena moguće je koristiti recipročne ili komplementarne vrednosti ulaza tj. izlaza. Na primer, ako se kao izlaz posmatra broj klijenata koji ne otplaćuju redovno kredit, pretpostavlja se da će njihov broj biti smanjen ako se poveća broj izdatih kredita i broj kreditnih asistenata koji su ulazni faktori. Time je narušena pretpostavka izotonosti. Problem se može rešiti ako se kao izlaz posmatra recipročna vrednost broja klijenata koji ne otplaćuju redovno kredit i ona će se povećati sa povećanjem ulaznih parametara.

Broj DMU. Opšte pravilo je da je potrebno bar 3 DMU za svaki ulaz i izlaz da bi se obezbedio dovoljan stepen slobode koji garantuje značajnost analize ($m+s < n/3$). Pored toga u literaturi se mogu naći i drugačija pravila kao npr. $m*s < n$ ili $m+s < n/2$ [17]. Bez obzira koji princip se poštije, broj DMU u posmatranom skupu mora biti značajno veći od ukupnog broja ulaza i izlaza. U suprotnom, postoji opasnost da će većina DMU biti klasifikovane kao efikasne upravo zbog osobine DEA da teži da svaku jedinicu prikaže u što je moguće boljem svetlu. Ako je broj ulaza i izlaza veliki u poređenju sa brojem DMU veća je verovatnoća da postoji jedna ili kombinacija više varijabli prema kojima je posmatrana jedinica najbolja, a samim tim će biti ocenjena kao efikasnija. Jedan način za povećanje broja posmatranih DMU je podela ulaznih vrednosti, npr. vrednosti date na godišnjem nivou se mogu podeliti na kvartalne. U navedenom slučaju broj DMU se povećava 4 puta, a broj ulaza i izlaza ostaje isti. Drugi način da se reši problem velikog broja ulaznih parametara je primena multivarijacione statističke analize [36]. Osnovna ideja je sa se iz skupa ulaza i izlaza eliminisati neke varijable, a da se pri tome ne izgube značajne informacije o performansama

posmatranih DMU. Ukoliko je koeficijent korelacije dve varijable jednak 1, moguće je eliminisati jednu od varijabli iz analize i dobiti potpuno validne rezultate. Međutim, u realnim sistemima je skoro nemoguće pronaći parametre koji su perfektno korelisani. Prema tome smatra se da eliminacija visoko koreliranih varijabli (čija je varijansa približno jednaka 0, a koeficijent korelacije jednak 1) neće presudno uticati na efikasnost i rang posmatranih DMU. Da bi izbegli izračunavanje koeficijenata korelacije između svakog para ulaznih i izlaznih parametara, autori su u [36] predložili pristup baziran na izračunavanju rezidualnih parcijalnih kovarijansi nad normalizovanim podacima. Na osnovu vrednosti ovih varijansi može se izabrati skup npr. ulaznih varijabli ($n - p$) koji najbolje reprezentuje performanse svih n posmatranih DMU. Varijansa svake varijable i , $i = p + 1, \dots, n$ je približno jednak 1, a varijanse svih eliminisanih varijabli $1, \dots, p$ su jednake 0. Na realnim primerima je pokazano da i pored eliminacije nekog ulaza ili izlaza visok procenat informacija ostaje raspoloživ (varijansa je jednak 0.9995), ali je rang posmatranih jedinica mnogo očigledniji. Pored toga, u [34] su za određivanje broja DMU, ulaznih i izlaznih varijabli korišćeni testovi osetljivosti i simulacija za definisanje dimenzija modela.

Window analiza. U slučaju da je potrebno povećati broj DMU, može se koristiti *Window* DEA model o kome je bilo reči u poglavљу 4.4.1. Takođe, *Window* analiza se koristi ako je potrebno ispitati stabilnost indeksa efikasnosti i trend efikasnosti.

Kontrola težinskih faktora. Težinski faktori u_r i v_i se određuju rešavanjem DEA modela. Svaka težina se računa tako da posmatranu DMU_k prikaže u najboljem svetu relativno u odnosu na ostale jedinice u posmatranom skupu. Tako određene težine ne moraju odražavati subjektivno mišljenje donosioca odluke o relativnoj važnosti atributa uključenog u analizu, što znači da neki ulaz ili izlaz može dobiti neodgovarajuću težinu. Da bi se izbegle ovakve situacije može se primeniti neki od prikazanih modela ograničavanja težina.

Homogenost DMU. DEA zahteva relativno homogen skup entiteta koji koriste iste ulaze za proizvodnju istih izlaza pri čemu njihove vrednosti moraju biti pozitivne.

4.2. Specifikacija ulaza i izlaza

Specifikacija ulaza i izlaza je ključna faza pri korišćenju DEA modela. Izbor relevantnih faktora je veoma bitan za efektivnu interpretaciju, korišćenje i prihvatanje rezultata DEA analize. Pri identifikovanju relevantnih ulaza i izlaza se može rukovoditi pravilima koja su navedena u ovom poglavljju.

Prvo, potrebno je voditi računa o osobinama pozitivnosti i izotonosti. Neophodno je da postoji veza između izlaza i ulaza pomoću koje se može dokazati da će se izlazi povećavati sa

povećanjem ulaza. Takođe, sve ulazne i izlazne vrednosti moraju postojati za sve posmatrane DMU i u svakom vremenskom intervalu bi trebalo da budu pozitivne.

Drugo je pitanje da li se treba zadržati na postojećim podacima ili kreirati neke nove tipove performansi. U opštem slučaju poželjno je prihvatići postojeće mere performansi. One su bliske menadžmentu organizacije koji treba da koristi rezultate analize. Za takve mere postoje već raspoloživi podaci i nije potrebno definisati novi sistem prikupljanja podataka. U selekciju ulaza i izlaza bi trebalo uključiti menadžment.

Treće, ulazi i izlazi moraju biti sveobuhvatni. To znači da oni moraju potpuno odražavati poslovanje DMU i moraju biti operativno značajni u smislu da se široko koriste i čak su slični kao parametri koji se koriste pri zvaničnim evaluacijama i kontrolama aktivnosti posmatranih organizacija.

Četvrto, podaci moraju biti kontrolisani kroz proces revizije i kontrole tako da se sa njima ne može lako manipulisati ili pogrešno izveštavati bez mogućnosti utvrđivanja greške i njene korekcije. Pogrešni podaci ili nedostatak informacija mogu značajno uticati na DEA rezultate i njihovu interpretaciju.

4.3. Rešavanje DEA modela

DEA se često definiše kao metodologija koja obuhvata nekoliko različitih pristupa i modela koji su međusobno povezani i koji se koriste za ocenu relativne efikasnosti jedinica o kojima se odlučuje. Ova definicija jasno ukazuje da je u cilju efikasnog korišćenje DEA metode neophodno razviti specijalizovan softver. Poslednjih desetak godina, intenzivan teorijski razvoj DEA modela i brojne praktične primene metode u raznim oblastima praćeni su razvojem odgovarajućih programske paketa za rešavanje različitih DEA modela. Specijalizovani softver olakšava proces rešavanja DEA modela tako da istraživač može bolje da se skoncentriše na samu aplikaciju.

Pošto se postupak primene DEA metode sastoji u rešavanju zadataka linearog programiranja (LP), jasno je da se bilo koji od raspoloživih komercijalnih ili nekomercijalnih softvera za LP može koristiti. Međutim, potrebno je rešavati seriju zadataka linearog programiranja (onoliko zadataka koliko je DMU uključeno u analizu, a taj broj se u većini realnih primena kreće od 100 do 500) i to je osnovni razlog što je korišćenje ovog softvera veoma naporno. Pored toga što treba da omogući rekurzivno rešavanje LP zadataka, specijalizovani DEA softver treba da obezbedi računarsku podršku za svaku fazu procedure primene metode.

Rezultate dobijene pomoću DEA modela uglavnom treba da koriste menadžeri, što znači da softveri treba da budu laki za korišćenje i pogodni za prikaz i analizu rezultata. Poslednjih godina posebna pažnja se posvećuje vizuelizaciji rezultata kako bi postali razumljiviji menadžmentu. Naravno, pošto je DEA postala jedna od vodećih oblasti operacionih istraživanja koja se intenzivno izučava na akademskom nivou, softver treba da omogući dobijanje i poređenje eksperimentalnih rezultata.

Svaki softver za DEA trebalo bi da se sastoji od sledeća četiri modula:

- Upravljanje podacima
- Izbor modela
- Rešavanje
- Generisanje izveštaja

Upravljanje podacima treba da omogući pripremu podataka o DMU, ulaznim i izlaznim faktorima kao i njihovo editovanje. Izbor modela se odnosi na izbor ulaznih i izlaznih faktora i podskup jedinica čiju efikasnost treba oceniti. Izbor modela treba da dozvoli mogućnost skaliranja ili translacije vrednosti pojedinih ulaza ili izlaza i izbor vrste DEA modela koji će se koristiti u analizi. Primenom posebnih računskih mehanizama potrebno je obezbediti zadovoljavajuću konvergenciju ka optimalnom rešenju i dobijanje rezultata dovoljne tačnosti. Pitanja računske tačnosti i robusnosti su veoma bitna prvenstveno zbog računskih karakteristika matematičkih modela koji sačinjavaju metodologiju. Nakon rekurzivnog rešavanja izabranog DEA modela generišu se izveštaji različitih nivoa detaljnosti. Sumarni izveštaj treba da omogući trenutno raspoznavanje efikasnih i neefikasnih jedinica. Pojedinačni izveštaji sadrže analizu za svaku DMU i to: koja je važnost dodeljena pojedinim ulaznim i izlaznim faktorima pri izračunavanju indeksa efikasnosti, listu referentnih jedinica i ciljne vrednosti ulaza i izlaza za neefikasne DMU, itd [46].

Potreba razvoja posebnih programskih paketa za rešavanje DEA modela javila se već sa prvim primenama metode u praksi. Prvi programski paket razvijen je na Univerzitetu Teksas 1982 godine pod nazivom DEA3 i omogućavao je delimično upravljanje podacima, rekurzivno rešavanje CCR modela i generisanje sumarnih izveštaja. Ipak, smatra se da je prvi potpuno specijalizovani softver za DEA razvijen pod nazivom IDEAS na Univerzitetu Masačusets 1989. godine, i kasnije DEAP softver na univerzitetu Nju England u Australiji [15]. Veoma poznati i široko primenjivani su softveri *Frontier analyst* (razvijen u softverskoj kući *Banxia software LTD*) [60], *Warwick Windows DEA* razvijen na univerzitetu Vorik u Velikoj Britaniji koji je poznat po velikom broju istraživača i radova objavljenih iz oblasti analize obavljanja podatka [69]. Pod supervizijom autora ovog softvera profesora E. Thanassoulis-a i A. Emrouznejad-a 2004. je razvijen *Perfomance Improvement Mangment*

(PIM DEAsoft-V1) koji omogućava rešavanje skoro svih praktičnih problema uključujući i praćenje promena efikasnosti i produktivnosti [21]. Detaljan pregled komercijalnih i nekomercijalnih softvera se može naći u [6].

U daljem tekstu će detaljnije biti opisani I-DEA i EMS pošto autor raspolaže sa kompletnim besplatnim verzijama ovih softvera i oni će biti korišćeni za rešavanje problema definisanih u okviru teze. Pre prikaza izgleda softvera i njihovih mogućnosti biće izvršena analiza i poređenje načina na koji su realizovani neophodni moduli u konkretnim programskim rešenjima.

Upavljanje podacima: Oba softvera prihvataju podatke u formatu tabela (*MS Excel*) ili u tekstualnom formatu (EMS). I-DEA softver se kao i EMS oslanja na *Excel* kada je u pitanju priprema ulaznih podataka, generisanje i sukcesivno izvršavanje DEA modela, kao i generisanje izlaznih izveštaja. *Excel* je program koji je izuzetno pogodan za prikazivanje parametara matematičkih modela jer je njih najprirodnije predstaviti u formi tabela. On poseduje moćan i spretno integriran *solver* i moderan programski jezik koji mu daje fleksibilnost za rešavanje i najnestandardnijih programskih zahteva te je idealan alat za rešavanje matematičkih modela.

Izbor modela: U okviru oba izabrana softvera postoji mogućnost izbora orijentacije modela (ulazna ili izlazna) i ekonomije obima (CCR ili BCC model), mogućnost ograničavanja težina i određivanja superefikasnosti i modul za praćenje dinamike efikasnosti i produktivnosti. Pored toga EMS dopušta rešavanje neorientisanih, aditivnih i neradijalnih modela.

Rešavanje modela: Modeli se rešavaju trenutno i softveri vrlo brzo prikazuju rešenje problema.

Generisanje izveštaja: I-DEA daje sumarni izveštaj koji omogućuje trenutno raspoznavanje efikasnih i neefikasnih jedinica. Pojedinačni izveštaji sadrže analizu za svaku DMU i to koja je važnost dodeljena pojedinim ulaznim i izlaznim faktorima pri izračunavanju indeksa efikasnosti, listu referentnih jedinica i ciljne vrednosti ulaza i izlaza za neefikasne DMU. Oba izveštaja su prikazana u obliku *Excel* tabela. EMS daje jedan izveštaj koji sadrži sve potrebne podatke, ali može biti vrlo glomazan i nepregledan.

Softver EMS – Efficiency Measurement System

Efficiency Measurement System (EMS) je kao što smo spomenuli, razvijen u Dortmundu, Nemačka, 2000. godine [62] i predstavlja specijalizovani softver realizovan u *Windows* okruženju koji omogućava merenje, odnosno procenu efikasnosti, primenom DEA

metode. Kao jako jednostavan za korišćenje, služi, pre svega menadžerima, za donošenje odluka o tome koje ulaze odnosno izlaze treba izmeniti i kako (uz pomoć težinskih koeficijenata koji se njima množe, a dobijaju se primenom ovog softvera). Faze primene DEA su potpuno ispraćene kroz menije koji su korisnički orijentisani.

Softver EMS će biti primjenjen za rešavanje problema definisanog u primeru 2. Prvi korak je odluka koje ulazne odnosno izlazne podatke treba uneti i to u *.xls* ili *.txt* formatu. EMS prihvata oba. Korišćenje ovog softvera podrazumeva odgovarajuću pripremu podataka. Teoretski, njegova upotreba ne podrazumeva ograničenja u pogledu veličine problema koji će se rešavati, odnosno nije ograničen broj ulaznih i izlaznih parametara kao ni broj jedinica koje se ocenjuju. Veličina problema je u ovom slučaju ograničena samo performansama računara na kome se vrši analiza. U praksi su rešavani problemi koji su obuhvatili preko 5000 DMU i oko 40 ulaznih i isto toliko izlaznih veličina. Na Slici 14. je prikazan izgled tabele sa ulaznim podacima u *.xls* formatu.

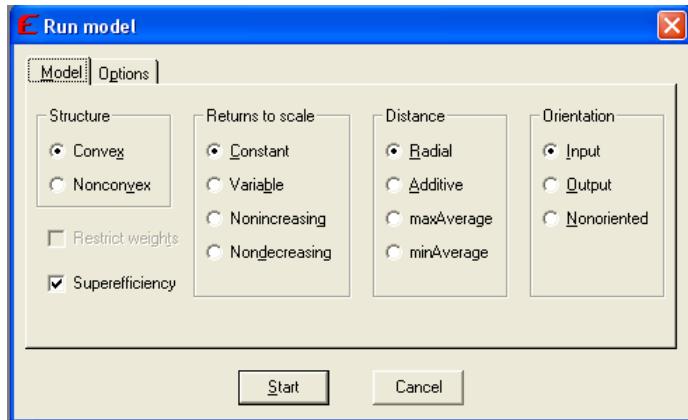
	A	B	C	D	E
1		BKA {I}	BAK {O}	UBIK {O}	
2	A		50	75	210
3	B		50	110	190
4	C		60	120	252
5	D		100	275	200
6	E		40	100	120
7	F		50	75	90
8	G		90	225	180

Slika 14. Priprema podataka za analizu pomoću EMS softvera

U analizu se mogu uključiti i ulazi ili izlazi koji nisu pod kontrolom donosioca odluke. U tom slučaju se za analizu koriste modeli opisani u poglavljiju 3.3.1. i 3.3.2. umesto osnovnih DEA modela. Takođe, moguće je definisati težinska ograničenja u obliku $W(p, q) > 0$, gde je p vektor ulaznih, a q vektor izlaznih ograničenja. Dodeljivanje težinskih ograničenja za podatke u tabelarnom formatu je slično unosu podataka o ulazima i izlazima. Za rešavanje problema se koriste modeli opisani u poglavljju 3.3.4.

Posle pripreme ulaznih podataka u *.xls* ili *.txt* fajlu, može se startovati EMS i učitati fajl sa ulaznim podacima. Pored toga, moguće je podesiti format rezultujućih podataka što podrazumeva podešavanje broja decimalnih mesta u rezultatu i načina prikaza težinskih

koeficijenta (čisti težinski koeficijenti (*pure weights*, u_r i v_i) i virtualni ulazi i izlazi (*virtual inputs/outputs*, $u_r x_{ij}$ i $v_i y_{rj}$)). Sledeći korak je izbor modela u okviru dijaloga prikazanog na Slici 15. U njemu se nalaze dve kartice, prva, koji nosi naziv *Model* i drugi *Options*.



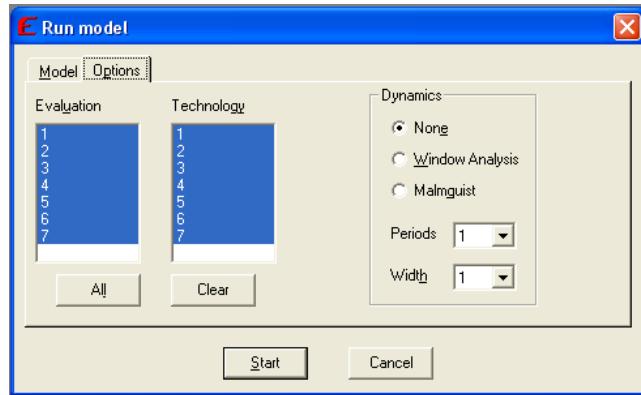
Slika 15. Dijalog za izbor odgovarajućeg DEA modela

Na kartici *Model* postoje četiri dela gde se može izabrati konveksna ili nekonveksna granica efikasnosti, konstantan (CCR) ili promenljiv prinos na obim (BCC), kao i da li će se pri izračunavanju distance koristiti radijalna ili aditivna metoda. Poslednja stavka u okviru definisanja modela je određivanje njegove orientacije, tj. da li će se koristiti ulazno-orientisan, izlazno-orientisan ili neorientisan model.

Osnovni DEA modeli, podrazumevaju da granica efikasnosti koja obavlja sve neefikasne jedinice ima oblik konveksnog konusa ili omotača u zavisnosti od izabrane ekonomije obima. Granicu efikasnosti formiraju efikasne DMU. Neefikasna jedinica se poredi sa **hipotetičkom jedinicom** koja se dobija kao linearna kombinacija dve ili više efikasnih jedinica. Da bi se izbegle pretpostavke o obliku granice efikasnosti i da bi se obezbedili da se jedinice porede prema stvarnim performansama može se koristiti FDH model. DMU pripada granici efikasnosti ako su vrednosti njenih ulaza manje ili jednake, a vrednosti izlaza veće ili jednake od odgovarajućih vrednosti svih ostalih jedinica iz posmatranog skupa. Budući da je FDH granica ili podudarna sa DEA granicom ili se nalazi unutar DEA granice, FDH će uvek generisati veće prosečne procene efikasnosti nego što bi to generisala DEA.

Za razliku od osnovnih modela u kojima se indeks efikasnosti određuje kao radijalna distanca DMU od njene referentne jedinice, razvijeni su modeli u kojima je indeks efikasnosti neradijalna mera. Pri rešavanju modela koji podrazumevaju neradijalnu meru efikasnosti značajnu ulogu imaju dopunske promenljive tj. aditivni model (model M5 i M6).

Ukoliko se izabere radijalni model, moguće je odrediti i superefikasnost (model opisan u poglavljju 3.2.1).



Slika 16. Dijalog za izbor DMU i dinamike modela

Na drugoj kartici moguće je definisati dinamiku modela (slika 16). U okviru **window analyze** je integriran vremenski element u procenu efikasnosti koja omogućuje procenu performansi u različitim vremenskim periodima. U **Malmquist analizi** se procenjuje kombinacija četiri indeksa performansi za svaku DMU. Geometrijska sredina ovih indeksa definiše tehnološku progresiju/regresiju posmatrane DMU. Postoji mogućnost odabira samo određenih organizacionih jedinica koje će se procenjivati (**Evaluation**) i koje će se koristiti za kreiranje obvojnica (**Technology**). To omogućava izračunavanje efikasnosti za svaku DMU u odnosu na ostale jedinice koje su izabrane da učestvuju u formiraju obvojnici, tj. granici efikasnosti.

Posle odabira željenog modela i njegovog izvršavanja, kreira se tabela sa rezultatima proračuna efikasnosti DMU (Slika 17).

	DMU	Score	BKA (I)(V)	BAK (O)(V)	UBIK (O)(V)	Benchmarks	{S} BKA (I)	{S} BAK (O)	{S} UBIK (O)
1	A	100.00%	1.00	0.00	1.00	3 (0.83)	0.00	25.00	0.00
2	B	100.89%	1.00	0.59	0.42		0		
3	C	105.65%	1.00	0.23	0.83		1		
4	D	110.00%	1.00	1.10	0.00		1		
5	E	101.65%	1.00	0.74	0.27		2		
6	F	60.00%	1.00	0.44	0.16	5 (0.75)	0.00	0.00	0.00
7	G	92.31%	1.00	0.77	0.15	4 (0.69) 5 (0.35)	0.00	0.00	0.00

Slika 17. Rezultati DEA

Kao što se vidi, tabela rezultata sadrži sledeće:

- Naziv DMU. Dodatno {x} pored naziva označava da je ta DMU isključena iz građenja obvojnica. DMU ime bez rezultata označava da ta DMU gradi obvojnicu ali nije tražena njena procenjena efikasnosti kao što je to naznačeno u *Evaluation*.
- Indeks efikasnosti - sve DMU koje imaju vrednost 1 (100%) i više su ocenjene kao efikasne jedinice jer se radi o ulazno orijentisanom modelu. Sve one koje imaju vrednost

manju od 1 (100%) su neefikasne i za njih su referentne one koje formiraju obvojnicu i imaju efikasnost 1 i više.

- Četvrta, peta i šesta kolona su vrednosti virtualnih ulaza i izlaza. Pošto se radi o ulazno orijentisanom modelu, kao što je pomenuto, virtualni ulaz ima vrednost 1.
- U koloni *Benchmarks* za efikasne jedinice se nalazi broj, koliko se puta javlja kao referentna jedinica za neefikasne entitete (C i D po jednom, E dva puta, a B ni jednom), dok je za neefikasne prikazan redni broj jedinice koja joj je uzorna (ili jedinica ukoliko ih je više) i u zagradi je dat odgovarajući vektor intenziteta.
- *Slack* - $\{S\}$ ili *factors* - $\{F\}$ zavise od izabrane vremenske distance, za radikalne i aditivne modele. To su dopunske promenljive jedinice koje se nalaze na graničnoj liniji efikasnosti. Ukoliko je jedinica efikasna dopunske promenljive su jednaki nuli.

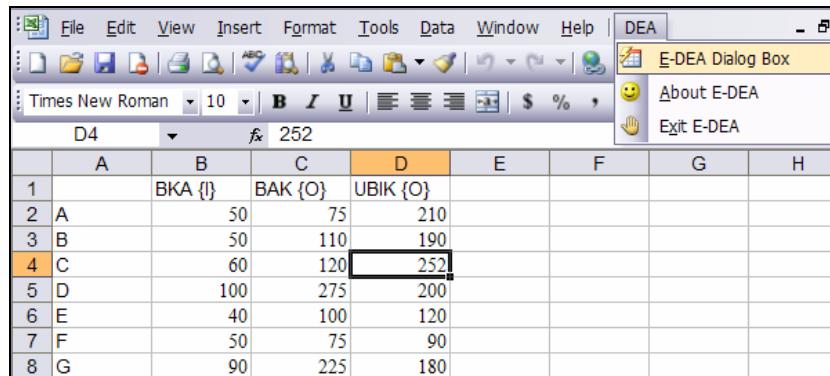
Za nekonveksne modele (FDH) umesto težina za svaku DMU prikazan je broj efikasnih i neefikasnih entiteta.

Softver I-DEA

Za razliku od EMS, I-DEA je domaći proizvod, nastao u Laboratoriji za operaciona istraživanja "Jovan Petrić" na Fakultetu organizacionih nauka u Beogradu, 2005. godine. I-DEA je nastao kao proširena verzija prvobitnog softvera koji se razvija od 1997. godine [49]. Priprema ulaznih podataka koji su potrebni za primenu DEA metode, generisanje i sukcesivno izvršavanje DEA modela kao i generisanje izlaznih izveštaja realizovani su u *MS Excel* okruženju. *Excel* je program koji je pogodan za prikazivanje parametara matematičkih modela kao i izveštaja DEA analize, jer je njih najprirodnije predstaviti u formi tabela. On poseduje moćan i spretno integriran *solver* i programski jezik koji mu daje fleksibilnost za rešavanje i najnestandardnijih zahteva pa je i idealan alat za rešavanje matematičkih modela.

Solver je realizovan u *Excel*-u kao *add - in*, tj. kao dodatak koji ne mora biti sastavni deo programa koji je licenciran od kompanije *Frontline Systems* i omogućava rešavanje zadataka linearног, nelinearnог i celobrojnог programiranja. Programski jezik koji je sastavni deo *Excel*-a zove se "*Visual Basic for Applications*" (VBA) [66]. To je objektno orijentisan programski jezik. Iz VBA modula je moguće kontrolisati sve delove i karakteristike *Excel* - a, ali i upravljati solverom. Obzirom da u *Excel*-u postoji pogodno okruženje za unos i upravljanje ulaznim podacima, kao i *solver* za rešavanje DEA modela, za razvoj softvera I-DEA napravljeni su dijalozi za izbor i definisanje DEA modela, automatizovano je formiranje konkretnih modela za svaku DMU i obezbeđeno generisanje potrebnih izveštaja.

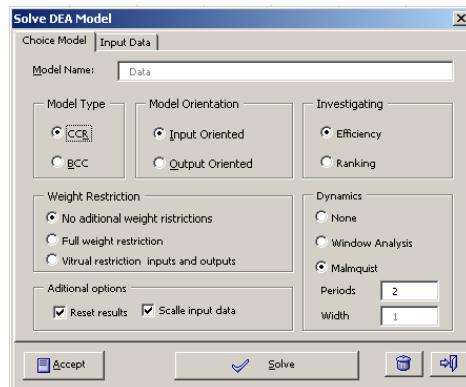
Na istom primeru 2. koji je korišćen za ilustraciju načina rada EMS biće ilustrovan i I-DEA softver. Posle prikaza softvera biće upoređivani dobijeni rezultate kao i njihovo sukcesivno izvršavanje i generisanje.



The screenshot shows the I-DEA software interface. The menu bar includes File, Edit, View, Insert, Format, Tools, Data, Window, Help, and a specific 'DEA' option. A toolbar below the menu contains various icons. The main area is a spreadsheet table with columns labeled A through H and rows numbered 1 through 8. The first column contains labels: BKA {I}, BAK {O}, UBIK {O}, A, B, C, D, E, F, G, H. The second column has values: 50, 50, 60, 100, 40, 50, 90. The third column has values: 75, 110, 120, 275, 100, 75, 225. The fourth column has values: 210, 190, 252, 200, 120, 90, 180. Row 4 (C) is highlighted in orange, and cell D4 (252) is selected and highlighted with a red border.

Slika 18. I-DEA meni

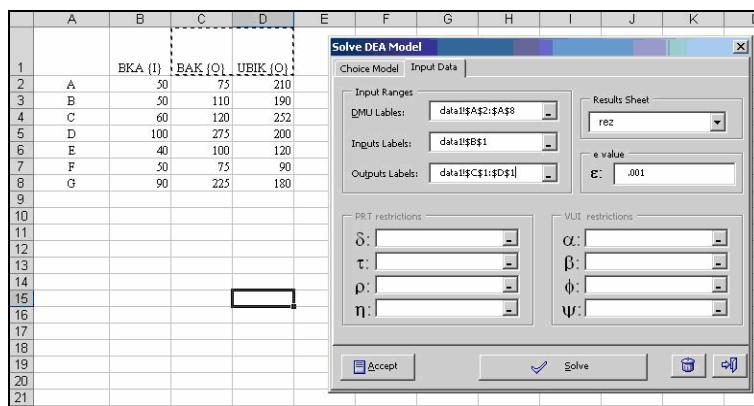
Kao što se vidi na Slici 18., u glavnom meniju se pojavila stavka DEA posle pokretanja programa. Osnovni *E-DEA Dialog box* ima dve kartice : *Choice Model* i *Input Data*. Prva od njih ima izgled kao na Slici 19.:



Slika 19. Dijalog za izbor DEA modela

Poznavaoci DEA metodologije imaju veliki izbor kombinacija modela. Izbor se odnosi na **tip modela** (*model type*), CCR ili BCC model, odnosno da li jedinice posluju sa promenljivim ili konstantnim prinosom na obim, zatim na **orientaciju modela** (*model orientation*), tj. da li je model ulazno ili izlazno orijentisan. Što se tiče **istraživanja** (*investigating*) koje se vrši, može se izabrati rangiranje, koje možemo da poistovetimo sa *superefficiency* u EMS-u, ili samo ocenu efikasnosti. Ukoliko se izabere CCR model podrazumeva se da se očekuje rangiranje, a ako se izabere BCC model oceniće se samo efikasnost organizacionih jedinica. Za konkretni primer izabran je osnovni model CCR, ulazno-orijentisan, za ocenu efikasnosti organizacionih jedinica.

U odeljku za ograničavanje težina, moguće je odabrati *Full weight restriction*, *Virtual restriction inputs and outputs* ili *No additional weight restrictions*.



Slika 20. Definisanje ulazih parametara

Na Slici 20. je prikazana kartica *Input data*. Ovde se vide i ulazni podaci. **Unošenje podataka** u sam program je jako jednostavno i vrši se tako što se obeleži (na slici isprekidanim linijama) labele koje predstavljaju nazine DMU, nazine ulaza i izlaza izlazi. Pored unošenja podataka trebalo bi još dati i **ime tabeli** u koju će se smestiti podaci po izvršenju procene efikasnosti i uneti vrednost za ϵ .

Donji deo ovog prozora prikazuje opcije za ograničavanje težina u DEA modelima. *PRT Restriction* je moguća ako je na *Choice Model* kartici odabранo *Full weight restriction*. Sa leve strane se unose ograničenja za težinske koeficijente ulaza, a sa desne strane za težinske koeficijente izlaza. Broj ulaznih ograničenja mora da odgovara broju ulaza, a broj ograničenja za izlaze mora da odgovara broju izlaza. Pored ovoga, leva strana ograničenja ne može da bude veća od desne strane. *VUI Restriction*, za razliku od prethodne sekcije je moguća ukoliko je na *Choice Model* kartici odabранo *Virtual restriction inputs and outputs* [46].

Pritiskom na dugme *Solve* prikazaće se rešenje zadatka u obliku tabele u *Excel*-u. Sam taj izveštaj sastoji se iz dva dela: sumarnog i detaljnog izveštaja. **Sumarni izveštaj** prikazuje samo indeks efikasnosti za svaku organizacionu jedinicu posebno i može se videti kako izgleda na Slici 21.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1 DMU:	A	B	C	D	E	F	G	H
2 data1	1	1	1	1	1	0.6	0.92	
3								
4								

Slika 21. Sumarni izveštaj

Može se videti da su B, C, D i E entiteti ocenjeni kao efikasni jer im je vrednost indeksa efikasnosti jednak 1, dok su F i G jedinice neefikasne. Organizaciona jedinica A je obojena

drugom bojom od ostalih efikasnih jedinica, iako joj je indeks efikasnosti 1. Ona ipak ne ulazi u grupu efikasnih DMU jer sa njima ne čini obvojnicu tj. granicu efikasnosti. To se najbolje može videti na grafičkom prikazu za primer 2. Ako se izabere *link* koji predstavlja naziv neke DMU dobiće se **detaljan izveštaj** o organizacionoj jedinici koju smo izabrali. Detaljan izveštaj za DMU A je prikazan na Slici 22.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Back	DMU name: A								
2	The DMU is NOT efficient									
3	Efficiency	0.999909091								
4	Inputs				Outputs					
5	Value	Weight	Slack	Virt. Value	Value	Weight	Slack	Virt. Value	Peer Group	Efficient Inputs
6	50	0.02	0	1	75	3.63636E-06	25	0.000272727	C	50
7					210	0.004760173	0	0.999636364		100
8										210

Slika 22. Detaljni izveštaj

Na ovoj tabeli jasno se vidi naziv DMU, zatim indeks efikasnosti, za koji u konkretnom slučaju možemo da kažemo da je skoro jednak 1 i program automatski definiše da li je jedinica efikasna ili ne. U donjem delu tabele, detaljno su prikazane vrednosti vezane za ulaze i izlaze konkretnog DMU. Svaki ulaz ima vrednost i težinski koeficijent koji kada se pomnože daju vrednost virtuelnog ulaza. Pošto se radi o ulazno-orjentisanom modelu, njegovi virtuelni ulazi su jednakim jedinicama što se jasno vidi u tabeli. Dopunska promenljiva je jednak 0, što je karakteristično za efikasne DMU. Slično je i za izlaze i virtuelne izlaze i njihove vrednosti. Dopunska promenljiva za prvi izlaz nije jednak 0, po čemu može da se zaključi da ova organizaciona jedinica ipak nije efikasna, što je uočeno i na sumarnom izveštaju. Sa desne strane tabele možemo da uočimo podatke koji se odnose na uzorne jedinice, tj. ime jedinice koja je uzorna za odabranu DMU koju detaljno izučavamo, vrednosti ulaza i izlaza koje treba da ima ta jedinica da bi postala efikasna. U slučaju efikasne jedinice detaljni izveštaj ima isti izgled, osim što je u poslednjem delu data lista jedinica za koji je posmatrana DMU referentna.

Za slučaj nesporno efikasnih jedinica, kolone na desnoj strani pokazuju za koje je sve neefikasne jedinice ona uzorna (*DMU Peer for*).

Za praćenje dinamike efikasnosti potrebno je pored već opisanih ulaznih parametara u odeljku *Dynamics* na kartici *Choice Model* izabrati *Window Analysis*, uneti broj perioda i dužinu vremenskog prozora. Izborom dugmeta *Solve* biće rešen model M12 i biće otvoren novi *workbook* za prikaz rezultata. Ilustrativni primer 2. je proširen podacima za još dva vremenska perioda. Rezultati *Window* analize za prozore širine 2 su prikazani na Slici 23. Očigledno je da će broj radnih listova (Window0, Window1,...) biti jednak broju vremenskih prozora i kasnije je veoma lako manipulisati sa ovako uređenim podacima.

	A	B	C
1	DMU	Score	
2	A 1	94.18	
3	B 1	100.00	
4	C 1	99.64	
5	D 1	100.00	
6	E 1	100.00	
7	F 1	60.00	
8	G 1	92.31	
9	A 2	100.00	
10	B 2	83.33	
11	C 2	100.00	
12	D 2	83.33	
13	E 2	66.67	
14	F 2	93.75	
15	G 2	83.08	

Slika 23. Rezultati Window analiza

U program I-DEA je, takođe, ugrađena i procedura za računanje Malmkvistovih indeksa produktivnosti koja omogućava analizu dinamike ukupnog faktora produktivnosti. Potrebno je u odeljku *Dynamics* na kartici *Choice Model* izabrati *Malmquist* i program će u izabranom radnom listu generisati izveštaj kao na Slici 24. U koloni T.E. su dati indeksi promene tehničke efikasnosti, u koloni G.T. indeksi promene proizvodne tehnologije i u koloni M.I., Malmkvistovi indeksi ukupne faktorske produktivnosti.

	A	B	C	D	E
1	DMU	T.E.	G.T.	M.I.	
2	Period 2 / Period 1	A	1	0.868018	0.868018
3		B	1.169637	1.02596	1.2
4		C	1	0.994147	0.994147
5		D	1.022727	1.173333	1.2
6		E	1.40625	1.066667	1.5
7		F	0.6	1.066667	0.64
8		G	0.961538	1.155556	1.111111
9		A	1	1.15205	1.15205
10	Period 3 / Period 2	B	0.968669	0.946315	0.916667
11		C	1	0.978303	0.978303
12		D	0.977778	0.795408	0.777732
13		E	0.746131	0.904654	0.67499
14		F	1.651899	0.920039	1.519812
15		G	1.089391	0.826149	0.9

Slika 24. Malmkvistovi DEA indeksi produktivnosti

Program I-DEA omogućava izvršavanje više analiza nad istim podacima sa različitim ulaznim parametrima (različitim tipovima modela, različitim vrednostima ε) i čuvanje dobijenih rezultata kako bi mogli da se porede, a takođe moguće je da se formira više tabela sa različitim podacima za iste DMU. Tako je omogućeno da se vrši upoređivanje podataka, tj. efikasnosti za istu organizacionu jedinicu, ali sa različitim ulaznim i izlaznim podacima.

I-DEA zadovoljava sve osnovne zahteve koje bi trebalo da ispunji jedan dobar korisnički orijentisani softver za rešavanje DEA modela. Celokupna procedura izbora ulaza, izlaza i

jedinica odlučivanja je jednostavna pošto se svi podaci biraju u jednom dijalogu, a u istim je omogućen i jednostavan izbor vrste modela koji želimo da koristimo bilo da su oni osnovni ili modifikovani. Nakon rešavanja modela za svaku jedinicu generišu se pregledni detaljni izveštaji i osnovni izveštaj o efikasnosti svih DMU. Podaci prikazani u *Excel-u* se mogu lako eksportovati i obraditi u drugim programima ili predstaviti u obliku grafikona, što predstavlja jednu od prednosti u prikazu, analizi i prezentaciji menadžerima kojima su ovi podaci bitni pri donošenju odluka. Takođe, ovaj softver ima velike prednosti i kod analize rezultata modela koji prate dinamiku, pošto su oni dati direktno u *Excel-u*. Ova prednost je očigledna kod prikaza Malmkvistovih indeksa čije računanje je netransparentno za korisnika i obavlja se u jednom koraku. Softver EMS može da se koristi za računanje Malmkvistovih DEA indeksa samo ako je korisnik ujedno i ekspert koji dobro poznaje proceduru njihovog računanja, pošto je npr. samo za dva vremenska perioda potrebno dva puta pokrenuti rešavanje Malmkvistovih indeksa da bi se dobili miksovani indeksi i pokrenuti rešavanje modela *Window* analize sa prozorima širine 1. Zatim je neophodno izračunati indekse za svaki vremenski period i svaku DMU korišćenjem izraza (92). Jedina prednost EMS softvera za sada je mogućnost izbora neradijalnih i aditivnih mera efikasnosti. Tim LABOI koji se bavi DEA analizom i razvojem softvera planira da do kraja godine proširi I-DEA uključivanjem modifikacija i proširenja osnovnih modela u softver.

Pored poređenja ovih dva softvera koja su kasnije i korišćenja za analize na konkretnom primeru u poglavlju 5., autor teze je testirala još jedan softver koji je realizovan u MS Excelokruženju. *DEAFrontier* [16, str. 15] je softver razvijen na univerzitetu *New England* od 2002-2005. Ovaj softver takođe predstavlja *Add-Inn* za MS *Excel* i za rešavanje problema koristi *Solver*. Koncepcija je veoma slična kao kod I-DEA softvera. Ulazi podaci se organizuju u tabele koje moraju imati strogo definisanu formu, a rezultati su organizovani u tri tabele u kojima su dati skorovi efikasnosti i težinski koeficijenti, zatim ciljane vrednosti i vrednosti izravnjavajućih promenljivih. *DEAFrontier* predstavlja još jedan softver razvijan paralelno sa I-DEA na istoj platformi. Poređenjem ova dva softvera može se doći do zaključka da je I-DEA sveobuhvatan i komercijalno upotrebljiv softver koji omogućava i praćenje dinamike efikasnosti i produktivnosti.

Poređenje DEA softvera

U Tabeli 8. su po uzoru na poređenje koje je dato u [6] prikazane karakteristike softvera koje je autor ove teze imao prilike da koristi (isključujući PIM DEAssoft-V1 koji je u analizu uvršćen pošto su njegovi autori ujedno i autori prvog kompletног komercijalnog softvera Warwick Windows DEA 1.0). Prema podacima koji su dati u tabeli 8., I-DEA bi uključivanjem nekoliko komponenti (boljeg korisničkog uputstva, izveštaja, grafikona i

nekoliko dodatnih modela) mogao postati veoma kompletan, sveobuhvatan i konkurentan proizvod za široku upotrebu. U sledećem poglavlju će biti objašnjeno kako se mogu koristiti rezultati dobijeni upotrebom nekog od prikazanih softvera.

		Komercijalni			Nekomercijalni		
Naziv softvera	Frontier Analyst 3.1.5	Warwick Windows DEA 1.0	PIM DEAssoft-V1	EMS 1.3.0	DEAFrontier Premium	I-DEA 3.0	
Autor	Banxia software	Warwick Business School	Thanassoulis Emrouznejad	Sheel	Zhu	FON	
Karakteristike	Intergrisani modul / specijalizovani softer	Softver	Softver	Softver	Softver	Excel Add-in	Excel Add-in
	Format ulaznih podataka	.xls, .txt, sopstveni	.txt	.xls, .txt, sopstveni	.xls, .txt, sopstveni	.xls	.xls
	Kontrola skupa ulaznih podataka	DA	DA	DA	DA	NE	DA
Tipovi modela	CCR	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	BCC	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Aditivni/SBM	NE	DA	DA	DA	DA	NE
	Nekonveksni	NE	NE	NE	DA	NE	NE
	Neradijalni	NE	DA	DA	DA	DA	NE
	Malmkvist	DA	NE	DA	Delimično	NE	DA
Dodatne karakteristike	Kontrola orientacije modela	U/I/N	U/I/N	U/I/N	U/I/N	U/I	U/I
	Window analiza	DA	NE	DA	DA	NE	DA
	Ograničavanje težina	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Superefikasnost	NE	DA	DA	DA	NE	DA
	Nediskrecione varijable	DA	DA	DA	DA	NE	NE
	Kategoriskske varijable	NE	NE	NE	NE	NE	NE
Izveštaji	Broj standardnih izveštaja	5	5	5	1	3	2
	Broj grafikona	12	0	0	0	0	0
	Indeksi efikasnosti	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Referentni skup	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Ciljane vrednosti	DA	DA	DA	NE	DA	DA
	Multiplikatori	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Izravnavajuće promenljive	DA	DA	DA	DA	DA	DA
	Matrica unakrsne efikasnosti	NE	DA	DA	NE	NE	NE

Tabela 8. Poređenje karakteristika softvera

4.4. ANALIZA I TUMAČENJE REZULTATA

Ključni rezultat DEA metode je mera relativne efikasnosti koja se određuje za svaku DMU. Pored toga, DEA pruža informacije koje su od značaja za upravljanje daljim radom kako efikasnih, tako i neefikasnih jedinica. Za neefikasne jedinice DEA daje informacije o tome šta treba da učine da bi postale efikasne, a za efikasne kako da rade još efikasnije. U cilju objašnjavanja indeksa efikasnosti posmatranih DMU kao i upravljanja njihovim daljim radom na osnovu optimalnih rešenja izabranih DEA modela mogu se dobiti sledeći izveštaji:

- raspodela virtuelnih ulaza i izlaza,
- matrica unakrsne efikasnosti,
- referentne (uzorne) jedinice za neefikasne jedinice,
- ciljni ulazi i izlazi za neefikasne jedinice,
- praćenje promena efikasnosti tokom vremena,
- procena preraspodele resursa između jedinica.
- Način analize i objašnjenja pojedinih izveštaja su zasnovani na rezultatima datim u [46]

4.4.1. Raspodela virtuelnih ulaza i izlaza

Vrednosti virtuelnih ulaza i izlaza saopštavaju koliko su pojedini ulazi i izlazi doprineli postizanju maksimalne efikasnosti posmatrane jedinice. Virtuelni izlazi neke DMU dobijaju se kada se vrednosti njenih izlaza pomnože sa optimalnim vrednostima težinskih koeficijenata. Tako je r -ti virtuelni izlaz za k -tu DMU jednak $u_r^* y_{rk}$, gde je u_r^* optimalna vrednost za u_r iz modela M2. Analogno se izračunava i -ti virtuelni ulaz kao proizvod $v_i^* x_{ik}$, gde je v_i^* optimalna vrednost za v_i iz istog modela. Suma virtuelnih izlaza k -te DMU čini njen ukupan virtuelni izlaz i jednaka je njenom indeksu efikasnosti (ako je model ulazno orijentisan) ili 1 (ako je model izlazno orijentisan). Suma virtuelnih ulaza k -te DMU jednaka je njenom indeksu efikasnosti (ako je model izlazno orijentisan) ili 1 (ako je model ulazno orijentisan).

Virtuelni ulazi i izlazi sa većim vrednostima označavaju da te ulaze i izlaze posmatrana DMU želi istaći pri poređenju sa drugim jedinicama. Udeo pojedinih virtuelnih ulaza (izlaza) u ukupnom virtuelnom ulazu (izlazu) posebno je značajno analizirati za efikasne jedinice.

Već je objašnjeno da DEA dopušta veliku fleksibilnost svakoj DMU pri izboru težinskih koeficijenata. Ako su vrednosti za ulaze i izlaze tačno unete u DEA model i neka DMU je neefikasna, ta procena efikasnosti je sigurno ispravna. To znači da postoji neka DMU

koja ima veći indeks efikasnosti od maksimalnog indeksa efikasnosti posmatrane DMU. Međutim, procene efikasnosti za efikasne jedinice nisu potpuno stabilne. DMU koja ima veliku vrednost samo jednog izlaza i malu vrednost samo jednog ulaza, može biti procenjena kao efikasna pa čak iako su joj svi preostali izlazi najmanji i svi preostali ulazi najveći u skupu vrednosti ulaza i izlaza svih jedinica. Pored toga, neke jedinice se mogu pojaviti kao efikasne tako što su im dodeljene veće težine ulazima i izlazima koji su sekundarne važnosti, dok su ignorisani oni koji se odnose na glavne funkcije jedinice.

Zbog toga, ako je za posmatranu DMU ideo jednog ulaza u virtuelnom ulazu veliki (npr. veći od 95%) i/ili ideo jednog izlaza u virtuelnom izlazu veliki, nju treba dodatno analizirati. Prvo treba proveriti da li su vrednosti ulaza i izlaza za nju i njoj referentne jedinice tačno unete u model. Zatim treba proveriti da li je ta DMU efikasna ako se poveća vrednost za paramatar ε . U svakom slučaju ona nije primer dobre operativne prakse za preostale jedinice.

Jedan od načina za razdvajanje relativno efikasnih jedinica i eliminisanje onih koje se oslanjaju na neodgovarajuće težinske strukture je ograničavanje vrednosti težinskih koeficijenata. Ocenjivanjem bi smo tada utvrdili koja od jedinica je relativno efikasna unutar nametnutih ograničenja težina. Ograničenje težina se različito objašnjava od strane različitih autora, ali je u svim slučajevima krajnji rezultat skup implicitnih ili eksplicitnih ograničenja koja se ugrađuju u DEA model.

4.4.2. Matrica unakrsne efikasnosti

Matrica unakrsne efikasnosti je dimenzije $n \times n$ (n - broj DMU) u kojoj vrednost na polju (i,j) predstavlja relativnu efikasnost jedinice j sa optimalnim vrednostima težinskih koeficijenata za ciljnu jedinicu i . Vrednosti na glavnoj dijagonali su predhodno dobijeni indeksi efikasnosti svake od n DMU. Može se primetiti da jedinica 1 ima relativnu efikasnost 1 sa njenim sopstvenim težinama (efikasna je), relativnu efikasnost 0.8 sa težinama optimalnim za jedinicu 2, 0.92 sa optimalnim vrednostima težinskih koeficijenta jedinice 3, itd. Za svaku kolonu (DMU) može se izračunati srednja vrednost efikasnosti koja pokazuje kako je ta jedinica procenjena od strane preostalih jedinica. Na osnovu ovih srednjih vrednosti moguće je rangirati posmatrane DMU. Relativno efikasna jedinica koja ima najveću srednju vrednost efikasnosti je primer dobre operativne prakse za druge jedinice jer je i sa različitim kombinacijama vrednosti težinskih koeficijenata uvek dobro procenjena. Jedinice koje imaju malu srednju vrednost efikasnosti su dobro procenjene samo sa vrednostima težinskih koeficijenata koje njima najviše odgovaraju i njihove težinske strukture se razlikuju u odnosu na većinu preostalih jedinica. Za njihovu ocenu efikasnosti se ne može reći da je stabilna i one ne mogu biti primer dobre operativne prakse.

4.4.3. Referentne jedinice

Za svaku neefikasnu jedinicu primenom DEA identificuje se skup odgovarajućih efikasnih jedinica koje čine njoj referentnu (uzornu) grupu. Referentnu grupu neefikasne jedinice čine jedinice koje su sa njenim optimalnim težinama efikasne. Jedinice iz referentne grupe neke neefikasne jedinice imaju istu ulazno-izlaznu orijentaciju kao i ona i postižu veću efikasnost. Razlike ulazno-izlaznih nivoa relativno neefikasne jedinice u odnosu na njene referentne jedinice ukazuju na oblasti u kojima su njene manjkavosti u radu. Činjenica da su referentne jedinice relativno efikasne i da imaju sličnu ulazno-izlaznu orijentaciju kao i neefikasna jedinica, ukazuje da one daju za nju primer dobre operativne prakse. Njihovo identifikovanje je veoma korisno kako za menadžment neefikasnih jedinica tako i za one koji prate poslovanje svih posmatranih jedinica u okviru određenog sistema. U optimalnom rešenju primarnog DEA modela (M2) ako vrednost funkcije cilja nije jednaka 1, onda svako ograničenje dato relacijom (10) u kome izravnjavajuća (dopunska) promenjiva ima vrednost 0 ukazuje da je jedinica na koju se ono odnosi referentna za posmatranu neefikasnu jedinicu.

Referentne jedinice se identificuju dosta lako i na osnovu optimalnog rešenja modela (M3) jer jedino dulane težine λ koje se odnose na njih imaju pozitivnu vrednost za posmatranu neefikasnu jedinicu. U rešavanju dualnog modela od referentnih jedinica se formira kompozitna jedinica. Treba naglasiti da sve referentne jedinice nemaju istu važnost u konstrukciji kompozitne jedinice. Ako se izračuna procenat doprinosa uzornih jedinica svakom ulazno/izlaznom nivou kompozitne jedinice može se oceniti u kojoj meri neka uzorna jedinica preovlađuje u konstrukciji kompozitne jedinice. Ako postoji neka dominantna referentna jedinica, ona bi trebala biti glavni komparator za neefikasnu jedinicu. Na osnovu vrednosti ulaza i izlaza referentnih jedinica mogu se utvrditi odgovarajući ciljevi za poboljšanje efikasnosti neefikasne jedinice, posebno ako je neka od njih slične veličine.

Kao indikator dobre prakse može poslužiti i frekvencija sa kojom se efikasna jedinica pojavljuje u referentnim grupama neefikasnih jedinica. Taj broj pokazuje meru u kojoj su efikasne jedinice ocenjivači ili samoocenjivači. Ako je broj veoma mali u odnosu na broj ocenjivanih jedinica onda se može reći da je ta jedinica samoocenjivač i nije u stanju da ponudi efikasne ciljeve za neefikasne jedinice. Ako bi se na osnovu frekvencije pojavljivanja u referentnim grupama izvršilo rangiranje efikasnih jedinica, najveći rang bio bi dodeljen jedinici koja ima najveći broj pojavljivanja.

4.4.4. Ciljni ulazi i izlazi

Da bi relativno neefikasne jedinice poboljšale svoj rad pred njih se postavljaju određeni ciljevi koji sadrže skup ulazno/izlaznih nivoa sa kojima bi postale efikasne. Optimalno rešenje dualnog DEA modela može se koristiti za planiranje ciljeva koje neka jedinica treba da ostvari. U poglavlju 4 date su relacije (18) i (19) pomoću kojih se može odrediti ulazno orijentisan skup ciljeva. Izlazno orijentisani efikasni ulazno/izlazni nivoi se dobijaju na osnovu optimalnog rešenja dualnog izlazno orijentisanog modela na sledeći način:

$$X''_k = X_k - s^{-*} \quad (97)$$

$$Y'_k = \theta_k^* Y_k + s^{+*} \quad (98)$$

Orijentacija ciljeva pokazuje da li je prioritet pri poboljšavanju efikasnosti dat smanjivanju ulaza (svi ulazi se proporcionalno smanjuju) ili povećavanju izlaza (svi izlazi se proporcionalno povećavaju). Međutim, to su samo dva skupa iz beskonačnog skupa ciljeva koji bi jedinicu mogli učiniti efikasnom. Postoje i drugi ciljevi koji bi mogli biti poželjniji ili značajniji za posmatranu jedinicu. U [46] su prikazani modeli koji se mogu koristiti za procenu alternativnih ulazno-izlaznih ciljnih nivoa i to:

- kada jedan ulaz ima prioritet pri smanjivanju,
- kada jedan izlaz ima prioritet pri povećavanju i
- kada donosioc odluke zadaje preference za promenu više ulaza i više izlaza.

Ovi modeli sadrže preference poboljšanja ulaznih i izlaznih nivoa tako da dobijeni ciljni nivoi odražavaju korisnikovu naklonost prema mogućim putevima ka efikasnosti. U [70] se mogu naći i modeli koji dopuštaju menadžmentu posmatranih jedinica da odredi idealne ulazno/izlazne ciljeve i da postizanju ovih ciljeva dodele različite prioritete. Ovi modeli minimiziraju ukupno odstupanje od tih ciljeva. Detaljan opis i pregled modela su dati u [46].

4.4.5. Praćenje promena efikasnosti tokom vremena

Praćenje promena efikasnosti tokom vremena se vrši primenom *Window* analize i Malmkvistovih indeksa koji su detaljno objašnjeni u poglavljima 3.4.1 i 3.4.2.

4.4.6. Preraspodela resursa između jedinica

Rezultati koje daje DEA metoda stvaraju kvantitativnu osnovu za preraspodelu resursa između jedinica koje se procenjuju i to je jedan od razloga što se metoda široko koristi u praksi. Raspodela virtualnih ulaza i izlaza, njihove ciljne vrednosti kao i vrednosti dopunskih promenljivih moraju se uzeti u obzir ako se želi napraviti program preraspodele resursa. Cilj programa preraspodele je da prenesti određene resurse u jedinice u kojima će biti efikasnije korišćeni. Međutim, u praksi, preraspodela resursa je mnogo kompleksniji proces nego sama implementacija DEA rezultata. Kada je u pitanju alokacija resursa važna su sledeća dva razmatranja:

1. U vezi sa transferom resursa potrebno je razmotriti i faktore koji nisu korišćeni u oceni efikasnosti. Pored toga, moguće je da resursi u neefikasnim jedinicama nisu spremni za transfer u druge jedinice, ili da zamena nekih njihovih resursa može da ih učini još neefikasnijim jer nisu sposobne da ostatak resursa iskoriste efikasno. Praktičnost transfera nekog resursa zahteva dalja razmatranja koja nisu uključena u DEA analizu.
2. Realokacija ulaza ili izlaza vodi ka promeni ulazno/izlaznih nivoa u jednom broju jedinica. Zbog relativne prirode DEA ocene efikasnosti, promena ulazno/ izlaznog nivoa u jednoj jedinici može prouzrokovati promenu relativne efikasnosti i kod drugih jedinica. Stoga, promena ulazno/izlaznog nivoa zahteva ponovno DEA ocenjivanje.

Dobra ilustracija primene DEA u alokaciji resursa data je u [9] gde je ocenjivana efikasnost alternativnih obrazovnih programa u zajednici koledža. Transfer resursa ovde je bio razmatran i za efikasne i za neefikasne jedinice. Autori su pokazali da bi sa stanovišta efikasnosti bilo ispravno formirati nekoliko novih jedinica kojima bi bili dodeljeni resursi koji se ne koriste efikasno u postojećim jedinicama. Međutim, mada je pokazano da su DEA analize veoma korisne u odlučivanju o alokaciji resursa ona ne može odgovoriti na pitanje kako rasporediti ukupne organizacione resurse na jedinice tako da se dobije maksimalan ukupan izlaz za zajednicu jedinica.

DEA takođe može pomoći i kod alokacije resursa u privatnom sektoru. Ako skup ocenjivanih jedinica pripada profitnom sektoru ekonomije smatra se da performanse jedinica primarno treba da budu ocenjene u smislu profitabilnosti. Čak i kada profitabilnost nije dovoljna mera performansi u profitnom sektoru ona se ne može ignorisati. Polazeći od činjenice da su i profitabilnost i efikasnost važne u procesu odlučivanja za posmatrane jedinice u [9] je pokazano kako se jedinica može oceniti matricom profitabilnosti/efikasnosti koja je analogna portfolio matrici. Sve jedinice oni su podelili u 4 kvadranta. Jedinice locirane u kvadrantu nazvanom "Star" su najbolje i trebale bi biti primer dobre radne prakse jer imaju i visok profit i visoku efikasnost. Jedinice iz kvadranta "Sleeper" su profitabilne, ali neefikasne.

Njihova profitabilnost je više posledica faktora okruženja nego dobrog menadžmenta. Ako bi poboljšale efikasnost one bi mogle povećati i profit. Jedinice locirane u kvadrantu označenom sa "?" imaju mogućnost povećanja i efikasnosti i profita, dok one locirane u kvadrantu "Dog" rade efikasno, ali imaju nisku profitabilnost verovatno zbog nepovoljnih faktora okruženja. U ekstremnim slučajevima moglo bi biti razumno oduzeti resurse tim jedinicama i dodeliti ih drugima, pre svega jedinicama iz kvadranta "Sleeper".

5. LITERATURA

- [1] Andersen P, Petersen NC. "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis" *Management Science* 39(10), 1993, 1261–4.
- [2] Athanassopoulos A., Giokas D., "The Use of Data Envelopment Analysis in Banking Institutions: Evidence from the Commercial Bank of Greece", *INTERFACES* 30(2), 2000, 81-85.
- [3] Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Sciences* 30, 1984, 1078-1092.
- [4] Banker R.D., Morey R., "Efficiency Analysis for Exogeniously Fixed Inputs and Outputs", *Operations Research* 34(4), 1986, 513-521
- [5] Banker R.D., Thrall R.M., "Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research* 62, 1992, 74-84.
- [6] Barr, R.S., "DEA Software Tools and Technology: A State-of-the-Art Survey", *Handbook on Data Envelopment Analysis (International Series in Operations Research & Management Science)*, editori: Cooper W., Seiford L., Zhu J., Kluwer Academic Publishers, London, 2002.
- [7] Berger A. N, Humphrey D. B, "Efficiency of Financial Institutions: International survey and directions for future research" *EJOR* 98(2), 1997, 175-212.
- [8] Bhat R., Verma B.B., Reuben E., "Methodologically Note – Data Envelopment Analysis", *Journal of Health Management* 4(2), 2001,
- [9] Boussofiane A., Dyson G.R., Thanassoulis E., "Applied Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research* 52(1), 1991, 1-15.
- [10] Bowlin W., "Measuring Performance, An Introduction to Data Envelopment Analysis", *Journal of Cost Analysis*, 1998, 3-27.
- [11] Casu B., Girardone C., Molyneux P., "Productivity Change in European Banking: A Comparison of Parametric and Non-Parametric Approaches", *Discussion Paper No.04-01*, Department of Accounting, Finance and Management, University of Essex, 2004
- [12] Caves D.W., Christensen L.R., Diewert W.E., "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity" *Econometrica* 50, 1982, 1393–1414.
- [13] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.L., "Measuring Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 2(6), 1978, 429-444.
- [14] Chen Y., Ali A.I., "DEA Malmquist Productivity Measure: New Insight With an Application to Computer Industry", *EJOR* 159, 2004, 239-249.
- [15] Coelli T., "A Guide to DEAP Version 2.1: Data Envelopment (Computer) Program", *Working Paper 96/08*, Center for efficiency and productivity analysis, Universisy of New England, 1996.
- [16] Cook W., Zhu J., "Modeling Performance Measurement: Applications and Implementation Issues in DEA", Springer, 2005.
- [17] Cooper W., Seiford L. M., Tone K., "Data Envelopment Analysis – A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software", Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [18] Čupić M., Tummala V.M.R., Suknović M., "Odlučivanje: formalni pristup", FON, 2003.
- [19] Denizer C., Dinc M., "Measuring Banking Efficiency in the Pre- and Post-liberalization Environment: Evidence from the Turkish Banking System *Working Paper 2476*, The World Bank, 2000.

- [20] Emrouznejad A., "An Extensive Bibliography of Data Envelopment Analysis, Volume I to V", <http://www.warwick.ac.uk/~bsrлу>, 2001.
- [21] Emrouznejad A., "Performance Improvement Management", <http://www.deasoftware.co.uk/>, 2001.
- [22] Fare R., Grasskopf S., Lindgren B., Roos P., "Productivity Development in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach", *Data Envelopment Analysis – Theory, Methodology and Applications*, editori: Charnes A., Cooper W., Lewin A., Seiford L., Kluwer Academic Publishers, London, 1994, 253-272.
- [23] Farrell, M.J., "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of Royal Statistical Society, Series A*, 120(3), 1957, 253-290.
- [24] Førsund F.R., Saroglou N., "On the Origin of Data Envelopment Analysis", Department of Economic, University of Oslo, Memorandum No 24/2000, 2000.
- [25] Foster S., Greene S., Pytrowska J., "The State of Microfinance in Central and Eastern Europe and the New Independent States", CGAP/ The World Bank Group, Washington, 2003.
- [26] Fries S., Taci A., "Cost Efficiency of Banks in Transition: Evidence From 289 Banks in 15 Post-Communist Countries", *Working Paper No. 86*, European Bank for Reconstruction and Development, 2004.
- [27] Galagedera D. U. A., Edirisuriya P., "Performance of Indian Commercial Banks (1995-2002): an Application of Data Envelopment Analysis and Malmquist productivity index", *Working paper 0408006*, Monash University, 2004.
- [28] Gattoufi S., Oral M., Kumar A., Reisman A., "Epistemology of Data Envelopment Analysis and Comparison with Other Field of OR/MS for Relevance to Applications" *Socio-Economic Planning Sciences* 38, 2004, 123-140.
- [29] Glišović J., Milivojević M., "Rezultati istraživanja uticaja DSI/FMR mikro-zajmovnog programa", Fond za mikro-razvoj, Beograd, 2003.
- [30] Grifell-Tatje E., Lovell C. A. K., "A Note on Malmquist Productivity Index", *Economics Letters* 47, 1995, 169-175
- [31] Grigorian D., Manole V., "Determinants of Commercial Bank Performance in Transition: An Application of Data Envelopment Analysis", *Working Paper 2850*, The World Bank, 2002.
- [32] Guzowska M., Kisielewska M., Nellis J., Zarzecki D., "Efficiency of the Polish Banking Sector – Assessing the Impact of Transformation", *Data Envelopment Analysis and Performance Management*, editori: Emrouznejad A., Podinovski V., Aston Business School, Aston University, 2004, 163-170
- [33] Havrylchyk O., "Efficiency of the Polish Banking Industry: Foreign versus Domestic Banks", *Working paper No. 21/2003*, European University Viadrina Frankfurt, 2003.
- [34] Hughes A., Yaisawarng S., "Sensitivity and Dimensionality Tests of DEA Efficiency Scores", *EJOR, article in press*.
- [35] Jemrić I., Vujčić B., "Efficiency of Banks in Croatia: A DEA Approach", *Working Papers W-7*, Croatian National Bank, 2002.
- [36] Jerkins L., Anderson M., "A Multivariate Statistical Approach to Reducing the Number of Variables in Data Envelopment Analysis" *EJOR* 147, 2003, 51-61.
- [37] Joro T., "Models for Identifying Target Units in Data Envelopment Analysis: Comparasion and Extension", *Interim Report IR-98-055/August*, IIASA, Laxenburg, 1998.
- [38] Kirikal L., "Productivity, the Malmquist Index and the Empirical Study of Estonian Banks", Financial Sector Research in Estonia: Research Seminar Papers, Tallinn, December 14, 2004, 109-130.
- [39] Kirikal L., "Stabilisation Period and Malmquist Index of Productivity Change: An Empirical Study of Estonian banks", *Data Envelopment Analysis and Performance Management*, editori: Emrouznejad A., Podinovski V., Aston Business School, Aston University, 2004, 353-360

- [40] Kovačić Z., "Analiza vremenskih serija", Ekonomski fakultet Beograd, 1997.
- [41] Krčevinac S., Čangalović M., Kovačević Vujčić V., Martić M., Vujošević M., "Operaciona istraživanja", FON , 2004.
- [42] Kruger J., "The Global Trends of Total Factor of Productivity: Evidence from the Nonparametric Malmquist Index Approach",
- [43] Lee J.J., "Observation Equivalence between the Malmquist Index and the Solow Residual for the G-8 Countries", *Discussion paper CIRJE-F-345*, Towson University 2005.
- [44] Lovell C. A. K., "Production Frontier and Productive Efficiency", *Measurement of Productive Efficiency – Techniques and Applications*, Editori: Fried H., Lovell C. A. K., Schmidt S. S., Oxford University Press, 2000, 3-67.
- [45] Malmquist, S., "Index Numbers and Indifference Curves", *Trabajos de Estadística*, 4(1), 1953, 209-42.
- [46] Martić M., "Analiza obavijenih podataka sa primenama", Doktorska disertacija, FON, 1999.
- [47] Martić M., Popović G., "Integracija DEA i AHP metode", *Zbornik radova SYM-OP-IS 2001*, Beograd, 2001, 699-703
- [48] Martić M., Savić G., Vujošević M., "Poređenje analize obavljanja podataka i metode PROMETHEE pri izboru personalnog računara", *Info*, 2, 1998, 23-29.
- [49] Martić M., Stanojević M., Popović G., "Softver za DEA metodu", *SM 2001*, 2001, 51-60.
- [50] Martić, M., Savić, G., "An Application of DEA for Comparative Analysis and Ranking of Regions in Serbia with Regards to Social-Economic Development", *EJOR 129(3)*, 2001, 344-355.
- [51] Negro A., Maguire K., "Comparing Apples and Oranges: Using MFI Ratings", *The Mikrobanking Bulletin*, 2002, 8, 16-21
- [52] Nieto B. G., Cinca C. S., Molinero C. M., "Microfinance Institutions and Efficiency", *OMEGA*, Article in press.
- [53] Paradi J., Asmild M., Aggarwall V., Schaffnit C., "Performance Evaluation in an Oligopoly Environment: Combining DEA Window Analysis with the Malmquist Index Approach - a Study of the Canadian Banking Industry", *Research Report*, Centre for Management of Technology and Entrepreneurship, Toronto, 2003.
- [54] Pastor J., Lovell C. A. K., Tulkens., "Evaluating the Financial Performance of Bank Branches", *Annals of Operations Research* Online First, 2006, 1-7.
- [55] Pereira R. O., "Microfinance – Evaluation the Efficiency of Microfinancial Institutions", *Informs- SE*, 2002, n° 43, 1-9.
- [56] Popović G., Martić M., "Dvostrukna DEA za procenu efikasnosti i efektivnosti", *Zbornik radova SYM-OP-IS 2003*, Herceg Novi, 2003.
- [57] Portela M., Thanassoulis E., Simpson G., "A Directional Distance Approach to Deal with Negative Data in DEA: An Application to Bank Branches", *Research Paper 0306*, Aston Business School, Aston University, 2003.
- [58] Porto, J., Flynn P., "Determining Best Organizational Among Community-Based Treatment Providers: A Two-Stage Data Envelopment Analysis", www.datos.org/posters
- [59] Robinson M., "The Microfinance Revolution – Sustainable Finance for Poor", International Bank for Reconstruction and Development / The World Bank, Washington, 2001.
- [60] Roland N., "Software Review: Frontier Analyst", *OR/MS today*, 1998.
- [61] Savić G., Martić M., "DEA metoda – nov pristup u ocenjivanju efikasnosti", *SM 2001*, 2001, 61-70.
- [62] Scheel H., "EMS: Efficiency Measurement System User's Manual", University of Dortmund, 2000.

- [63] Simons R., "Data Envelopment Analysis Aids Efficiency", <http://www.exodus.com>, 1996.
- [64] Simons R., "Data Envelopment Analysis and its Uses in Banking", <http://www.exodus.com>, 1996.
- [65] Stanojević M., "Višekriterijumski pristup rešavanju Štajnerovog problema na grafu", doktorska teza, FON, 2005.
- [66] Stanojević M., Martić M., Krčevinac S., "Solving Basic DEA Models in Spreadsheet Environment", Proceedings of Abstracts of 4th Balkan Conference on Operational Research, Thessaloniki, Greece, 1997, 126.
- [67] Statistički godišnjak 2004, Republički zavod za statistiku, Republika Srbija, 2004
- [68] Tavares G., "A bibliography of data envelopment analysis (1978-2001)", RRR 01-2002, RUTCOR -Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University 2002.
- [69] Thanassoulis E., Emrouznejad A., "Warwick Windows DEA - User's Guide", *Warwick Business School*, University of Warwick, 1995.
- [70] Thanassoulis, E., Dyson R.G., "Estimating Preferred Target Input-Output Levels Using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, 56(1), 1992, 80-97.
- [71] Tone K., "A Slacks-based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis: Comparasion and Extension", *EJOR* 130(3), 2001, 498-509.
- [72] Tortosa-Ausina E., Grifell-Tatje E., Armero C., Conesa D., "Sensitivity Analysis of Efficiency and Malmquist Productivity Indices: An Application to Spanish Savings Banks", *Working Paper 2003/02*, University of New South Weles, 2004.
- [73] Vujošević M., Stanojević M., Mladenović N., "Metode optimizacije", FON, 2000.
- [74] Zhu J., "Quantitative Model for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheet and DEA Excel Solver", Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

